

## 1990 年宁夏高考理科数学真题及答案

一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

1. (4 分) 方程  $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$  的解是 ( )

- A.  $x = \frac{1}{9}$       B.  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $x = \sqrt{3}$       D.  $x = 9$

2. (4 分) 把复数  $1+i$  对应的向量按顺时针方向旋转  $\frac{2\pi}{3}$  所得到的向量对应的复数是 ( )

- A.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i}{2}$       B.  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i}{2}$       C.  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-i}{2}$       D.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i}{2}$

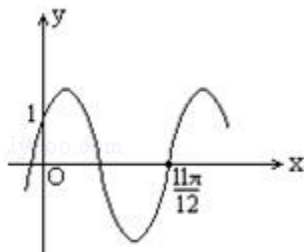
3. (4 分) 如果底面直径和高相等的圆柱的侧面积是  $S$ ，那么圆柱的体积等于 ( )

- A.  $\frac{S\sqrt{S}}{2}$       B.  $\frac{S\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}$       C.  $\frac{S\sqrt{S}}{4}$       D.  $\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}$

4. (4 分) 方程  $\sin 2x = \sin x$  在区间  $(0, 2\pi)$  内的解的个数是 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

5. (4 分) 已知如图是函数  $y = 2\sin(\omega x + \phi)$  ( $|\phi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象，那么 ( )



- A.  $\omega = \frac{10}{11}, \phi = \frac{\pi}{6}$       B.  $\omega = \frac{10}{11}, \phi = -\frac{\pi}{6}$       C.  $\omega = 2, \phi = \frac{\pi}{6}$       D.  $\omega = 2, \phi = -\frac{\pi}{6}$

6. (4 分) 函数  $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{\cos x}{|\cos x|} + \frac{|\tan x|}{\tan x} + \frac{\cot x}{|\cot x|}$  的值域是 ( )

- A.  $\{-2, 4\}$       B.  $\{-2, 0, 4\}$       C.  $\{-2, 0, 2, 4\}$       D.  $\{-4, -2, 0, 4\}$

7. (4 分) 如果直线  $y = ax + 2$  与直线  $y = 3x - b$  关于直线  $y = x$  对称，那么 ( )

- A.  $a = \frac{1}{3}, b = 6$       B.  $a = \frac{1}{3}, b = -6$       C.  $a = 3, b = -2$       D.  $a = 3, b = 6$

8. (4 分) 极坐标方程  $4\sin \theta = 5\rho$  表示的曲线是 ( )

- A. 圆                      B. 椭圆                      C. 双曲线的一支      D. 抛物线

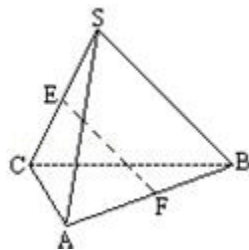
9. (4分) 设全集  $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , 集合  $M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$ . 那么  $\overline{M \cup N}$  等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\{(2, 3)\}$       C.  $(2, 3)$                       D.  $\{(x, y) \mid y = x+1\}$

10. (4分) (2010·建德市模拟) 若实数  $x, y$  满足  $(x+2)^2 + y^2 = 3$ , 则  $\frac{y}{x}$  的最大值为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $-\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. (4分) 如图, 正三棱锥  $SABC$  的侧棱与底面边长相等, 如果  $E, F$  分别为  $SC, AB$  的中点, 那么异面直线  $EF$  与  $SA$  所成的角等于 ( )



- A.  $90^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $30^\circ$

12. (4分) 已知  $h > 0$ . 设命题甲为: 两个实数  $a, b$  满足  $|a - b| < 2h$ ; 命题乙为: 两个实数  $a, b$  满足  $|a - 1| < h$  且  $|b - 1| < h$ . 那么 ( )

- A. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件  
 B. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件  
 C. 甲是乙的充分条件  
 D. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

13. (4分)  $A, B, C, D, E$  五人并排站成一排, 如果  $B$  必须站在  $A$  的右边 ( $A, B$  可以不相邻), 那么不同的排法共有 ( )

- A. 24 种                      B. 60 种                      C. 90 种                      D. 120 种

14. (4分) 以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有 ( )

- A. 70 个                      B. 64 个                      C. 58 个                      D. 52 个

15. (4分) 设函数  $y = \arctg x$  的图象沿  $x$  轴正方向平移 2 个单位所得到的图象为  $C$ . 又设图象  $C'$  与  $C$  关于原点对称, 那么  $C'$  所对应的函数是 ( )

- A.  $y = -\arctg(x - 2)$       B.  $y = \arctg(x - 2)$       C.  $y = -\arctg(x + 2)$       D.  $y = \arctg(x + 2)$

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

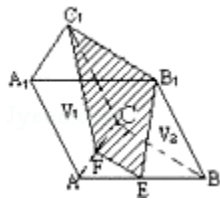
16. (5分) 双曲线  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  的准线方程是\_\_\_\_\_.

17. (5分)  $(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + (x-1)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数等于\_\_\_\_\_.

18. (5分) (2011·上海模拟) 已知  $\{a_n\}$  是公差非零的等差数列, 如果  $s_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{s_n}$  等于\_\_\_\_\_.

19. (5分) 函数  $y = \sin x \cos x + \sin x + \cos x$  的最大值是\_\_\_\_\_.

20. (5分) 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 若  $E$ 、 $F$  分别为  $AB$ 、 $AC$  的中点, 平面  $EB_1C_1F$  将三棱柱分成体积为  $V_1$ 、 $V_2$  的两部分, 那么  $V_1 : V_2 =$ \_\_\_\_\_.

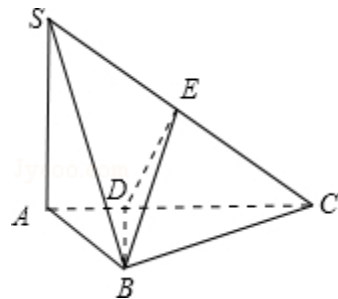


### 三、解答题 (共6小题, 满分65分)

21. (10分) 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是16, 第二个数与第三个数的和是12, 求这四个数.

22. (10分) 已知  $\sin a + \sin b = \frac{1}{4}$ ,  $\cos a + \cos b = \frac{1}{3}$ , 求  $\tan(a+b)$  的值.

23. (10分) 如图, 在三棱锥  $SABC$  中,  $SA \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ .  $DE$  垂直平分  $SC$ , 且分别交  $AC$ 、 $SC$  于  $D$ 、 $E$ . 又  $SA=AB$ ,  $SB=BC$ . 求以  $BD$  为棱, 以  $BDE$  与  $BDC$  为面的二面角的度数.



24. (11分) 设  $a$  为实数, 在复数集  $C$  中解方程:  $z^2 + 2|z| = a$ .

25. (12分) 设椭圆的中心是坐标原点, 长轴在  $x$  轴上, 离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 已知点  $P(0, \frac{3}{2})$  到这个椭圆上的点最远距离是  $\sqrt{7}$ . 求这个椭圆的方程, 并求椭圆上到点  $P$  的距离等于  $\sqrt{7}$  的点的坐标.

26. (12分)  $f(x) = \lg \frac{1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x}{n}$ , 其中  $a$  是实数,  $n$  是任意自然数且  $n$

$\geq 2$ .

(I) 如果  $f(x)$  当  $x \in (-\infty, 1]$  时有意义, 求  $a$  的取值范围;

(II) 如果  $a \in (0, 1]$ , 证明  $2f(x) < f(2x)$  当  $x \neq 0$  时成立.

### 参考答案

一、选择题 (共 15 小题, 每小题 4 分, 满分 60 分)

1.

考点: 对数的运算性质; 指数式与对数式的互化.

分析: 根据指数式与对数式的互化可知,  $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{4} = \log_3 x = -2$ , 进而得到答案.

解答: 解:  $\because 2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$

$$\therefore \log_2 \frac{1}{4} = \log_3 x = -2$$

$$\therefore x = \frac{1}{9}$$

故选 A.

点评: 本题主要考查指数式与对数式的相互转化.

2.

考点: 复数代数形式的混合运算.

分析: 把复数  $1+i$  乘以  $\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})$ , 化简为代数形式即可.

解答: 解: 复数  $1+i$  对应的向量按顺时针方向旋转  $\frac{2\pi}{3}$  所得到的

$$\text{向量: } (1+i) [\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})] = (1+i) (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i,$$

故选 D.

点评: 复数旋转, 实际上复数乘以一个模为 1 的辐角为  $-\frac{2\pi}{3}$  复数三角形式, 注意旋转方向,

本题是基础题.

3.

考点: 旋转体 (圆柱、圆锥、圆台).

专题：计算题.

分析：设圆柱高为  $h$ ，推出底面半径，求出圆柱的侧面积，然后求出圆柱的体积即可得到选项.

解答：解：设圆柱高为  $h$ ，则底面半径为  $\frac{h}{2}$ .

由题意知， $S = \pi h^2$ ,

$$\therefore h = \sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$\therefore V = \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

故选 D.

点评：本题是基础题，考查圆柱的侧面积、体积的计算及其关系，考查计算能力，常考题型.

4.

考点：正弦函数的图象；函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象变换.

专题：计算题.

分析：通过二倍角公式化简的  $2 \sin x \cos x = \sin x$ ，进而推断  $\sin x = 0$  或  $\cos x = \frac{1}{2}$ ，进而求出  $x$  的值.

解答：解： $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \sin x$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 或 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x \in (0, 2\pi)$$

$$\therefore x = \pi \text{ 或 } \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

故选 C

点评：本题主要考查了三角函数的二倍角公式. 属基础题.

5.

考点：由  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的部分图象确定其解析式.

专题：计算题；数形结合法.

分析：由图象过  $(0, 1)$  及  $|\phi| < \frac{\pi}{2}$ ，求出  $\phi$  的值，函数图象过点  $(\frac{11\pi}{12}, 0)$ ，据五点法作图的过程知

$$\omega \cdot \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = 2\pi, \text{ 求出 } \omega.$$

解答：解：因为函数图象过  $(0, 1)$ ，所以， $1 = 2 \sin \phi$ ， $\therefore \sin \phi = \frac{1}{2}$ ， $\because |\phi| < \frac{\pi}{2}$ ，

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故函数 } y = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}), \text{ 又 } \because \text{函数图象过点 } (\frac{11\pi}{12}, 0),$$

$$\therefore 0 = 2 \sin(\omega \cdot \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{6}), \text{ 由五点法作图的过程知, } \omega \cdot \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = 2\pi,$$

$$\therefore \omega = 2, \text{ 综上, } \phi = \frac{\pi}{6}, \omega = 2,$$

故选 C.

点评：本题考查五点法作图的方法，在本题图中的一个完整的标准周期内，图象上的五个关键点的横坐标

分别为：0,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $2\pi$ .

6.

考点：函数的值域；三角函数的化简求值.

专题：计算题；分类讨论.

分析：根据正切和余切的定义求出函数的定义域，分四种情况由三角函数值的符号，去掉绝对值求解.

解答：解：由题意知，函数的定义域是  $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ，下由各个象限中三角函数值的符号来确定

在各个象限中函数的值

当  $x$  是第一象限角时，因所有三角函数值大于零，故  $y=4$ ；

当  $x$  是第二象限角时，因为只有正弦值大于零，故  $y=1-1-1-1=-2$ ；

当  $x$  是第三象限角时，因为正切值和余切值大于零，故  $y=-1-1+1+1=0$ ；

当  $x$  是第四象限角时，因为只有余弦值大于零，故  $y=-2$ ；

所以函数的值域是  $\{-2, 0, 4\}$ .

故选 B.

点评：本题主要考查了三角函数的定义以及符号，根据定义求出函数的定义域，由三角函数值的符号进行化简求值.

7.

考点：反函数.

分析：本题考查对互为反函数的两个函数图象之间的关系、反函数的求法等相关知识；

本题可有两种方法，其一，求出  $y=ax+2$  的反函数令其与  $y=3x-b$  的对应系数相等获得，

其二由互为反函数图象上的点之间的对称关系，通过在图象上取特殊点求解.

解答：解：

法一：由题意，函数  $y=3x-b$  的反函数为  $y=\frac{1}{3}x+\frac{b}{3}$ ，

与  $y=ax+2$  对照可得  $a=\frac{1}{3}$ ,  $b=6$ ；

法二：在  $y=ax+2$  上取点  $(0, 2)$ ，

则点  $(2, 0)$  在  $y=3x-b$  上，故得  $b=6$ ；

又  $y=3x-6$  上有点  $(0, -6)$ ，则点  $(-6, 0)$  在  $y=ax+2$  上，代入得  $a=\frac{1}{3}$ ，

由此可得  $a=\frac{1}{3}$ ,  $b=6$

答案： $a=\frac{1}{3}$ ,  $b=6$

点评：本题解题思路清晰，方向明确，运算量也小，属于容易题目。这里提供了两种方法，比较可见各有特点，直接求反函数过程简捷，较为简单，特值代入，小巧易行，过程稍繁。

8.

考点：简单曲线的极坐标方程.

分析：先在极坐标方程  $4\sin\theta=5\rho$  的两边同乘以  $\rho$ ，再利用直角坐标与极坐标间的关系，即利用

$\rho\cos\theta=x$ ,  $\rho\sin\theta=y$ ,  $\rho^2=x^2+y^2$ ，进行代换即得直角坐标系，再利用直角坐标方程即可进行判断.

解答：解：将方程  $4\sin\theta = 5\rho$  两边都乘以  $\rho$  得： $4\rho\sin\theta = 5\rho^2$ ,

化成直角坐标方程为

$5x^2 + 5y^2 - 4y = 0$ . 它表示一个圆.

故选 A.

点评：本题考查点的极坐标和直角坐标的互化，能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化.

9.

考点：交、并、补集的混合运算.

分析：先化简集合 M，再计算  $\overline{M} \cup \overline{N}$ .

解答：解： $\because M = \{ (x, y) \mid y = x + 1 \text{ 或 } (x, y) \neq (2, 3) \}$ ,  
 $\therefore \overline{M} = \{ (x, y) \mid y \neq x + 1 \text{ 或 } (x, y) = (2, 3) \}$ ,  
又： $\overline{N} = \{ (x, y) \mid y = x + 1 \}$ .  
 $\therefore \overline{M} \cup \overline{N} = \{ (2, 3) \}$ .

故答案选 B.

点评：本题主要考查了集合间的交，并，补混合运算，注意弄清各集合中的元素.

10.

考点：简单线性规划.

专题：计算题.

分析：先判断出方程表示的图形，再给  $\frac{y}{x}$  赋与几何意义，作出图象，结合图判断出当直线与圆相切时斜率最大求出最大值.

解答：解： $(x+2)^2 + y^2 = 3$ ，表示以  $(-2, 0)$  为圆心，以  $\sqrt{3}$  为半径的圆

$\frac{y}{x}$  表示圆上的点与  $(0, 0)$  连线的斜率，设为  $k$  则  $y = kx$

由图知，当过原点的直线与圆相切时斜率最大

故有  $\sqrt{3} = \frac{|-2k - 0|}{\sqrt{1+k^2}}$  解得  $k = \sqrt{3}$  或  $k = -\sqrt{3}$

由图知， $k = \sqrt{3}$

故选 A



点评：本题考查圆的标准方程、两点连线斜率公式的形式、数形结合求最值.

11.

考点：异面直线及其所成的角.

专题：计算题；压轴题.

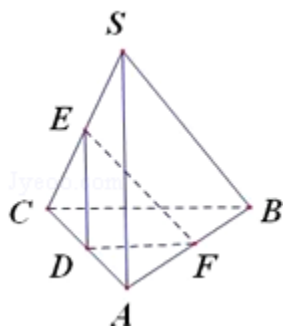
分析：先通过平移将两条异面直线平移到同一个起点 AC 的中点 D，得到的锐角或直角就是异面直线所成的角，再利用余弦定理求出此角即可.

解答：解：如图，取 AC 的中点 D，连接 DE、DF， $\angle DEF$  为异面直线 EF 与 SA 所成的角

设棱长为 2，则  $DE=1$ ， $DF=1$ ，根据  $SA \perp BC$ ，则  $ED \perp DF$

$\therefore \angle DEF=45^\circ$ ，

故选 C.



点评：本小题主要考查异面直线所成的角，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

12.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断.

分析：巧妙运用绝对值不等式  $|a|+|b| \geq |a+b|$  及必要、充分条件，可以解答本题.

解答：解：由  $|a-1| < h$  且  $|b-1| < h$  得  $|a-b| = |a-1+1-b| \leq |a-1|+|1-b| < 2h$ ，所以甲是乙的必要条件；

不妨令  $h=1$ ， $a=0.5$ ， $b=-0.3$ ， $|a-1|=0.5 < 1$ ，而  $|b-1|=1.3 > 1$ ，因而甲不是乙的充分条件.

故选 B

点评： $|a|+|b| \geq |a+b|$  的合理运用，以及巧妙运用  $|a-1|+|1-b|$  的使用，是解答甲是乙的必要条件的一个关键；充分条件的推导用的是特殊值否定法.

13.

考点：排列、组合的实际应用.

专题：转化思想.

分析：根据题意，首先计算五人并排站成一排的情况数目，进而分析可得，B 站在 A 的左边与 B 站在 A 的右边是等可能的，使用倍分法，计算可得答案.

解答：解：根据题意，使用倍分法，

五人并排站成一排，有  $A_5^5$  种情况，

而其中 B 站在 A 的左边与 B 站在 A 的右边是等可能的，

则其情况数目是相等的，

则 B 站在 A 的右边的情况数目为  $\frac{1}{2} \times A_5^5 = 60$ ，

故选 B.

点评：本题考查排列、组合的应用，注意使用倍分法时，注意必须保证其各种情况是等可能的.

14.

考点：棱锥的结构特征.

专题：压轴题；分类讨论.

分析：以一个正方体的顶点为顶点中任意选 4 个除去在同一个平面上的点，可得四面体的个数.

解答：解：正方体的 8 个顶点中任取 4 个共有  $C_8^4=70$  个

不能组成四面体的 4 个顶点有，已有的 6 个面，对角面有 6 个

所以以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有： $70 - 12=58$  个

故选 C.

点评：本题考查棱锥的结构特征，考查逻辑思维能力，是中档题.

15.

考点：函数的图象与图象变化.

专题：压轴题.

分析：根据平移变换和对称变换引起的解析式变化规律依次求出 C、C' 对应的解析式即可.

解答：解：将函数  $y=\arctg x$  的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位所得到的图象为 C

则 C 对应的解析式为  $y=\arctg (x - 2)$

又  $\because$  图象 C' 与 C 关于原点对称

则 C' 对应的解析式为  $y= - \arctg ( - x - 2) =\arctg (x+2)$

故选 D

点评：平移变换的口诀是“左加右减，上加下减”

对称变换的口诀是“关于 Y 轴负里面，关于 X 轴负外面，关于原点，既负里面，又负外面”

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

16.

考点：双曲线的简单性质.

专题：计算题.

分析：由焦点在 y 轴的双曲线的准线方程公式  $y=\pm \frac{a^2}{c}$  进行求解.

解答：解： $\because a=4, b=3,$

则  $c=5,$

双曲线  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9}=1$  的准线方程是  $y=\pm \frac{16}{5},$

故答案是  $y=\pm \frac{16}{5}.$

点评：本题比较简单，解题时要注意双曲线的焦点在 y 轴上.

17.

考点：二项式定理的应用.

专题：计算题.

分析：多项式展开式的含  $x^2$  项的系数等于各个二项式展开式的系数和，利用二项展开式的通项公式求出各个系数.

解答：解：展开式中含  $x^2$  项的系数为  $-1 - C_3^2 - C_4^2 - C_5^2$

$= -1 - 3 - 6 - 10= -20$

故答案为 - 20

点评：本题考查等价转化能力及二项展开式的通项公式的应用.

18.

考点：等差数列的性质；极限及其运算；等差数列的前  $n$  项和.

分析：

设  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ,  $s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ , 代入  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{s_n}$  求出极限即可.

解答：解：设  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ,  $s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ , 代入得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_1 + n(n-1)d}{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1}{n-1} + d}{\frac{a_1}{n-1} + \frac{d}{2}} = 2$$

故答案为 2

点评：考查学生运用等差数列性质的能力，运用等差数列求和公式的能力，会求极限及运算极限的能力.

19.

考点：三角函数的最值.

专题：计算题；压轴题.

分析：利用  $\sin x$  与  $\cos x$  的平方关系，令  $\sin x + \cos x = t$ ，通过换元，将三角函数转化为二次函数，求出对称轴，利用二次函数的单调性求出最值.

解答：解：令  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$  则  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\therefore \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)^2 - 1 \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

对称轴  $t = -1$

$$\therefore \text{当 } t = \sqrt{2} \text{ 时, } y \text{ 有最大值 } \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

故答案为  $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

点评：本题考查三角函数中利用平方关系  $\sin x + \cos x$  与  $2\sin x \cos x$  两者是可以相互转化的、二次函数的最值的求法.

20.

考点：棱柱、棱锥、棱台的体积.

专题：计算题；压轴题.

分析：设 AEF 面积为  $s_1$ , ABC 和  $A_1B_1C_1$  的面积为  $s$ , 三棱柱高位  $h$ ;  $V_{AEF-A_1B_1C_1} = V_1$ ;  $V_{BCFE-B_1C_1} = V_2$ ; 总体积为:  $V$ , 根据棱台体积公式求  $V_1$ ;  $V_2 = V - V_1$  以及面积关系, 求出体积之比.

解答：解：由题：设 AEF 面积为  $s_1$ , ABC 和  $A_1B_1C_1$  的面积为  $s$ , 三棱柱高位  $h$ ;  $V_{AEF-A_1B_1C_1} = V_1$ ;

$V_{BCFE - B1C1} = V_2$ ; 总体积为:  $V$

计算体积:

$$V_1 = \frac{1}{3}h (s_1 + s + \sqrt{s_1 s}) \quad \text{①}$$

$$V = sh \quad \text{②}$$

$$V_2 = V - V_1 \quad \text{③}$$

由题意可知,  $s_1 = \frac{S}{4}$  ④

根据①②③④解方程可得:  $V_1 = \frac{7}{12}sh$ ,  $V_2 = \frac{5}{12}sh$ ; 则  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

故答案为:  $\frac{7}{5}$

点评: 本题考查棱柱、棱锥、棱台的体积, 考查计算能力, 转化思想, 考查空间想象能力, 是基础题.

### 三、解答题 (共 6 小题, 满分 65 分)

21.

考点: 数列的应用.

专题: 计算题.

分析: 设四个数依次为  $x, y, 12 - y, 16 - x$ . 根据等差数列和等比数列的性质知

$$\begin{cases} x + (12 - y) = 2y, & \text{①} \\ y(16 - x) = (12 - y)^2, & \text{②} \end{cases}, \text{ 由此能求出这四个数.}$$

解答: 解: 设四个数依次为  $x, y, 12 - y, 16 - x$ .

依题意, 有

$$\begin{cases} x + (12 - y) = 2y, & \text{①} \\ y(16 - x) = (12 - y)^2, & \text{②} \end{cases}$$

由①式得  $x = 3y - 12$ . ③

将③式代入②式得  $y(16 - 3y + 12) = (12 - y)^2$ ,

整理得  $y^2 - 13y + 36 = 0$ .

解得  $y_1 = 4, y_2 = 9$ .

代入③式得  $x_1 = 0, x_2 = 15$ .

从而得所求四个数为  $0, 4, 8, 16$  或  $15, 9, 3, 1$ .

点评: 本题考查数列的性质和应用, 解题时要注意公式的合理运用.

22.

考点: 两角和与差的正弦函数; 同角三角函数基本关系的运用.

分析: 和差化积, 两已知等式出现相同的因式, 两式相除, 约分得  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  角的正切, 用二倍角公式代入

即求的结果, 注意二倍角公式的符号.

解答: 解法一: 由已知得

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3},$$

$$\text{两式相除得 } \tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{2 \tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$= \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

点评：数学课本中常见的三角函数恒等式的变换，既是重点，又是难点。其主要难于三角公式多，难记忆，角度变化、函数名称变化，运算符号复杂、难掌握，解题时抓住题目本质，熟记公式，才不会出错。

23.

考点：平面与平面之间的位置关系。

专题：计算题。

分析：欲证  $BD \perp DE$ ， $BD \perp DC$ ，先证  $BD \perp$  面  $SAC$ ，从而得到  $\angle EDC$  是所求的二面角的平面角，利用  $Rt\triangle SAC$  与  $Rt\triangle EDC$  相似求出  $\angle EDC$  即可。

解答：解：由于  $SB=BC$ ，且  $E$  是  $SC$  的中点，因此  $BE$  是等腰三角形  $SBC$  的底边  $SC$  的中线，所以  $SC \perp BE$ 。

又已知  $SC \perp DE$ ， $BE \cap DE=E$ ，

$\therefore SC \perp$  面  $BDE$ ，

$\therefore SC \perp BD$ 。

又  $\because SA \perp$  底面  $ABC$ ， $BD$  在底面  $ABC$  上，

$\therefore SA \perp BD$ 。

而  $SC \cap SA=S$ ， $\therefore BD \perp$  面  $SAC$ 。

$\because DE=$  面  $SAC \cap$  面  $BDE$ ， $DC=$  面  $SAC \cap$  面  $BDC$ ，

$\therefore BD \perp DE$ ， $BD \perp DC$ 。

$\therefore \angle EDC$  是所求的二面角的平面角。

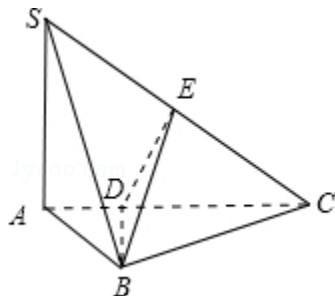
$\because SA \perp$  底面  $ABC$ ， $\therefore SA \perp AB$ ， $SA \perp AC$ 。

设  $SA=a$ ，则  $AB=a$ ， $BC=SB=\sqrt{2}a$

$\because AB \perp BC$ ， $\therefore AC=\sqrt{3}a$ ，在  $Rt\triangle SAC$  中  $\tan \angle ACS=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle ACS=30^\circ$ 。

又已知  $DE \perp SC$ ，所以  $\angle EDC=60^\circ$ ，即所求的二面角等于  $60^\circ$ 。



点评：本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题。

24.

考点：复数的基本概念；复数相等的充要条件.

专题：压轴题；分类讨论.

分析：由于  $z^2=a-2|z|$  为实数，故  $z$  为纯虚数或实数，因而需分情况进行讨论. 当  $z$  是实数时，本题是一个关于  $z$  的一元二次方程组，解方程组即可；当  $z$  是一个纯虚数时，按照实数方程求解得到  $z$  的虚部，写出纯虚数即可.

解答：解：设  $|z|=r$ . 若  $a<0$ ，则  $z^2=a-2|z|<0$ ，于是  $z$  为纯虚数，从而  $r^2=2r-a$ .  
由于  $z^2=a-2|z|$  为实数，故  $z$  为纯虚数或实数，因而需分情况进行讨论.

解得  $r=1+\sqrt{1-a}$  ( $r=1-\sqrt{1-a}<0$ ，不合，舍去). 故  $z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$ .

若  $a\geq 0$ ，对  $r$  作如下讨论：

(1) 若  $r\leq \frac{1}{2}a$ ，则  $z^2=a-2|z|\geq 0$ ，于是  $z$  为实数.

解方程  $r^2=a-2r$ ，得  $r=-1+\sqrt{1+a}$  ( $r=-1-\sqrt{1+a}<0$ ，不合，舍去).  
故  $z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$ .

(2) 若  $r>\frac{1}{2}a$ ，则  $z^2=a-2|z|<0$ ，于是  $z$  为纯虚数.

解方程  $r^2=2r-a$ ，得  $r=1+\sqrt{1-a}$  或  $r=1-\sqrt{1-a}$  ( $a\leq 1$ ).

故  $z=\pm(1\pm\sqrt{1-a})i$  ( $a\leq 1$ ).

综上所述，原方程的解的情况如下：

当  $a<0$  时，解为： $z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$ ；

当  $0\leq a\leq 1$  时，解为： $z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$ ， $z=\pm(1\pm\sqrt{1-a})i$ ；

当  $a>1$  时，解为： $z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$ .

点评：本题还可以令  $z=x+yi$  ( $x, y\in\mathbb{R}$ ) 代入原方程后，由复数相等的条件将复数方程化归为关于  $x, y$  的实系数的二元方程组来求解.

25.

考点：椭圆的应用.

专题：计算题；压轴题.

分析：由题设条件取椭圆的参数方程  $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ ，其中  $0\leq\theta<2\pi$ ，根据已知条件和椭圆的性质能够推出

$b=1, a=2$ . 从而求出这个椭圆的方程和椭圆上到点  $P$  的距离等于  $\sqrt{7}$  的点的坐标.

解答：解：根据题设条件，可取椭圆的参数方程是  $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ ，其中  $0\leq\theta<2\pi$ ，

由  $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$  可得  $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$ ，即  $a=2b$ .

设椭圆上的点  $(x, y)$  到点  $P$  的距离为  $d$ , 则

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \theta + \left(b \sin \theta - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta - 3b \sin \theta + \frac{9}{4} \\ &= 4b^2 - 3b^2 \sin^2 \theta - 3b \sin \theta + \frac{9}{4} \\ &= -3b^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2b}\right)^2 + 4b^2 + 3. \end{aligned}$$

如果  $\frac{1}{2b} > 1$ , 即  $b < \frac{1}{2}$ , 则当  $\sin \theta = -1$  时,  $d^2$  有最大值, 由题设得  $(\sqrt{7})^2 = \left(b + \frac{3}{2}\right)^2$ ,

由此得  $b = \sqrt{7} - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ , 与  $b < \frac{1}{2}$  矛盾.

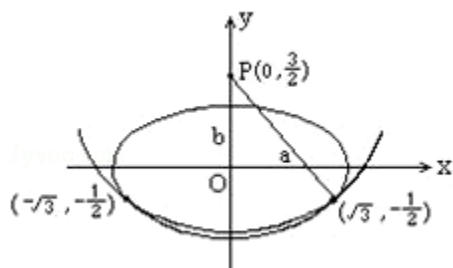
因此必有  $\frac{1}{2b} \leq 1$  成立, 于是当  $\sin \theta = -\frac{1}{2b}$  时,  $d^2$  有最大值, 由题设得  $(\sqrt{7})^2 = 4b^2 + 3$ ,

由此可得  $b=1, a=2$ .

$\therefore$  椭圆的方程是  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ , 所求椭圆的参数方程是  $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ ,

由  $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  可得,

椭圆上的点  $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$  和  $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$  到点  $P$  的距离都是  $\sqrt{7}$ .



点评: 本题考查椭圆的性质及其应用, 解题时要注意参数方程的合理运用.

26.

考点: 对数函数图象与性质的综合应用.

专题: 计算题; 压轴题.

分析: (I)、 $f(x)$  当  $x \in (-\infty, 1]$  时有意义的条件是  $1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a > 0$ ,  $x \in (-\infty, 1]$ ,  $n \geq 2$ ,

$$a > - \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x \right], x \in (-\infty, 1], \text{ 然后由函数的单调性求实数}$$

$a$  的取值范围.

(II)、欲证如果  $a \in (0, 1]$ , 证明  $2f(x) < f(2x)$  当  $x \neq 0$  时成立, 只需证明  $n \geq 2$  时,

$$[1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a]^2 < n[1+2^{2x}+\dots+(n-1)^{2x}+n^{2x} a], a \in (0, 1], x \neq 0 \text{ 即可得证.}$$

解答：解：(I)  $f(x)$  当  $x \in (-\infty, 1]$  时有意义的条件是  $1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a > 0$ ,  
 $x \in (-\infty, 1], n \geq 2$ ,

$$\text{即 } a > - \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x \right], x \in (-\infty, 1],$$

$\therefore - \left(\frac{k}{n}\right)^x (k=1, 2, \dots, n-1)$  在  $(-\infty, 1]$  上都是增函数,

$\therefore - \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x \right]$  在  $(-\infty, 1]$  上也是增函数,

从而它在  $x=1$  时取得最大值  $- \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\right) = - \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n} = - \frac{1}{2}(n-1)$ .

所以  $a > - \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^x + \left(\frac{2}{n}\right)^x + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^x \right], x \in (-\infty, 1],$

$\therefore - \left(\frac{k}{n}\right)^x (k=1, 2, \dots, n-1)$  在  $(-\infty, 1]$  等价于  $a > - \frac{1}{2}(n-1)$ ,

故  $a$  的取值范围是  $\{a | a > - \frac{1}{2}\}$ .

(II) 证明：只需证明  $n \geq 2$  时,  $[1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a]^2$   
 $< n[1+2^{2x}+\dots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a], a \in (0, 1], x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \therefore (a_1+a_2+\dots+a_n)^2 &= (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2) + 2(a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_n) \\ &\leq (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2) + [(a_1^2+a_2^2) + \dots + (a_1^2+a_n^2)] + [(a_2^2+a_3^2) \\ &+ \dots + (a_2^2+a_n^2)] + \dots + [(a_{n-2}^2+a_{n-1}^2) + (a_{n-2}^2+a_n^2)] + (a_{n-1}^2+a_n^2) \\ &= n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2). \end{aligned}$$

于是  $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$  当  $a_1=a_2=\dots=a_n$  时成立.

利用上面结果知, 当  $a=1, x \neq 0$  时, 因  $1 \neq 2^x$ ,

所以有  $[1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a]^2 < n[1+2^{2x}+\dots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a], a \in (0, 1],$

当  $0 < a < 1, x \neq 0$  时, 因  $a^2 < a$ ,

所以有  $[1+2^x+\dots+(n-1)^x+n^x a]^2 < n[1+2^{2x}+\dots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a],$

即有  $2f(x) < f(2x) a \in (0, 1], x \neq 0$ .

点评：本题是比较难的对数函数的综合题, 在解题过程中要注意等价转化思想的灵活运用, 并且细心运算, 避免不必要的错误.