2000年内蒙古高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至9页。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题共60分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答，不能答在试题卷上。

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式　　　　　　　　　　正棱台、圆台的侧面积公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$　$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$　其中 c'、c 分别表示上、下底面周长，l 表示斜高或母线长

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$　$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$　其中 S'、S 分别表示上、下底面积，h 表示高

一、选择题：本大题共12分，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设集合A和B都是自然数集合N，映射f：A→B把集合A中的元素n映射到集合B中的元素 2^n+n，则在映射f下，象20的原象是（ ）

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

（2）在复平面内，把复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，所得向量对应的复数是

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$-2\sqrt{3}i$　　（C）$\sqrt{3}-3i$　　（D）$3+\sqrt{3}i$

（3）一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ ，这个长方体对角线的长是

（A） $2\sqrt{3}$　　　　（B） $3\sqrt{2}$　　　　（C）6　　　　（D） $\sqrt{6}$

（4）已知 sinα>sinβ，那么下列命题成立的是

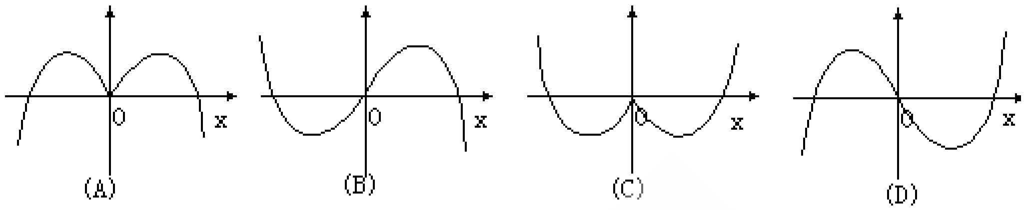
（A）若α、β是第一象限角，则 cosα>cosβ

（B）若α、β是第二象限角，则 tgα>tgβ

（C）若α、β是第三象限角，则 cosα>cosβ

（D）若α、β是第四象限角，则 tgα>tgβ

（5）函数 y=－xcosx 的部分图象是



（6）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分希累进计算。

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

（A）800～900 元　　（B）900～1200 元　　（C）1200～1500 元　　（D）1500～2800 元

（7）若 a>b>1， $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b},Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),R=\lg(\frac{a+b}{2})$ ，则

（A）R<P<Q　　（B）P<Q<R　　（C）Q<P<R　　（D）P<R<Q

（8）以极坐标中的点（1，1）为圆心，1 为半径的圆的方程是

(A) $\rho=2\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$ (B) $\rho=2\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$

(C) $\rho=2\cos(\theta-1)$ (D) $\rho=2\sin(\theta-1)$

(9) 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

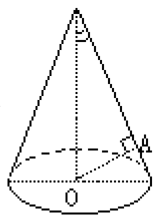
(10) 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是

(A) $y=\sqrt{3}x$ (B) $y=-\sqrt{3}x$ (C) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(11) 过抛物线 $y=ax^2$ (a>0) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于

(A) 2a (B) $\frac{1}{2a}$ (C) 4a (D) $\frac{4}{a}$

(12) 如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为



(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (B) $\arccos\frac{1}{2}$ (C) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

第 II 卷（非选择题共 90 分）

注意事项：

1．第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

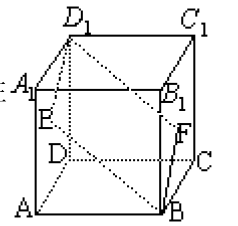
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

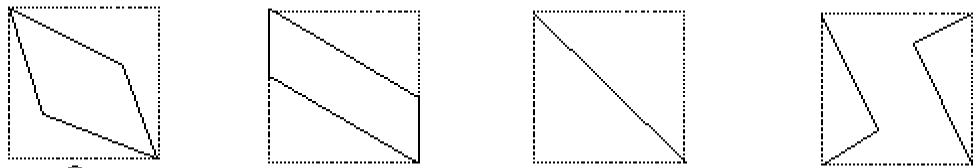
（13）乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、第三、五位置,其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有_________种（用数字作答）

（14）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{r^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上的动点。当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是___________________。

（15）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$（n=1，2，3…），则它的通项公式是 $a_n=$_________。

（16）如图，E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是___________________。





①　　　　②　　　　③　　　　④

（要求：把可能的图的序号都填上）

三、解答题：本大题共 16 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1,\ \ x\in R$

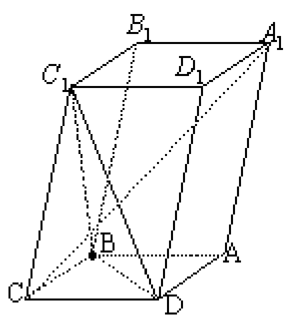
（I）当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

（II）该函数的图象可由 y=sinx（x∈R）的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

（18）（本小题满分 12 分）

如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是菱形，且

$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$



（I）证明：$C_1C\perp BD$；

（II）假定CD=2，$CC_1=\frac{3}{2}$，记面C_1BD为α，面CBD为β，求二面角 α BD β的平面角的余弦值；

（III）当$\frac{CD}{CC_1}$的值为多少时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD？请给出证明。

（19）（本小题满分12分）

设函数$f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中a>0。

（I）解不等式f(x)≤1；

（II）求a的取值范围，使函数f(x)在区间[0，＋∞]上是单调函数。

（20）（本小题满分12分）

（I）已知数列$\{c_n\}$，其中$c_n=2^n+3^n$，且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列，求常数p；

（II）设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明数列$\{c_n\}$不是等比数列。

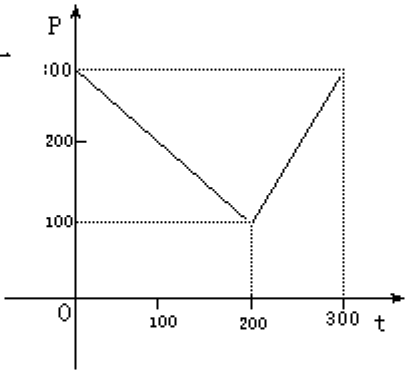
（21）（本小题满分12分）

某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的300天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

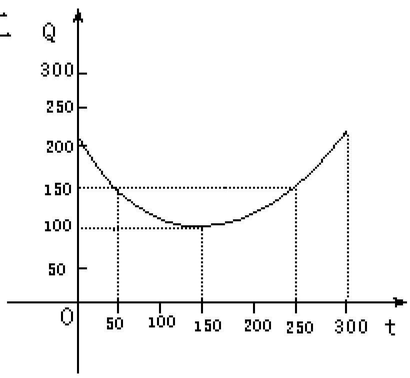
（I）写出图一表示的市场售价与时间的函数关系P＝f(t)；写出图二表求援 种植成本与时间的函数关系式Q＝g(t)；

（II）认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

图一



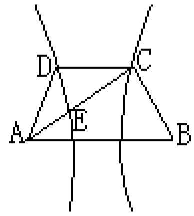
图二



（注：市场售价和种植成本的单位：$元/10^2kg$，时间单位：天）

（22）（本小题满分 14 分）

如图，已知梯形 ABCD 中|AB|=2|CD|，点 E 分有向线段 $\overline{AC}$ 所成的比为 λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点。当 $\frac{3}{2} \le \lambda \le \frac{3}{4}$ 时，求双曲线离心率 e 的取值范围。



参考解答及评分标准

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

（1）C （2）B （3）D （4）D （5）D （6）C （7）B （8）C
（9）A （10）C （11）C （12）D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分。

（13）252 （14）$-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$ （15）$\frac{1}{n}$ （16）②③

三、解答题

（17）本小题主要考查三角函数的图象和性质，考查利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解：（I）

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + 1 \\
&= \frac{1}{4}(2\cos^2 x - 1) + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin x\cos x) + 1 \\
&= \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{5}{4} = \frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4} \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

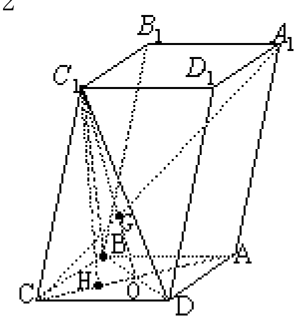
…………6 分

y 取得最大值必须且只需 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 即 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$ 所以当函数 y 取得最大值时，自变量 x 的集合为 $\{x|x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\}$ ……………………………8 分

（II）将函数 y=sinx 依次进行如下变换：（i）把函数 y=sinx 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$，得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象；（ii）把得到的图象上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象；（iii）把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（横坐标不变）, 得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象（iv）把得到的图象向上平移 $\frac{5}{4}$ 个单位长度，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$ 的图象；

综上得到函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$ 的图象。………………12 分

（18）本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系，逻辑推理能力，满分 12 分。



（I）证明：连结 A_1C_1、AC，AC 和 BD 交于 O，连结 C_1O

∵四边形 ABCD 是菱形

∴AC⊥BD，BC=CD

又∵ $\angle BCC_1=\angle DCC_1, C_1C=C_1C$

$\therefore \Delta C_1BC\cong\Delta C_1DC$

$\therefore C_1B=C_1D$

∵DO=OB

$\therefore C_1O\perp BD$ ……………………………………2 分

但 AC⊥BD，$AC\cap C_1O=O$

$\therefore BD\perp$平面AC_1

又$C_1C\subset$平面AC_1

$\therefore C_1C\perp BD$ ……………………………4 分

（II）解：由（I）知 AC⊥BD，$C_1O\perp BD$

$\therefore \angle C_1OC$是二面角α BD β的平面角

在ΔC_1BC中，BC=2，$C_1C=\dfrac{3}{2}$，$\angle BCC_1=60^\circ$

$\therefore C_1B^2=2^2+(\dfrac{3}{2})^3-2\times2\times\dfrac{3}{2}\times\cos60^\circ=\dfrac{13}{4}$ ……………………………6 分

∵∠OCB=60°

$\therefore OB=\dfrac{1}{2}BC=1$

$\therefore C_1O^2=C_1B^2=OB^2=\dfrac{13}{4}-1=\dfrac{9}{4}$

$\therefore C_1O=\dfrac{3}{2}$即$C_1O=C_1C$

作$C_1H\perp OC$，垂足为 H。

∴点 H 是 OC 的中点，且$OH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\cos\angle C_1OC=\dfrac{OH}{C_1O}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。……………………………8 分

（III）当$\dfrac{CD}{CC_1}=1$时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD

证明一：∵ $\frac{CD}{CC_1}=1$

$\therefore BC=CD=C_1C$

又$\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD$

由此可推得$BD=C_1B=C_1D$

∴三棱锥$C-C_1BD$是正三棱锥。……………………………10 分

设A_1C与C_1O相交于 G.

$\because A_1C_1 /\!/ AC$，且$A_1C_1:OC=2:1$

$\therefore C_1O:GO=2:1$

又C_1O是正三角形C_1BD的 BD 边上的高和中线,

∴点 G 是正三角形C_1BD的中心。

$\therefore CG\perp$平面C_1BD

即$A_1C\perp$平面C_1BD。……………………………12 分

证明二：由（I）知，$BD\perp$平面AC_1

$\because A_1C\subset$平面AC_1，$\therefore BD\perp A_1C$。……………………………10 分

当$\frac{CD}{CC_1}=1$时，平行六面体的六个面是全等的菱形。

同$BD\perp AC_1$的证法可得$BC_1\perp A_1C$

又$BD\perp BC_1=B$ $\therefore A_1C\perp$平面C_1BD ……………………12 分

（19）本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分数计论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：（I）不等式 f(x)≤1 即$\sqrt{x^2+1}\le 1+ax$，由此得 1≤1+ax，即 ax≥0，其中常数 a>0

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\le(1+ax)^2\\ x\ge 0\end{cases}$$

即$\begin{cases}x\ge 0\\ (a^2-1)x+2a\ge 0\end{cases}$ …………………………3 分

所以，当 0<a<1 时，所给不等式的解集为$\{x|0\le x\le\frac{2a}{1-a^2}\}$；

当 a≥1 时，所给不等式的解集为{x|x≥0}…………………………6 分

（II）在区间[0，+∞]上任取x_1、x_2，使得$x_1<x_2$

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)\\&=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)\\&=(x_1-x_2)(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a)\end{aligned}$$ …………………………8 分

（i）当 a≥1 时

$\because\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$

$\therefore\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$

又$x_1-x_2<0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$

即 $f(x_1)>f(x_2)$

所以，当 a≥1 时，函数 f(x)在区间[0，+∞]上是单调递减函数。··················10 分

（ii）当 0<a<1 时,在区间[0,+∞]上存在两点 $x_1=0,\ x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$,满足 $f(x_1)=1,\ f(x_2)=1$,

即 $f(x_1)=f(x_2)$，所以函数 f(x)在区间[0，+∞]上不是单调函数。

综上，当且仅当 a≥1 时，函数 f(x)在区间[0，+∞]上是单调函数。··················12 分

（20）本小题主要考查等比数列的概念和基本性质，推理和运算能力，满分 12 分。

解：（I）因为 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 是等比数列，故有 $(c_{n+1}-pc_n)^2=(c_{n+2}-pc_{n+1})(c_n-pc_{n-1})$

将 $c_n=2^n+3^n$ 代入上式，得

$$[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)]^2$$
$$=[2^{n+2}+3^{n+2}-p(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n-p(2^{n-1}+3^{n-1})]$$ ························3 分

即
$$[(2-p)2^n+(3-p)3^n]^2$$
$$=[(2-p)2^{n+1}+(3-p)3^{n+1}][(2-p)2^{n-1}+(3-p)^{3n-1}]$$

整理得 $\dfrac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot 2^n\cdot 3^n=0$

解得 p=2 或 p=3。························6 分

（II）设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公比分别是 p=q，p≠q，$c_n=a_n+b_n$

为证 $\{c_n\}$ 不是等比数列只需证 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$。

事实上，$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$,

$$c_1\cdot c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)$$

由于 p≠q，$p^2+q^2>2pq$，又 a_1、b_1 不为零，

因此$c_2^2 \neq c_1 \cdot c_3$，故$\{c_n\}$不是等比数列。……………………12 分

（21）本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题，考查运用所学知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：（I）由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t, & 0\le t\le 200\\ 2t-300, & 200<t\le 300\end{cases}$$ ……………………2 分

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,\quad 0\le t\le 300$$ ……………………4 分

（II）设 t 时刻的纯收益为 h(t)，则由题意得

h(t)=f(t)-g(t)

即 $$h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\le t\le 200\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{2}{7}t-\frac{1025}{2}, & 200<t\le 300\end{cases}$$ ……………………6 分

当 0≤t≤200 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$$

所以，当 t=50 时，h(t)取得区间[0，200]上的最大值 100；

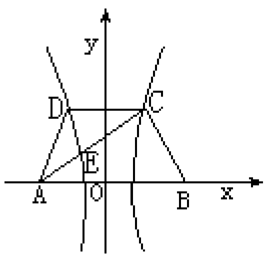
当 200<t≤300 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$$

所以，当 t=300 时，h(t)取得区间[200，300]上的最大值 87.5。………………10 分

综上，由 100>87.5 可知，h(t)在区间[0，300]上可以取得最大值 100，此时 t=50，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。…………………12 分

（22）本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力，满分 14 分。



解如图，以AB的垂直平分线为y轴，直线AB为x轴，建立直角坐标系xOy，则CD⊥y轴。因为双曲线经过点C、D，且以A、B为焦点，由双曲线的对称性知C、D关于x轴对称。………………2分

依题意，记A（-c，0），$C(\frac{c}{2},h)$，$E(x_0,y_0)$，其中$c=\frac{1}{2}|AB|$为双曲线的半焦距，h是梯形的高。由定比分点坐标公式得

$$x_0=\frac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)}$$

$$y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}。$$

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{r^2}{b^2}=1$，则离心率$e=\frac{c}{a}$。

由点C、E在双曲线上，将点C、E的坐标和$e=\frac{c}{a}$代入双曲线方程得

$$\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

$$\frac{e^2}{4}(\frac{\lambda-2}{\lambda+1})^2-(\frac{\lambda}{\lambda+1})^2\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ②$$……………………7分

由①式得$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1$ ③

将③式代入②式，整理得

$$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$$

故$\lambda=1-\frac{3}{e^2+2}$。……………………10分

由题设$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$得，$\frac{2}{3}\le1-\frac{3}{e^2+2}\le\frac{3}{4}$

解得 $\sqrt{7} \le e \le \sqrt{10}$

所以双曲线的离心率的取值范围为 $[\sqrt{7}, \sqrt{10}]$ 。……………………14 分