2004年天津市高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）设集合$P=\{1，2，3，4，5，6\}$，$Q=\{x\in R\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$，那么下列结论正确的是(　　)

A．$P\bigcap Q=P$　　B．$P\bigcap Q\supsetneqq Q$　　C．$P\bigcup Q=Q$　　D．$P\bigcap Q\subsetneqq P$

2．（5分）不等式$\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$的解集为(　　)

A．$[-1，0)$　　B．$[-1，+\infty)$

C．$(-\infty，-1]$　　D．$(-\infty，-1]\bigcup(0,+\infty)$

3．（5分）对任意实数a、b、c，在下列命题中，真命题是(　　)

A．“$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件　　B．“$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C．“$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件　　D．“$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

4．（5分）若平面向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是180°，且$|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则$\vec{b}=$(　　)

A．$(-3,6)$　　B．$(3,-6)$　　C．$(6,-3)$　　D．$(-6,3)$

5．（5分）设P是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$上一点，该双曲线的一条渐近线方程是$3x+4y=0$，$F_1$，$F_2$分别是双曲线的左、右焦点，若$|PF_1|=10$，则$|PF_2|$等于(　　)

A．2　　B．18　　C．2或18　　D．16

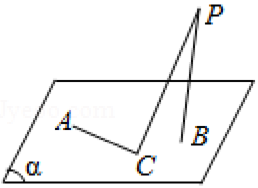
6．（5分）若函数$f(x)=\log_a x(0<a<1)$在区间$[a，2a]$上的最大值是最小值的3倍，则a等于(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

7．（5分）若过定点$M(-1,0)$且斜率为k的直线与圆$x^2+y^2+4x-5=0$在第一象限内的部分有交点，则k的取值范围是(　　)

A．$0<k<\sqrt{5}$　　B．$-\sqrt{5}<k<0$　　C．$0<k<\sqrt{13}$　　D．$0<k<5$

8．（5分）如图，定点A和B都在平面α内，定点$P\notin\alpha$，$PB\perp\alpha$，C是α内异于A和B的动点，且$PC\perp AC$．那么，动点C在平面α内的轨迹是(　　)



A．一条线段，但要去掉两个点　　　　　　B．一个圆，但要去掉两个点

C．一个椭圆，但要去掉两个点　　　　　　D．半圆，但要去掉两个点

9．（5 分）函数 $y=3^{x+1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 $($　　$)$

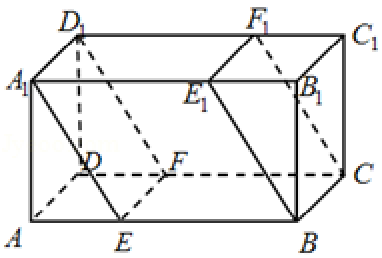
A．$y=1+\log_3 x(x>0)$　　　　B．$y=-1+\log_3 x(x>0)$

C．$y=1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$　　　　D．$y=-1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

10．（5 分）函数 $y=2\sin(\dfrac{\pi}{6}-2x)$，$x\in[0，\pi])$ 为增函数的区间是 $($　　$)$

A．$[0，\dfrac{\pi}{3}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{12}，\dfrac{7}{12}\pi]$　　C．$[\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{5}{6}\pi]$　　D．$[\dfrac{5}{6}\pi，\pi]$

11．（5 分）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=6$，$AD=4$，$AA_1=3$，分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分，其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$，$V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$．若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$，则截面 A_1EFD_1 的面积为 $($　　$)$



A．$4\sqrt{10}$　　B．$8\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{13}$　　D．16

12．（5 分）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数．若 $f(x)$ 的最小正周期是 π，且当 $x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f(\dfrac{5\pi}{3})$ 的值为 $($　　$)$

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品，产品数量之比依次为 $2:3:5$，现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本，样本中 A 种型号产品有 16 件．那么此样本的容量 $n=$______．

14.（4 分）已知向量 $\vec{a}=(1,1)$ ， $\vec{b}=(2,-3)$ ，若 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 k 等于_____.

15.（4 分）如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点，那么实数 a 的取值范围是_____.

16.（4 分）从 0，1，2，3，4，5 中任取 3 个数字，组成没有重复数字的三位数，其中能被 5 整除的三位数共有 _____个.（用数字作答）

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）已知 $\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18.（12 分）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛.

（1）求所选 3 人都是男生的概率；

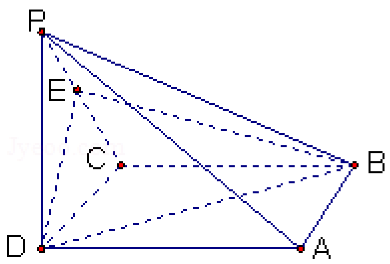
（2）求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率；

（3）求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率.

19.（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$ ， $PD=DC$ ， E 是 PC 的中点.

（1）证明 $PA//$ 平面 EDB ；

（2）求 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值.



20.（12 分）设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $d(d\neq 0)$ 的等差数列，它的前 10 项和 $S_{10}=110$ 且 a_1 ， a_2 ， a_4 成等比数列.

（1）证明 $a_1=d$ ；

（2）求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d(a\neq 0)$ 是 R 上的奇函数，当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2 .

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极大值；

（2）证明对任意 x_1， $x_2 \in (-1,1)$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立．

22．（14 分）椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c，\ 0)(c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF|=2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点．

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

（3）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M，证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$．

2004年天津市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）设集合$P=\{1，2，3，4，5，6\}$，$Q=\{x\in R\,|\,2\leqslant x\leqslant 6\}$，那么下列结论正确的是(　　)

A．$P\bigcap Q=P$　　　B．$P\bigcap Q\supsetneqq Q$　　　C．$P\bigcup Q=Q$　　　D．$P\bigcap Q\subsetneqq P$

【解答】解：$P\bigcap Q=\{2，3，4，5，6\}$，

$\therefore P\bigcap Q\subsetneqq P\neq P$

故A、B错误，

故D正确．

故选：D．

2.（5分）不等式$\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$的解集为(　　)

A．$[-1，0)$　　　B．$[-1，+\infty)$

C．$(-\infty，-1]$　　　D．$(-\infty，-1]\bigcup(0,+\infty)$

【解答】解：$\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}-2\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{-x-1}{x}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x}\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant x<0$

故选：A．

3.（5分）对任意实数a、b、c，在下列命题中，真命题是(　　)

A．“$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件　　　B．“$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C．“$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件　　　D．“$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

【解答】解：A、C当$c<0$时，“$ac>bc$”即不是“$a>b$”的必要条件也不是充分条件，故A，C不成立；

B、$\because$当$a=b$时

$\therefore$一定有$ac=bc$．

但$ac=bc$时，且$c=0$时，a，b可以不相等．

即“$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件．

D、当$c=0$时，“$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件不成立；

故选：B．

4．（5 分）若平面向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是180°，且$|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则$\vec{b}=($　　$)$

A．$(-3,6)$　　B．$(3,-6)$　　C．$(6,-3)$　　D．$(-6,3)$

【解答】解$\because$向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是180°，

$\therefore$向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}$反向，

令$\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda,-2\lambda)$（则$\lambda<0)$，

又$\because|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，

$\therefore\sqrt{\lambda^{2}+(-2\lambda)^{2}}=3\sqrt{5}$

解得$\lambda=-3$

故$\vec{b}=(-3,6)$

故选：A．

5．（5 分）设P是双曲线$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{9}=1$上一点，该双曲线的一条渐近线方程是$3x+4y=0$，$F_{1}$，$F_{2}$分别是双曲线的左、右焦点，若$|PF_{1}|=10$，则$|PF_{2}|$等于$($　　$)$

A．2　　B．18　　C．2 或 18　　D．16

【解答】解：整理准线方程得$y=-\dfrac{3}{4}x$，

$\therefore\dfrac{3}{a}=\dfrac{3}{4}$，$a=4$，

$\therefore|PF_{1}|-|PF_{2}|=2a=8$或$|PF_{2}|-|PF_{1}|=2a=8$

$\therefore|PF_{2}|=2$或 18，

故选：C．

6．（5 分）若函数$f(x)=\log_{a}x(0<a<1)$在区间$[a$，$2a]$上的最大值是最小值的 3 倍，则a等于$($　　$)$

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

【解答】解：$\because 0<a<1$，

$\therefore f(x)=\log_{a}x$是减函数．

$\therefore\log_{a}a=3\bullet\log_{a}2a$．

$\therefore \log_a 2a=\frac{1}{3}$.

$\therefore 1+\log_a 2=\frac{1}{3}$.

$\therefore \log_a 2=-\frac{2}{3}$.

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选：A.

7.（5 分）若过定点 $M(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线与圆 $x^2+y^2+4x-5=0$ 在第一象限内的部分有交点，则 k 的取值范围是(　　)

A．$0<k<\sqrt{5}$　　B．$-\sqrt{5}<k<0$　　C．$0<k<\sqrt{13}$　　D．$0<k<5$

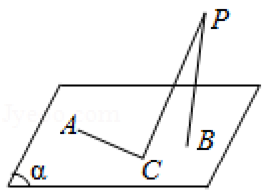
【解答】解：圆的方程可变形为 $(x+2)^2+y^2=3^2$，圆心 $(-2,0)$，半径等于 3，令 $x=0$，则 $y=\pm\sqrt{5}$.

设 $A(0,\sqrt{5})$，$k_{MA}=\sqrt{5}$.

又$\because$直线过第一象限且过 $(-1,0)$ 点，$\therefore k>0$．又直线与圆在第一象限内有相交点，

$\therefore k<\frac{\sqrt{5}-0}{0+1}=\sqrt{5}$，$\therefore 0<k<\sqrt{5}$，故选 A.

8.（5 分）如图，定点 A 和 B 都在平面 α 内，定点 $P\notin\alpha$，$PB\perp\alpha$，C 是 α 内异于 A 和 B 的动点，且 $PC\perp AC$．那么，动点 C 在平面 α 内的轨迹是(　　)



A．一条线段，但要去掉两个点　　B．一个圆，但要去掉两个点

C．一个椭圆，但要去掉两个点　　D．半圆，但要去掉两个点

【解答】解：$\because PB\perp\alpha$

$\therefore PB\perp AC$

又$\because PC\perp AC$

$\therefore AC\perp$面 PBC

$\therefore BC\perp AC$

$\therefore$动点 C 在平面 α 内的轨迹是以 AB 为直径的一个圆，但要去掉 A、B 两个点

故选：B．

9．（5 分）函数 $y=3^{x+1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是$($　　$)$

A．$y=1+\log_3 x(x>0)$　　　　B．$y=-1+\log_3 x(x>0)$

C．$y=1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$　　　　D．$y=-1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

【解答】解：由 $y=3^{x+1}$ 解得：$x=-1+\log_3 x$

$\because -1\leqslant x<0$，$\therefore 1\leqslant y<3$

$\therefore$ 函数 $y=3^{x+1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 $y=-1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

故选：D．

10．（5 分）函数 $y=2\sin(\dfrac{\pi}{6}-2x)$，$x\in[0$，$\pi])$ 为增函数的区间是$($　　$)$

A．$[0$，$\dfrac{\pi}{3}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi]$　　C．$[\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{6}\pi]$　　D．$[\dfrac{5}{6}\pi$，$\pi]$

【解答】解：由 $y=2\sin(\dfrac{\pi}{6}-2x)=-2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 其增区间可由 $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的减区间得到，

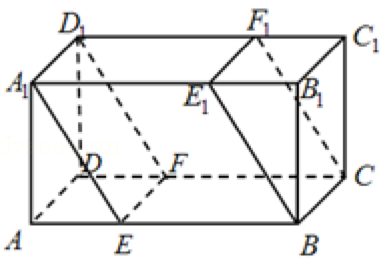
即 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$，$k\in Z$

$\therefore k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5}{6}\pi$，$k\in Z$．

令 $k=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{6}\pi$，

故选：C．

11．（5 分）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=6$，$AD=4$，$AA_1=3$，分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分，其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$，$V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$．若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$，则截面 A_1EFD_1 的面积为$($　　$)$



A．$4\sqrt{10}$　　B．$8\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{13}$　　D．16

【解答】解：由题意知，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，平面$A_1D_1EF//$平面$B_1C_1E_1F_1$，

$\therefore$截面是一个矩形，并且长方体的体积$V=6\times4\times3=72$，

$\because V_1:V_2:V_3=1:4:1$，$\therefore V_1=V_{AEA_1-DFD_1}=\dfrac{1}{6}\times72=12$，

则$12=\dfrac{1}{2}\times AE\times A_1A\times AD$，解得$AE=2$，

在直角ΔAEA_1中，$EA_1=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

故截面的面积是$EF\times EA_1=4\sqrt{13}$，

故选：C．

12．（5分）定义在R上的函数$f(x)$既是偶函数又是周期函数．若$f(x)$的最小正周期是π，且当$x\in[0$，$\dfrac{\pi}{2}]$时，$f(x)=\sin x$，则$f(\dfrac{5\pi}{3})$的值为(　　)

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：$\because f(x)$的最小正周期是π

$\therefore f(\dfrac{5\pi}{3})=f(\dfrac{5\pi}{3}-2\pi)=f(-\dfrac{\pi}{3})$

$\because$函数$f(x)$是偶函数

$\therefore f(\dfrac{5\pi}{3})=f(\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：D．

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13．（4分）某工厂生产A、B、C三种不同型号的产品，产品数量之比依次为$2:3:5$，现用分层抽样方法抽出一个容量为n的样本，样本中A种型号产品有16件．那么此样本的容量$n=$__80__．

【解答】解：$n\times\dfrac{2}{2+3+5}=16$

$\therefore n=80$

故答案是80

14．（4分）已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,-3)$，若$k\vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则实数k等于__-1__．

【解答】解：$\because$向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,-3)$，若$k\vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，

$\therefore(k\vec{a}-2\vec{b})\bullet\vec{a}=0$，即：$(k-4$，$k+6)\bullet(1$，$1)=0$，

$\therefore k-4+k+6=0$，$\therefore k=-1$．

15．（4 分）如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点，那么实数 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,-\frac{13}{4})}$．

【解答】解：过 A、B 两点的直线为：$x+y=a$ 与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 联立得：$x^2-x-a-3=0$．

因为直线与抛物线没有交点，则方程无解．

即$\triangle=1+4(a+3)<0$，

解之得 $a<-\frac{13}{4}$．

故答案为：$(-\infty,-\frac{13}{4})$

16．（4 分）从 0，1，2，3，4，5 中任取 3 个数字，组成没有重复数字的三位数，其中能被 5 整除的三位数共有 $\underline{\quad 36\quad}$ 个．（用数字作答）

【解答】解：其中能被 5 整除的三位数末位必为 0 或 5．

①末位为 0 的三位数其首次两位从 $1\sim 5$ 的 5 个数中任取 2 个排列而成方法数为 $A_5^2=20$，

②末位为 5 的三位数，首位从非 0，5 的 4 个数中选 1 个，有 C_4^1 种挑法，再挑十位，还有 C_4^1 种挑法，

$\therefore$ 合要求的数有 $C_4^1 \cdot C_4^1=16$ 种．

$\therefore$ 共有 $20+16=36$ 个合要求的数．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值．

【解答】解：（Ⅰ）解：$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$，

由 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$，有 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$；

（Ⅱ）解法一：$\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}$

$=\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$．

解法二：由（1），$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，得 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}\cos\alpha$

$\therefore\ \sin^2\alpha=\frac{1}{9}\cos^2\alpha 1-\cos^2\alpha=\frac{1}{9}\cos^2\alpha$， $\therefore\ \cos^2\alpha=\frac{9}{10}$

于是 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$，

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{3}\cos^2\alpha=-\frac{3}{5}$

代入得 $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{9}{10}}{1+\frac{4}{5}}=-\frac{5}{6}$.

18.（12 分）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛.

（1）求所选 3 人都是男生的概率；

（2）求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率；

（3）求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率.

【解答】解：（1）由题意知本题是一个古典概型，

$\because$ 试验所包含的所有事件是从 6 人中选 3 人共有 C_6^3 种结果，

而满足条件的事件是所选 3 人都是男生有 C_4^3 种结果，

$\therefore$ 根据古典概型公式得到

所选 3 人都是男生的概率为 $\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$

（2）由题意知本题是一个古典概型，

$\because$ 试验所包含的所有事件是从 6 人中选 3 人共有 C_6^3 种结果，

而满足条件的事件是所选 3 人中恰有 1 名女生有 $C_2^1C_4^2$ 种结果，

$\therefore$ 根据古典概型公式得到

所选 3 人中恰有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$

（3）由题意知本题是一个古典概型，

$\because$ 试验所包含的所有事件是从 6 人中选 3 人共有 C_6^3 种结果，

而满足条件的事件是所选 3 人中至少 1 名女生有 $C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1$ 种结果，

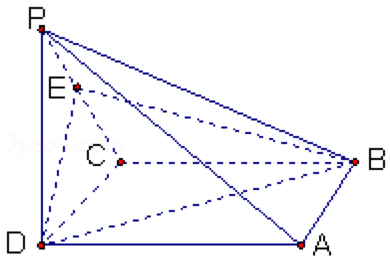
$\therefore$ 根据古典概型公式得到

所选 3 人中至少有 1 名女生的概率为$\dfrac{C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\dfrac{4}{5}$

19．（12 分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧棱$PD\perp$底面$ABCD$，$PD=DC$，E是PC的中点．

（1）证明$PA//$平面EDB；

（2）求EB与底面$ABCD$所成的角的正切值．



【解答】（1）证明：连接AC、AC交BD于O．连接EO

$\because$底面$ABCD$是正方形$\therefore$点O是AC的中点．

在ΔPAC中，EO是中位线$\therefore PA//EO$

而$EO\subset$平面EDB且$PA\not\subset$平面EDB，所以，$PA//$平面EDB．

（2）解：作$EF\perp DC$交CD于F．连接BF，设正方形$ABCD$的边长为a．

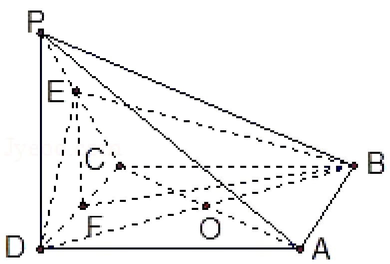
$\because PD\perp$底面$ABCD\therefore PD\perp DC\therefore EF//PD$，$F$为$DC$的中点

$\therefore EF\perp$底面$ABCD$，BF为BE在底面$ABCD$内的射影，故$\angle EBF$为直线EB与底面$ABCD$所成的角．

在RtΔBCF中，$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{a^2+(\dfrac{a}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$

$\because EF=\dfrac{1}{2}PD=\dfrac{a}{2}$ $\therefore$在RtΔEFB中$\tan EBF=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

所以EB与底面$ABCD$所成的角的正切值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



20．（12 分）设$\{a_n\}$是一个公差为$d(d\neq 0)$的等差数列，它的前 10 项和$S_{10}=110$且a_1，a_2，a_4成等比数列．

（1）证明 $a_1=d$；

（2）求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

【解答】（1）证明：因 a_1， a_2， a_4 成等比数列，故 $a_2^2=a_1a_4$

而 $\{a_n\}$ 是等差数列，有 $a_2=a_1+d$ ， $a_4=a_1+3d$

于是 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$

即 $a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d$

化简得 $a_1=d$

（2）解：由条件 $S_{10}=110$ 和 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d$ ，得到 $10a_1+45d=110$

由（1）， $a_1=d$ ，代入上式得 $55d=110$

故 $d=2$ ， $a_n=a_1+(n-1)d=2n$

因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$

21．（12 分）已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d(a\neq 0)$ 是 R 上的奇函数，当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2 ．

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极大值；

（2）证明对任意 x_1， $x_2\in(-1,1)$ ，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立．

【解答】解：（1）由奇函数的定义，应有 $f(-x)=-f(x)$ ， $x\in R$

即 $-ax^3-cx+d=-ax^3-cx-d\therefore d=0$

因此， $f(x)=ax^3+cxf'(x)=3ax^2+c$

由条件 f （1） $=-2$ 为 $f(x)$ 的极值，必有 f' （1） $=0$ ，故 $\begin{cases}a+c=-2\\3a+c=0\end{cases}$

解得 $a=1$， $c=-3$

因此， $f(x)=x^3-3x$ ， $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)f'(-1)=f'$ （1） $=0$

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时， $f'(x)>0$ ，故 $f(x)$ 在单调区间 $(-\infty,-1)$ 上是增函数

当 $x\in(-1,1)$ 时， $f'(x)<0$ ，故 $f(x)$ 在单调区间 $(-1,1)$ 上是减函数

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在单调区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数

所以，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，极大值为 $f(-1)=2$

（2）由（1）知，$f(x)=x^3-3x(x\in[-1,1])$ 是减函数，

且 $f(x)$ 在 $[-1$，$1]$ 上的最大值 $M=f(-1)=2$，$f(x)$ 在 $[-1$，$1]$ 上的最小值 $m=f$（1）$=-2$

所以，对任意的 x_1，$x_2\in(-1,1)$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<M-m=2-(-2)=4$

22．（14 分）椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c$，$0)(c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF|=2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点．

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

（3）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M，证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$．

【解答】（1）解：由题意，可设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$．

由已知得 $\begin{cases}a^2-c^2=2\\ c=2(\dfrac{a^2}{c}-c).\end{cases}$

解得 $a=\sqrt{6},\ c=2$

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）解：由（1）可得 $A(3,0)$．

设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-3)$．由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$

得 $(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$

依题意 $\triangle=12(2-3k^2)>0$，得 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

设 $P(x_1$，$y_1)$，$Q(x_2$，$y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{18k^2}{3k^2+1}$，①

$x_1x_2=\dfrac{27k^2-6}{3k^2+1}$．②

由直线 PQ 的方程得 $y_1=k(x_1-3)$， $y_2=k(x_2-3)$．于是 $y_1y_2=k^2(x_1-3)(x_2-3)=k^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$．③

$\because \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$， $\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$．④

由①②③④得 $5k^2=1$，从而 $k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\in(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3})$．

所以直线 PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$

（3）证明：$\overrightarrow{AP}=(x_1-3,\ y_1)$, $\overrightarrow{AQ}=(x_2-3,\ y_2)$．

由已知得方程组 $\begin{cases} x_1-3=\lambda(x_2-3) \\ y_1=\lambda y_2 \\ \dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{2}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{2}=1. \end{cases}$

注意 $\lambda>1$，解得 $x_2=\dfrac{5\lambda-1}{2\lambda}$

因 $F(2,0)$， $M(x_1,\ -y_1)$，故 $\overrightarrow{FM}=(x_1-2,\ -y_1)=(\lambda(x_2-3)+1,\ -y_1)=(\dfrac{1-\lambda}{2},\ -y_1)=-\lambda(\dfrac{\lambda-1}{2\lambda},\ y_2)$．

而 $\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,\ y_2)=(\dfrac{\lambda-1}{2\lambda},\ y_2)$，所以 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$．