

2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为

- A.2 B.3 C.4 D.6

2.复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是

- A. $-\frac{3}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{3}{10}$

3.在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 , 且 $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$, 则下面四

种情形中, 对应样本的标准差最大的一组是

A. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$ B. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$

C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$ D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

4.Logistic模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域, 有学者根据公布数据建立了某

地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天)的Logistic模型: $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K

为最大确诊病例数。当 $I(t^*) = 0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为($\ln 19 \approx 3$)

- A.60 B.63 C.66 D.69

5.设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 交于 D, E 两点, 若 $OD \perp OE$, 则 C 的焦点坐标为

- A. $(\frac{1}{4}, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, 0)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 0)$

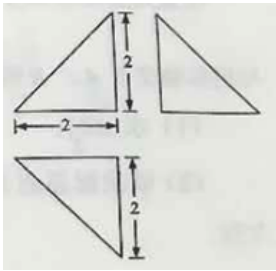
6.已知向量 a, b 满足 $|a|=5, |b|=6, a \cdot b = -6$, 则 $\cos \langle a, a+b \rangle =$

- A. $-\frac{31}{35}$ B. $-\frac{19}{35}$ C. $\frac{17}{35}$ D. $\frac{19}{35}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\cos B =$

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 右图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是



- A. $6+4\sqrt{2}$ B. $4+4\sqrt{2}$ C. $6+2\sqrt{3}$ D. $4+2\sqrt{3}$

9. 已知 $2\tan\theta - \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = 7$, 则 $\tan\theta =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

10. 若直线 l 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 和圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = 2x + \frac{1}{2}$ C. $y = \frac{1}{2}x + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

11. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\sqrt{5}$ 。P是C

上一点, 且 $F_1P \perp F_2P$ 。若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为4, 则 $a =$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

12. 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$ 。设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$
 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____。

14. $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____。(用数字作答)。

15. 已知圆锥的底面半径为1, 母线长为3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为_____。

16.关于函数 $f(x)=\sin x + \frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

- ① $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称。
- ② $f(x)$ 的图像关于原点对称。
- ③ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称。
- ④ $f(x)$ 的最小值为2。

其中所有真命题的序号是_____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17.(12分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$ 。

- (1)计算 a_2 , a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;
- (2)求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18.(12分)

某学生兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表(单位：天):

锻炼人次 空气质量等级	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

- (1)分别估计该市一天的空气质量等级为1, 2, 3, 4的概率;
- (2)求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);
- (3)若某天的空气质量等级为1或2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为3或4, 则称这天“空气质量不好”。根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判

断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

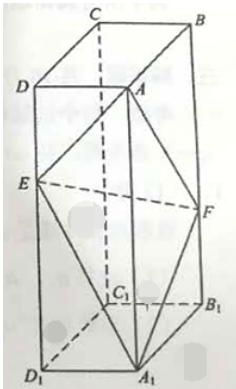
	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好		
空气质量不好		

附:
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.(12分)

如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1, BF=2FB_1$ 。



(1)证明: 点 C_1 在平面 AEF 内;

(2)若 $AB=2, AD=1, AA_1=3$, 求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值。

20.(12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (0 < m < 5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点。

(1)求 C 的方程;

(2)若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|, BP \perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积。

21.(12分)

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直。

(1)求 b ;

(2)若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于1的零点，证明： $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于1。

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修4-4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$$
 (t 为参数且 $t \neq 1$)， C 与坐标轴交于

A ， B 两点。

(1)求 $|AB|$;

(2)以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程。

23.[选修4-5：不等式选讲](10分)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ， $a+b+c=0$ ， $abc=1$ 。

(1)证明： $ab+bc+ca < 0$;

(2)用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 的最大值，证明： $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$ 。

