1991 年北京高考文科数学真题及答案

考生注意：这份试卷共三道大题(26 个小题)．满分 120 分．

一、选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一是符合题目要求的．把所选项前的字母填在题后括号内．

(1) 已知sin $\alpha=\frac{4}{5}$，并且 α 是第二象限的角，那么tg α 的值等于 (　　)

(A) $-\frac{4}{3}$　(B) $-\frac{3}{4}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{3}$

(2) 焦点在(－1，0)，顶点在(1，0)的抛物线方程是 (　　)

(A) $y^2=8(x+1)$　(B) $y^2=-8(x+1)$

(C) $y^2=8(x-1)$　(D) $y^2=-8(x-1)$

(3) 函数$y=\cos^4x-\sin^4x$的最小正周期是 (　　)

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) 4π

(4) $P(2，5)$关于直线$x+y=0$的对称点的坐标是 (　　)

(A) (5，2)　(B) (2，－5)　(C) (－5，－2)　(D) (－2，－5)

(5) 如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的12条直线中，异面直线共有 (　　)

(A) 12 对　(B) 24 对　(C) 36 对　(D) 48 对

(6) 函数$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$的图像的一条对称轴的方程是 (　　)

(A) $x=-\frac{\pi}{2}$　(B) $x=-\frac{\pi}{4}$

(C) $x=\frac{\pi}{8}$　(D) $x=\frac{5\pi}{4}$

(7)如果三棱锥$S-ABC$的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且顶点S在底面的射影O在△ABC内，那么O是△ABC的 (　　)

(A) 垂心　(B) 重心　(C) 外心　(D) 内心

(8) 已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么a_3+a_5的值等于 (　　)

(A) 5　(B) 10　(C) 15　(D) 20

(9) 已知函数$y=\dfrac{6x+5}{x-1}$($x\in$R，且$x\neq 1$)，那么它的反函数为 ( )

(A) $y=\dfrac{6x+5}{x-1}$($x\in$R，且 $x\neq 1$)

(B) $y=\dfrac{x+5}{x-6}$($x\in$R，且 $x\neq 6$)

(C) $y=\dfrac{x-1}{6x+5}$($x\in$R，且 $x\neq -\dfrac{5}{6}$)

(D) $y=\dfrac{x-6}{x+5}$($x\in$R，且 $x\neq -5$)

(10) 从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台，其中至少要有甲型与乙型电视机各1台，则不同的取法共有 ( )

(A) 140 种　(B) 84 种　(C) 70 种　(D) 35 种

(11) 设甲、乙、丙是三个命题．如果甲是乙的必要条件；丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件，那么 ( )

(A) 丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件

(B) 丙是甲的必要条件，但不是甲的充分条件

(C) 丙是甲的充要条件

(D) 丙不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(1-\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{5})]\cdots(1-\dfrac{1}{n+2})]$的值等于 ( )

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

(13) 如果$AC<0$且$BC<0$，那么直线$Ax+By+C=0$不通过 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

(14) 如果奇函数$f(x)$在区间[3，7]上是增函数且最小值为5，那么$f(x)$在区间[－7，－3]上是 ( )

(A) 增函数且最小值为－5　(B) 增函数且最大值为－5

(C) 减函数且最小值为－5　(D) 减函数且最大值为－5

(15) 圆$x^2+2x+y^2+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有 ( )

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

二、填空题：本大题共5小题；每小题3分，共15分．把答案填在题中横线上．

(16) 双曲线以直线$x=-1$和$y=2$为对称轴，如果它的一个焦点在y轴上，那么它的另一焦点的坐标是__________________.

(17) 已知$\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\sin 2(x-\dfrac{\pi}{4})=$____________.

(18) 不等式$\lg(x^2+2x+2)<1$的解集是____________.

(19) 在$(ax+1)^7$的展开式中，x^3的系数是x^2的系数与x^4的系数的等差中项，若实数$a>1$，那么$a=$____________.

(20)在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知顶点A上三条棱长分别是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、2．如果对角线AC_1与过点A的相邻三个面所成的角分别是α、β、γ，那么$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$_________.

三、解答题：本大题共6小题；共60分.

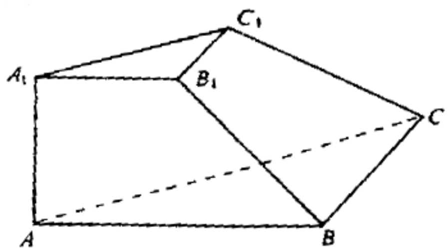
(21)（本小题满分8分）

求函数$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$的最大值.

(22)（本小题满分8分）

已知复数$z=1+i$，求复数$\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角的主值.

(23)（本小题满分10分）



如图，在三棱台$A_1B_1C_1-ABC$中，已知$A_1A\perp$底面ABC，$A_1A=A_1B_1=B_1C_1=a$，$B_1B\perp BC$，且B_1B和底面ABC所成的角45º，求这个棱台的体积.

(24)（本小题满分10分）

设$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=(\dfrac{1}{2})^{a_n}$．已知$b_1+b_2+b_3=\dfrac{21}{8}$，$b_1b_2b_3=\dfrac{1}{8}$．求等差数列的通项$a_n$.

(25)（本小题满分12分）

设$a>0$，$a\neq1$，解关于x的不等式$a^{x^4-2x^2}>(\dfrac{1}{a})^{a^2}$.

(26)（本小题满分12分）

已知椭圆的中心在坐标原点 O，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆相交于 P 和 Q，且 $OP\perp OQ$，$|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．求椭圆的方程．

参考答案及评分标准

说明：

一．本解答指出了每题所要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种较为常见的解法，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容参照评分标准制定相应评分细则．

二．每题都要评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅．当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分时，如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响的程度决定后面部分的给分，但不得超过后面部分应给分数的一半；如果这一步以后的解答有较严重的错误，就不给分．

三．为了阅卷方便，本试题解答中的推导步骤写得较为详细，允许考生在解题过程中合理省略非关键性的推导步骤．

四．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

五．只给整数分数．

一．选择题．本题考查基本知识和基本运算．每小题3分，满分45分．

(1)A　(2)D　(3)B　(4)C　(5)B　(6)A　(7)D　(8)A　(9)B　(10)C　(11)A　(12)C　(13)C　(14)B　(15)C

二．填空题．本题考查基本知识基本运算．每小题3分，满分15分．

(16)（−2，2）　(17) $2-\sqrt{5}$　(18) $\{x|-4<x<2\}$　(19) $1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(20) 2

三．解答题

(21) 本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质．满分8分．

解：$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$

$=(\sin^2x+\cos^2x)+2\sin x\cos x+2\cos^2x$ ——2分

$=1+\sin2x+(1+\cos2x)$ ——4分

$=2+\sin2x+\cos2x$

$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$. ——6分

当$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=1$时，函数y有最大值，这时y的最大值等于$2+\sqrt{2}$. ——8分

注：没有说明“当$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=1$时，函数y有最大值”而得出正确答案，不扣分.

(22) 本小题考查复数基本概念和运算能力．满分8分．

解：$\frac{z^2-3z+6}{z+1}=\frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}$

$=\frac{3-i}{2+i}$ ——2分

$=1-i$. ——4分

$1-i$的模$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$．因为$1-i$对应的点在第四象限且辐角的正切

$\text{tg}\,\theta=-1$，所以辐角的主值 $\theta=\frac{7}{4}\pi$. ——8分

(23)本小题考查直线与直线，直线与平面的位置关系，以及逻辑推理和空间想象能力．满分10分．

解：因为$A_1A\perp$底面ABC，所以根据平面的垂线的定义有$A_1A\perp BC$．又$BC\perp BB_1$，且棱AA_1和BB_1的延长线交于一点，所以利用直线和平面垂直的判定定理可以推出$BC\perp$侧面A_1ABB_1，从而根据平面的垂线的定义又可得出$BC\perp AB$.

∴ $\triangle ABC$是直角三角形，$\angle ABC=90°$．并且$\angle ABB_1$就是BB_1和底面ABC所成的角，

$\angle ABB_1=45°$． ——3分

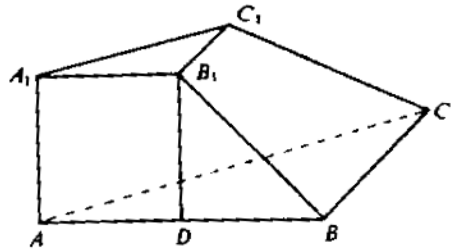
作$B_1D\perp AB$交AB于D，则$B_1D\parallel A_1A$，故$B_1D\perp$底面ABC.

∵ Rt$\triangle B_1DB$中$\angle DBB_1=45°$，

∴ $DB=DB_1=AA_1=a$，

∴$AB=2a$. ——6分

由于棱台的两个底面相似，故



$Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle A_1B_1C_1$.

∵ $B_1C_1=A_1B_1=a$，$AB=2a$，

∴ $BC=2a$.

∴ $S_{上}=\frac{1}{2}A_1B_1\times B_1C_1=\frac{a^2}{2}$.

$S_{下}=\frac{1}{2}AB\times BC=2a^2$. ——8分

$V_{棱台}=\frac{1}{3}\cdot A_1A\cdot\left(S_{上}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}}+S_{下}\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\left(\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{2}\times 2a^2}+2a^2\right)=\frac{7}{6}a^3$. ——10分

(24)本小题考查等差数列，等比数列的概念及运用方程(组)解决问题的能力．满分10分．

解　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_n=a_1+(n-1)d$.

∴ $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+(n-1)d}$

$b_1b_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+2d}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2(a_1+d)}=b_2^2$.

由 $b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$，得$b_2^3=\frac{1}{8}$，

解得 $b_2=\frac{1}{2}$. ——3分

代入已知条件

$$\begin{cases}b_1b_2b_3=\frac{1}{8},\\ b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}.\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}b_1b_3=\frac{1}{4},\\ b_1+b_3=\frac{17}{8}.\end{cases}$$

解这个方程组得$b_1=2$，$b_3=\frac{1}{8}$或$b_1=\frac{1}{8}$，$b_3=2$ ——6分

∴ $a_1=-1$，$d=2$或$a_1=3$，$d=-2$. ——8分

所以，当$a_1=-1$，$d=2$时

$a_n=a_1+(n-1)d=2n-3$.

当$a_1=3$，$d=-2$时

$a_n=a_1+(n-1)d=5-2n$. ——10分

(25)本小题考查指数函数性质、解不等式及综合分析能力．满分12分．

解法一　原不等式可写成　$a^{x^4-2x^2}>a^{-a^2}$. ① ——1分

根据指数函数性质，分为两种情形讨论：

(Ⅰ)当$0<a<1$时，由①式得

$x^4-2x^2+a^2<0$， ② ——3分

由于$0<a<1$时，判别式

$\triangle=4-4a^2>0$,

所以②式等价于

$$\begin{cases}x^2>1-\sqrt{1-a^2}, & ③\\ x^2<1+\sqrt{1-a^2}. & ④\end{cases}$$ ——5 分

解③式得 $x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ 或 $x>\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$，

解④式得 $-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}$. ——7 分

所以，$0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}\cup\{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$.

——8 分

(Ⅱ) 当 $a>1$ 时，由①式得

$x^4-2x^2+a^2>0$， ⑤ ——9 分

由于 $a>1$，判别式$\triangle<0$，故⑤式对任意实数 x 成立，即得原不等式的解集为

$\{x|-\infty<x<+\infty\}$. ——12 分

综合得

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}\cup\{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$；

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

解法二　原不等式可写成　$a^{x^4-2x^2}>a^{-a^2}$.　　①　　——1 分

（Ⅰ）当 $0<a<1$ 时，由①式得

$x^4-2x^2+a^2<0$，　　②　　——3 分

分解因式得　$(x^2-1+\sqrt{1-a^2})(x^2-1-\sqrt{1-a^2})<0$.　③

即 $\begin{cases}x^2-1+\sqrt{1-a^2}>0, & ④\\ x^2-1-\sqrt{1-a^2}<0; & ⑤\end{cases}$

或 $\begin{cases}x^2-1+\sqrt{1-a^2}<0, & ⑥\\ x^2-1-\sqrt{1-a^2}>0. & ⑦\end{cases}$　　——5 分

解由④、⑤组成的不等式组得

$-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$.

或　$\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}$　.　　——7 分

由⑥、⑦组成的不等式组解集为空集；所以，$0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}\cup\{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$；

——8 分

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，由①式得

$x^4-2x^2+a^2>0$，　　⑧　　——9 分

配方得　$(x^2-1)^2+a^2-1>0$，　　⑨

对任意实数 x，不等式⑨都成立，即 $a>1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\infty<x<+\infty\}$.　　——12 分

综合得

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}\cup\{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$；

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为　$\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

(26) 本小题考查椭圆的性质、两点的距离公式、两条直线垂直条件、二次方程根与系

数的关系及分析问题的能力．满分 12 分．

解法一　设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

依题意知，点 P、Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, & ①\\ y=x+1. & ②\end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0$,　　③　　——2 分

设方程③的两个根分别为 x_1，x_2，那么直线 $y=x+1$ 与椭圆的交点为

$P(x_1，x_1+1)$，$Q(x_2，x_2+1)$．　　——3 分

由题设 $OP\perp OQ$, $|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，可得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+1}{x_1}\cdot\dfrac{x_2+1}{x_2}=-1,\\ (x_2-x_1)^2+[(x_2+1)-(x_1+1)]^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2.\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+2x_1x_2+1=0, & ④\\ 4(x_1+x_2)^2-16x_1x_2-5=0. & ⑤\end{cases}$$　　——6 分

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x_1x_2=\dfrac{1}{4},\\ x_1+x_2=-\dfrac{3}{2};\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x_1x_2=-\dfrac{1}{4},\\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

根据根与系数的关系，由③式得

（Ⅰ）$\begin{cases}\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{a^2\left(1-b^2\right)}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{4};\end{cases}$ 或 （Ⅱ）$\begin{cases}\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{a^2\left(1-b^2\right)}{a^2+b^2}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ ——10分

解方程组（Ⅰ），（Ⅱ），得

$\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=\dfrac{2}{3};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=\dfrac{2}{3},\\ b^2=2.\end{cases}$

故所求椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$， 或 $\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}}+\dfrac{y^2}{2}=1.$ ——12分

解法二　同解法一得

$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0$， ③ ——2分

解方程③得

$x_1=\dfrac{-a^2+ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}$，$x_2=\dfrac{-a^2-ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}$. ④ ——4分

则直线$y=x+1$与椭圆的交点为

P（x_1，x_1+1），Q（x_2，x_2+1）.

由题设$OP\perp OQ$，得