

2014年普通高等学校招生全国统一考试(江西卷)

数学(理科)

一、选择题:

1. \bar{z} 是 z 的共轭复数. 若 $z + \bar{z} = 2$, $(z - \bar{z})i = 2$ (i 为虚数单位), 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1-i$ C. $-1+i$ D. $1-i$

【答案】D

【解析】

试题分析: 设 $z = a + bi$, ($a, b \in R$), 则 $\bar{z} = a - bi$. 由 $z + \bar{z} = 2$ 得: $a = 1$, 由 $(z - \bar{z})i = 2$ 得: $b = -1$, 所以 $z = 1 - i$. 选 D. 学科网

考点: 共轭复数

2. 函数 $f(x) = \ln(x^2 - x)$ 的定义域为 ()

- A. $(0,1)$ B. $[0,1]$ C. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

【答案】C

【解析】

试题分析: 由题意得: $x^2 - x > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < 0$, 所以选 C.

考点: 函数定义域

3. 已知函数 $f(x) = 5^{|x|}$, $g(x) = ax^2 - x$ ($a \in R$), 若 $f[g(1)] = 1$, 则 $a =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. -1

【答案】A

【解析】

试题分析: 因为 $f(g(1)) = 1 = 5^0$, 所以 $g(1) = 0$, 即 $a - 1 = 0$, $a = 1$. 选 A.

考点: 求函数值

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $c^2 = (a - b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 ()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

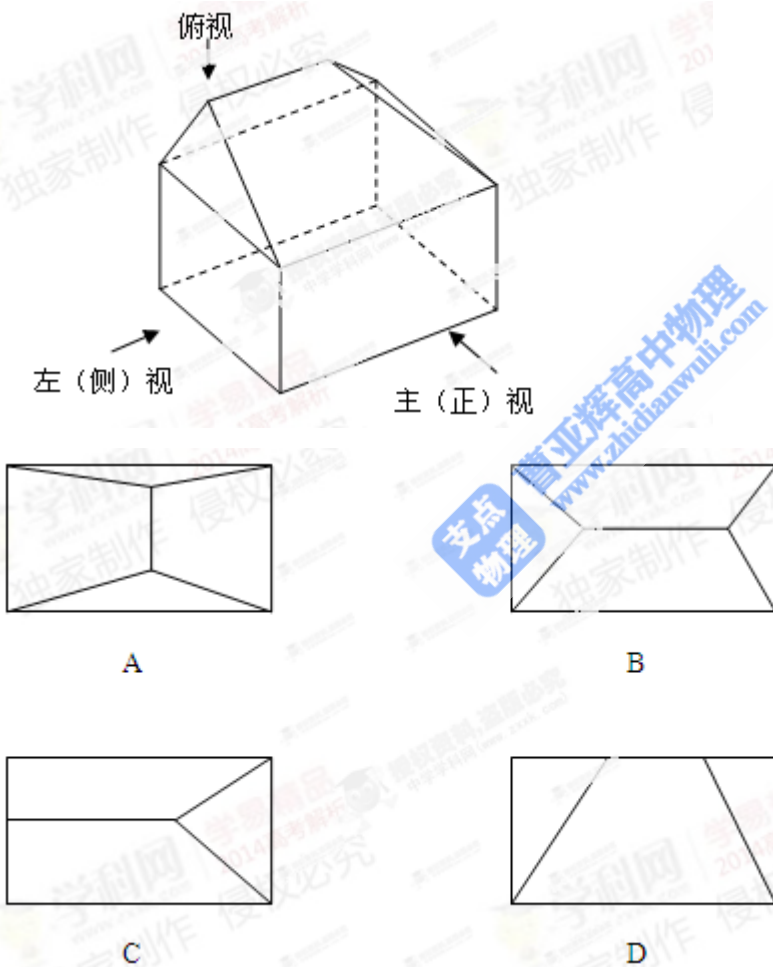
【解析】

试题分析：因为 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 所以由余弦定理得： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3}$, 即

$-2ab + 6 = -ab$, $ab = 6$, 因此 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} ab \sin C = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 选 C.

考点：余弦定理

5. 一几何体的直观图如右图，下列给出的四个俯视图中正确的是 ()



【答案】B

【解析】

试题分析：俯视图为几何体在底面上的投影，应为 B 中图形.

考点：三视图

6.某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这4个变量之间的关系，随机抽查52名中学生，得到统计数据如表1至表4，这与性别有关联的可能性最大的变量是（ ）

表1	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

A.成绩

表2	不及格	及格	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

B.视力

表3	不及格	及格	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

C.智商

表4	不及格	及格	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

D.阅读量

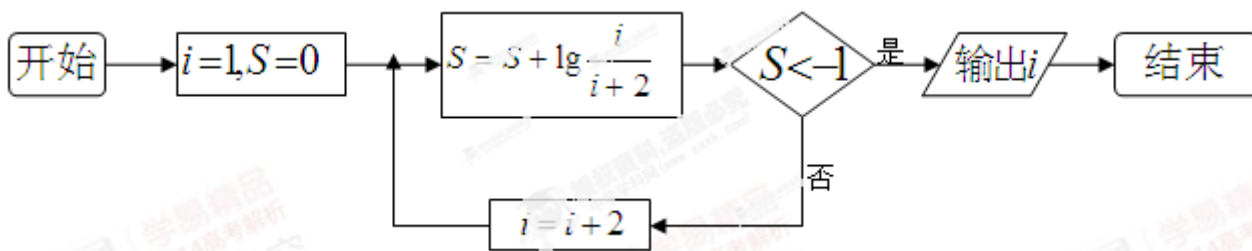
【答案】D

【解析】

试题分析：根据公式 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 分别计算得：A. $\frac{64}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$ ， B. $\frac{112^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$
 C. $\frac{96^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$ D. $\frac{408^2}{16 \times 36 \times 20 \times 32}$ ，选项D的值最大，所以与性别有关联的可能性最大为D.

考点：关联判断

7.阅读如下程序框图，运行相应的程序，则程序运行后输出的结果为（ ）



A.7 B.9 C.10 D.11

【答案】 B

【解析】

试题分析：第一次循环： $i=1, S=1\lg\frac{1}{3}$ ，第二次循环： $i=3, S=1\lg\frac{1}{3}+1\lg\frac{3}{5}=1\lg\frac{1}{5}$ ，

第三次循环： $i=5, S=1\lg\frac{1}{5}+1\lg\frac{5}{7}=1\lg\frac{1}{7}$ ，第四次循环： $i=7, S=1\lg\frac{1}{7}+1\lg\frac{7}{9}=1\lg\frac{1}{9}$ ，

第五次循环： $i=9, S=1\lg\frac{1}{9}+1\lg\frac{9}{11}=1\lg\frac{1}{11} < -1$ ，学科网结束循环，输出 $i=9$ 。选 B。

考点：循环结构流程图

8. 若 $f(x) = x^2 + 2\int_0^1 f(x)dx$ ，则 $\int_0^1 f(x)dx = (\quad)$

A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

【答案】 B

【解析】

试题分析：设 $\int_0^1 f(x)dx = m$ ，则 $f(x) = x^2 + 2m$ ， $m = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2m)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2mx\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 2m$ ，

因此 $m = -\frac{1}{3}$ 。

考点：定积分

9. 在平面直角坐标系中， A, B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相

切，则圆 C 面积的最小值为 ()

A. $\frac{4}{5}\pi$ B. $\frac{3}{4}\pi$ C. $(6-2\sqrt{5})\pi$ D. $\frac{5}{4}\pi$

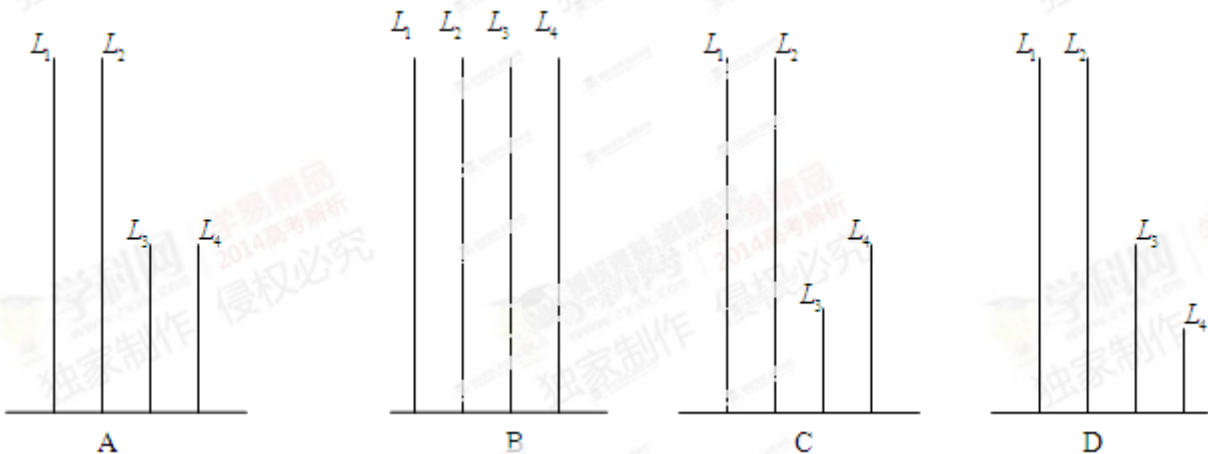
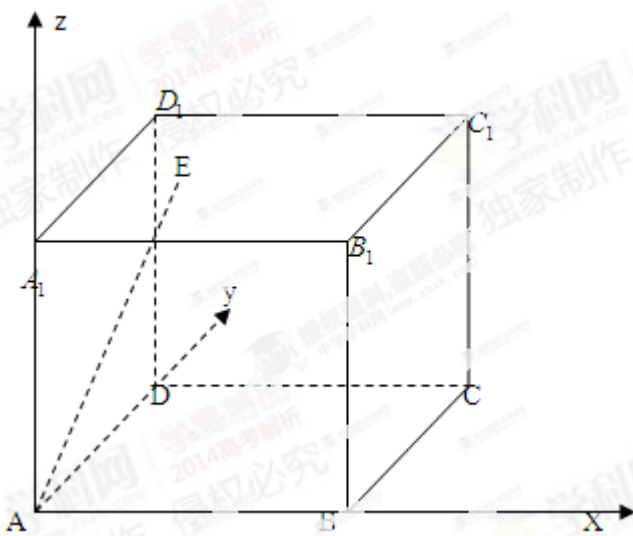
【答案】 A

【解析】

试题分析：设直线 $l: 2x + y - 4 = 0$ 。因为 $|OC| = \frac{1}{2}|AB| = d_{C,l}$ ，所以圆心 C 的轨迹为以 O 为焦点， l 为准线的抛物线。圆 C 半径最小值为 $\frac{1}{2}d_{C,l} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，学科网圆 C 面积的最小值为 $\pi(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = \frac{4\pi}{5}$ 。选 A。

考点：抛物线定义

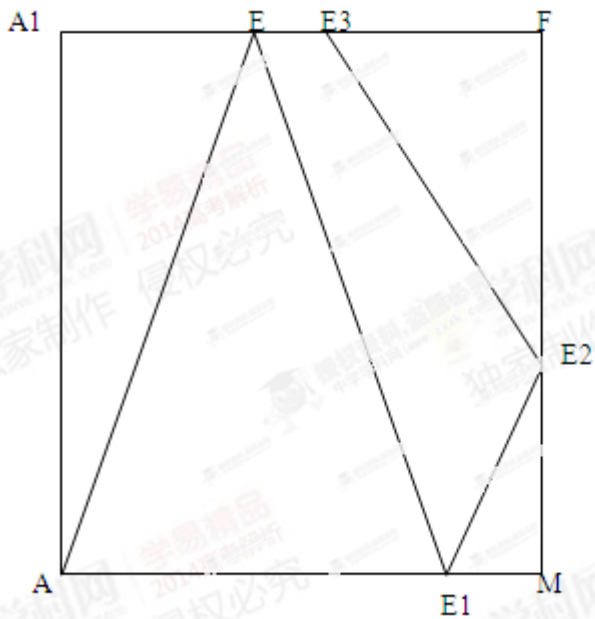
10. 如右图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 11$ ， $AD = 7$ ， $AA_1 = 12$ ，一质点从顶点 A 射向点 $E(4, 3, 12)$ ，遇长方体的面反射（反射服从光的反射原理），将 $i-1$ 次到第 i 次反射点之间的线段记为 $L_i (i = 2, 3, 4)$ ， $L_1 = AE$ ，将线段 L_1, L_2, L_3, L_4 竖直放置在同一水平线上，则大致的图形是（ ）



【答案】C

【解析】

试题分析：



因为 $\frac{3}{4} > \frac{7}{11}$, 所以 A_1E 延长交 D_1C_1 于 F , 过 F 作 FM 垂直 DC 于 M . 在矩形 AA_1FM 中分析反射情况: 由于 $AM = \frac{35}{5} > 10$, 第二次反射点为 E_1 在线段 AM 上, 学科网此时 $E_1M = \frac{5}{3}$, 第三次反射点为 E_2 在线段 FM 上, 此时 $E_2M = 4$, 第四次反射点为 E_3 在线段 A_1F 上. 由图可知, 选 C.

考点: 空间想象能力

二.选做题: 请考生在下列两题中任选一题作答, 若两题都做, 则按所做的第一题评阅计分, 本题共 5 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

11.(1). (不等式选做题) 对任意 $x, y \in R, |x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】

试题分析: 因为 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1| \geq |x-(x-1)|+|(y-1)-(y+1)|=1+2=3$, 当且仅当 $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ 时取等号, 所以 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3, 选 C.

考点: 含绝对值不等式性质

11.(2). (坐标系与参数方程选做题) 若以直角坐标系的原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 则线段 $y=1-x(0 \leq x \leq 1)$ 的极坐标为 ()

$$A. \rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$B. \rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

C.

$$\rho = \cos \theta + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$D. \rho = \cos \theta + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

【答案】 A

【解析】

试题分析：根据 $\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi]$, $y = 1 - x (0 \leq x \leq 1)$ 得：

$y \in [0, 1], \rho \sin \theta = 1 - \rho \cos \theta, (0 \leq \rho \cos \theta \leq 1, 0 \leq \rho \sin \theta \leq 1)$ 解得 $\rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 选 A.

考点：极坐标

三、填空题

12. 10 件产品中有 7 件正品, 3 件次品, 从中任取 4 件, 则恰好取到 1 件次品的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

试题分析：从 10 件产品中任取 4 件, 共有 C_{10}^4 种基本事件, 恰好取到 1 件次品就是取到 1 件次品且取到 3

件正品, 共有 $C_3^1 C_7^3$, 因此所求概率为 $\frac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{2}$.

考点：古典概型概率

13. 若曲线 $y = e^{-x}$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x + y + 1 = 0$, 则点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(-\ln 2, 2)$

【解析】

试题分析：设切点 $P(a, b)$, 则由 $y' = -e^{-x}$ 得: $k = -e^{-a} = -2, e^{-a} = 2, a = -\ln 2, b = e^{-a} = 2$, 所以点 P 的坐标是 $(-\ln 2, 2)$.

考点：利用导数求切点.

14. 已知单位向量 \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 的夹角为 α , 且 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 的夹角为 β , 则

$\cos \beta =$ _____

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

试题分析：因为 $\vec{a}^2 = 9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{3} = 9$, $\vec{b}^2 = 9 + 1 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 8$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 2 - 9 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = 8$, 所以

$$\cos \beta = \frac{8}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

考点：向量数量积及夹角

15. 过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B , 若 M 是线段 AB 的中点, 则椭圆 C 的离心率为_____

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则由 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 两式相减变形得：

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0, \text{ 即 } \frac{2}{a^2} + \frac{-\times 2 \frac{1}{2}}{b^2} = 0, a^2 = 2b^2, \text{ 从而 } a^2 = 2c^2, e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

考点：点差法，椭圆离心率

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \theta) + a \cos(x + 2\theta)$, 其中 $a \in R, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(1) 当 $a = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值与最小值;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{2}) = 0, f(\pi) = 1$, 求 a, θ 的值.

【答案】 (1) 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小值为 -1 . (2) $\begin{cases} a = -1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

【解析】

试题分析：(1) 求三角函数最值, 首先将其化为基本三角函数形式: 当 $a = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = \sin(\frac{\pi}{4} - x), \text{ 再结合基本三角函数性质求最}$$

值: 因为 $x \in [0, \pi]$, 从而 $\frac{\pi}{4} - x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上学科网的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小值为 -1 . (2) 两个

独立条件求两个未知数, 联立方程组求解即可. 由 $\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ f(\pi) = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \cos \theta (1 - 2a \sin \theta) = 0 \\ 2a \sin^2 \theta - \sin \theta - a = 1 \end{cases}$, 又 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 知

$$\cos \theta \neq 0, \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

试题解析：解 (1) 当 $a = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 时，

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

因为 $x \in [0, \pi]$ ，从而 $\frac{\pi}{4} - x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，最小值为 -1 。

$$(2) \text{ 由} \begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ f(\pi) = 1 \end{cases} \text{ 得} \begin{cases} \cos \theta (1 - 2a \sin \theta) = 0 \\ 2a \sin^2 \theta - \sin \theta - a = 1 \end{cases}, \text{ 又 } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ 知 } \cos \theta \neq 0, \text{ 解得} \begin{cases} a = -1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

考点：三角函数性质

17. (本小题满分 12 分)

已知首项都是 1 的两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$)，满足 $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n + 2b_{n+1} b_n = 0$ 。

(1) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = 3^{n-1}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

【答案】(1) $c_n = 2n - 1$ 。(2) $S_n = (n - 1) \cdot 3^n + 1$ 。

【解析】

试题分析：(1) 已知数列 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，因此对 $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n + 2b_{n+1} b_n = 0$ 变形为 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = 2, c_{n+1} - c_n = 2$ 所

以数列 $\{c_n\}$ 是以首项 $c_1 = 1$ ，公差 $d = 2$ 的等差数列，故 $c_n = 2n - 1$ 。

(2) 由 $b_n = 3^{n-1}$ 知 $a_n = c_n b_n = (2n - 1)3^{n-1}$ ，是等差乘等比型，所以求和用错位相减法。

$$S_n = 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + \dots + (2n - 1) \cdot 3^{n-1}, 3S_n = 1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$\text{相减得 } -2S_n = 1 + 2 \cdot (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (2n - 1) \cdot 3^n = 2 - (2n - 2) \cdot 3^n$$

$$\text{所以 } S_n = (n - 1) \cdot 3^n + 1.$$

试题解析：(1) 因为 $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n + 2b_{n+1} b_n = 0, b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = 2, c_{n+1} - c_n = 2$$

所以数列 $\{c_n\}$ 是以首项 $c_1 = 1$ ，公差 $d = 2$ 的等差数列，故 $c_n = 2n - 1$ 。

(2) 由 $b_n = 3^{n-1}$ 知 $a_n = c_n b_n = (2n-1)3^{n-1}$ 学科网

于是数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$

$$3S_n = 1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n$$

相减得 $-2S_n = 1 + 2 \cdot (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n = 2 - (2n-2) \cdot 3^n$

所以 $S_n = (n-1) \cdot 3^n + 1$.

考点：等差数列定义，错位相减求和

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 + bx + b)\sqrt{1-2x}$ ($b \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $b = 4$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增，求 b 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $x = -2$ 取极小值 0，在 $x = 0$ 取极大值 4. (2) $(-\infty, \frac{1}{9}]$.

【解析】

试题分析：(1) 求函数极值，首先明确其定义域： $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ ，然后求导数：当 $b = 4$ 时， $f'(x) = \frac{-5x(x+2)}{\sqrt{1-2x}}$ ，

再在定义域下求导函数的零点： $x = -2$ 或 $x = 0$. 根据导数符号变化规律，确定极值：当 $x \in (-\infty, -2)$ 时，

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减，当 $x \in (-2, 0)$ 时， $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增，当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递

减，故 $f(x)$ 在 $x = -2$ 取极小值 0，在 $x = 0$ 取极大值 4. (2) 已知函数单调性，求参数取值范围，一般转化

为对应导数恒非负，再利用变量分离求最值. 由题意得 $f'(x) = \frac{-x(5x+3b-2)}{\sqrt{1-2x}} \geq 0$ 对 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 恒成立，即

$5x+3b-2 \leq 0$ 对 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 恒成立，即 $b \leq (\frac{2-5x}{3})_{\max}$, $x \in (0, \frac{1}{3})$ ，即 $b \leq \frac{1}{9}$.

试题解析：(1) 当 $b = 4$ 时， $f'(x) = \frac{-5x(x+2)}{\sqrt{1-2x}}$ ，由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -2$ 或 $x = 0$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时， $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减，当 $x \in (-2, 0)$ 时， $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增，当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时，

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在 $x = -2$ 取极小值 0，在 $x = 0$ 取极大值 4.

(2) $f'(x) = \frac{-x(5x+3b-2)}{\sqrt{1-2x}}$ ，因为当 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 时， $\frac{-x}{\sqrt{1-2x}} < 0$

依题意当 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 时，有 $5x+3b-2 \leq 0$ ，从而 $\frac{5}{3} + 3b - 2 \leq 0$

所以 b 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{9}]$.

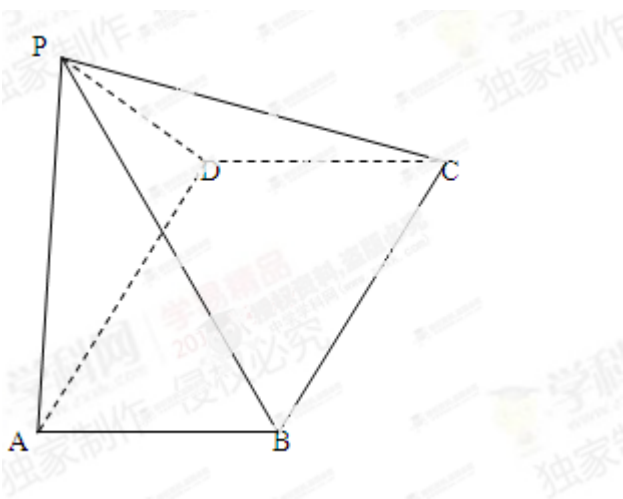
考点：利用导数求极值，利用导数求参数取值范围

19.(本小题满分12分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证： $AB \perp PD$;

(2) 若 $\angle BPC = 90^\circ$, $PB = \sqrt{2}$, $PC = 2$, 问 AB 为何值时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大？并求此时平面 PBC 与平面 DPC 夹角的余弦值.



【答案】(1) 详见解析，(2) $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 $P-ABCD$ 最大. 平面 BPC 与平面 DPC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

试题分析：(1) 先将面面垂直转化为线面垂直： $ABCD$ 为矩形，故 $AB \perp AD$ ，又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，所以 $AB \perp$ 平面 PAD ，再根据线面垂直证线线垂直：因为 $PD \subset$ 平面 PAD ，所以 $AB \perp PD$

(2) 求四棱锥体积，关键要作出高. 这可利用面面垂直性质定理：过 P 作 AD 的垂线，垂足为 O ，又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，下面用 AB 表示高及底面积：设 $AB = m$ ，则 $DP = \sqrt{PG^2 - OG^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - m^2}$ ，故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot m \cdot \sqrt{\frac{4}{3} - m^2} = \frac{m}{3} \sqrt{8 - 6m^2}$. 故当 $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，即 $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 $P-ABCD$ 最大.

求二面角的余弦值，可利用空间向量求解，根据题意可建立空间坐标系，分别求出平面 BPC 的法向量及平面 DPC 的法向量，再利用向量数量积求夹角余弦值即可。

试题解析：(1) 证明：ABCD 为矩形，故 $AB \perp AD$ ，

又平面 $PAD \perp$ 平面 ABCD

平面 $PAD \cap$ 平面 ABCD = AD

所以 $AB \perp$ 平面 PAD，因为 $PD \subset$ 平面 PAD，故 $AB \perp PD$

(2) 解：过 P 作 AD 的垂线，垂足为 O，过 O 作 BC 的垂线，垂足为 G，连接 PG

故 $PO \perp$ 平面 ABCD， $BC \perp$ 平面 POG， $BC \perp PG$

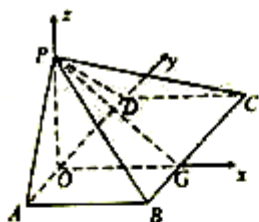
在直角三角形 BPC 中， $PG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $GC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ， $BC = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

设 $AB = m$ ，则 $DP = \sqrt{PG^2 - OG^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - m^2}$ ，故四棱锥 P-ABCD 的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot m \cdot \sqrt{\frac{4}{3} - m^2} = \frac{m}{3} \sqrt{8 - 6m^2}$$

$$\text{因为 } m\sqrt{8 - 6m^2} = \sqrt{-6(m^2 - \frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3}}$$

故当 $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，即 $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥的体积 P-ABCD 最大。



建立如图所示的空间直角坐标系， $O(0,0,0)$ ， $B(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ ， $C(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, 0)$ ， $D(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}, 0)$ ， $P(0,0, \frac{\sqrt{6}}{3})$

故 $\overrightarrow{PC} = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ ， $\overrightarrow{BC} = (0, \sqrt{6}, 0)$ ， $\overrightarrow{CD} = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 0)$

设平面 BPC 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x, y, 1)$ ，则由 $\mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{PC}$ ， $\mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{BC}$ 得
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}y - \frac{\sqrt{6}}{3} = 0 \\ \sqrt{6}y = 0 \end{cases}$$

解得 $x = 1, y = 0$ ， $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 1)$ ，

同理可求出平面 DPC 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (0, \frac{1}{2}, 1)$ ，从而平面 BPC 与平面 DPC 夹角 θ 的余弦值为

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

考点：面面垂直性质定理，四棱锥体积，利用空间向量求二面角

20. (本小题满分 13 分)

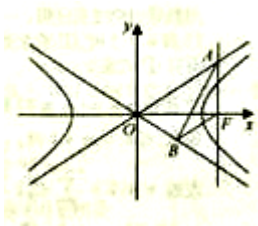
如图，已知双曲线 $C_n \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的右焦点 F ，点 A, B 分别在 C 的两条渐近线上， $AF \perp x$ 轴，

$AB \perp OB, BF \parallel OA (O$ 为坐标原点).

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 过 C 上一点 $P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ 的直线 $l: \frac{x_0 x}{a^2} - y_0 y = 1$ 与直线 AF 相交于点 M ，与直线 $x = \frac{3}{2}$ 相交于

点 N ，证明点 P 在 C 上移动时， $\left| \frac{MF}{NF} \right|$ 恒为定值，并求此定值.



【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. (2) $\frac{MF}{NF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：(1) 求双曲线 C 的方程就是要确定 a 的值，用 a, c 表示条件： $AF \perp x$ 轴， $AB \perp OB, BF \parallel OA$ ，

即可得：直线 OB 方程为 $y = -\frac{1}{a}x$ ，直线 BF 的方程为 $y = \frac{1}{a}(x - c)$ ，解得 $B(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a})$ 又直线 OA 的方程为 $y = \frac{1}{a}x$ ，则 $A(c, \frac{c}{a}), k_{AB} = \frac{3}{a}$ 又因为 $AB \perp OB$ ，所以 $\frac{3}{a}(-\frac{1}{a}) = -1$ ，解得 $a^2 = 3$ ，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 本题证明实质为计算 $\left| \frac{MF}{NF} \right|$ 的值. 分别用坐标表示直线 l 与 AF 的交点 $M(2, \frac{2x_0 - 3}{3y_0})$ 及直线 l 与直线 $x = \frac{3}{2}$

的交点为 $N(\frac{3}{2}, \frac{3x_0 - 3}{3y_0})$ ，并利用 $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1$ 化简： $\frac{MF^2}{NF^2} = \frac{4(2x_0 - 3)^2}{9[y_0^2 + (x_0 - 2)^2]} = \frac{4(2x_0 - 3)^2}{9[\frac{x_0^2}{3} - 1 + (x_0 - 2)^2]} = \frac{4}{3}$.

试题解析：(1) 设 $F(c, 0)$ ，因为 $b = 1$ ，所以 $c = \sqrt{a^2 + 1}$

直线 OB 方程为 $y = -\frac{1}{a}x$ ，直线 BF 的方程为 $y = \frac{1}{a}(x - c)$ ，解得 $B(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a})$

又直线 OA 的方程为 $y = \frac{1}{a}x$ ，则 $A(c, \frac{c}{a}), k_{AB} = \frac{3}{a}$ 。

又因为 $AB \perp OB$ ，所以 $\frac{3}{a}(-\frac{1}{a}) = -1$ ，解得 $a^2 = 3$ ，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 。

(2) 由 (1) 知 $a = \sqrt{3}$ ，则直线 l 的方程为 $\frac{x_0 x}{3} - y_0 y = 1 (y_0 \neq 0)$ ，即 $y = \frac{x_0 x - 3}{3y_0}$

因为直线 AF 的方程为 $x = 2$ ，所以直线 l 与 AF 的交点 $M(2, \frac{2x_0 - 3}{3y_0})$

直线 l 与直线 $x = \frac{3}{2}$ 的交点为 $N(\frac{3}{2}, \frac{\frac{3}{2}x_0 - 3}{3y_0})$

$$\text{则 } \frac{MF^2}{NF^2} = \frac{4(2x_0 - 3)^2}{9[y_0^2 + (x_0 - 2)^2]}$$

因为是 C 上一点，则 $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1$ ，代入上式得

$$\frac{MF^2}{NF^2} = \frac{4(2x_0 - 3)^2}{9[y_0^2 + (x_0 - 2)^2]} = \frac{4(2x_0 - 3)^2}{9[\frac{x_0^2}{3} - 1 + (x_0 - 2)^2]} = \frac{4}{3}$$
，所求定值为 $\frac{MF}{NF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

考点：双曲线方程，直线的交点

21. (满分 14 分) 随机将 $1, 2, \dots, 2n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ 这 $2n$ 个连续正整数分成 A, B 两组，每组 n 个数，A 组最小数为 a_1 ，最大数为 a_2 ；B 组最小数为 b_1 ，最大数为 b_2 ，记 $\xi = a_2 - a_1, \eta = b_2 - b_1$

(1) 当 $n = 3$ 时，求 ξ 的分布列和数学期望；

(2) 令 C 表示事件 ξ 与 η 的取值恰好相等，求事件 C 发生的概率 $p(c)$ ；

(3) 对 (2) 中的事件 C, \bar{c} 表示 C 的对立事件，判断 $p(c)$ 和 $p(\bar{c})$ 的大小关系，并说明理由。

【答案】(1)

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$$E\xi = \frac{7}{2}. \quad (2) \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时 } P(C) = \frac{2(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2k}^k)}{C_{2n}^n}$$

(3) 当 $n = 2$ 时, $P(C) > P(\bar{C})$; 当 $n \geq 3$ 时, $P(C) < P(\bar{C})$.

【解析】

试题分析：(1) 当 $n = 3$ 时，将 6 个正整数平均分成 A, B 两组，不同的分组方法共有 $C_6^3 = 20$ 种， ξ 所有可能

值为 2,3,4,5, 对应组数分别为 4,6,6,4, 对应概率为 $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}$, $E\xi = 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{2}$. (2)

ξ 和 η 恰好相等的所有可能值为 $n-1, n, n+1, \dots, 2n-2$. 当 ξ 和 η 恰好相等且等于 $n-1$ 时, 不同的分组方法有 2 种; 当 ξ 和 η 恰好相等且等于 n 时, 不同的分组方法有 2 种; 当 ξ 和 η 恰好相等且等于 $n+1$ 时, 不同的分组方法有 $2C_{2n}^1$ 种; 当 ξ 和 η 恰好相等且等于 $n+2$ 时, 不同的分组方法有 $2C_{2n}^2$ 种; 以此类推: ξ 和 η 恰好相等且等于 $n+k(k=1,2,\dots,n-2), (n \geq 3)$ 时, 不同的分组方法有 $2C_{2n}^k$ 种; 所以当 $n=2$ 时, $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

当 $n \geq 3$ 时 $P(C) = \frac{2(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2n}^k)}{C_{2n}^n}$ (3) 先归纳: 当 $n=2$ 时, $P(\bar{C}) = \frac{1}{3}$, 因此 $P(C) > P(\bar{C})$, 当 $n \geq 3$ 时, $P(C) < P(\bar{C})$,

即证当 $n \geq 3$ 时 $P(C) = \frac{2(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2n}^k)}{C_{2n}^n} < \frac{1}{2}$, $4(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2n}^k) < C_{2n}^n$, 这可用数学归纳法证明. 当 $n=m+1$ 时,

$4(2 + \sum_{k=1}^{m-2} C_{2m}^k) = 4(2 + \sum_{k=1}^{m-2} C_{2m}^k) + 4C_{2m+2}^{m+1} < C_{2m}^m + 4C_{2m+2}^{m+1}$, 利用阶乘作差 $C_{2m+2}^{m+1} - (C_{2m}^m + 4C_{2m+2}^{m+1})$ 可得大小.

试题解析: (1) 当 $n=3$ 时, ξ 所有可能值为 2,3,4,5. 将 6 个正整数平均分成 A, B 两组, 不同的分组方法共有

$C_6^3 = 20$ 种, 所以 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$$E\xi = 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{2}.$$

(2) ξ 和 η 恰好相等的所有可能值为 $n-1, n, n+1, \dots, 2n-2$.

又 ξ 和 η 恰好相等且等于 $n-1$ 时, 不同的分组方法有 2 种;

ξ 和 η 恰好相等且等于 n 时, 不同的分组方法有 2 种;

ξ 和 η 恰好相等且等于 $n+k(k=1,2,\dots,n-2), (n \geq 3)$ 时, 不同的分组方法有 $2C_{2n}^k$ 种;

所以当 $n=2$ 时, $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

当 $n \geq 3$ 时 $P(C) = \frac{2(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2n}^k)}{C_{2n}^n}$

(3) 由 (2) 当 $n=2$ 时, $P(\bar{C}) = \frac{1}{3}$, 因此 $P(C) > P(\bar{C})$,

而当 $n \geq 3$ 时, $P(C) < P(\bar{C})$, 理由如下:

$$P(C) < P(\bar{C}), \text{ 等价于 } 4(2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{2n}^k) < C_{2n}^n \text{ ①}$$

用数学归纳法来证明：

1° 当 $n=3$ 时，①式左边 $= 4(2 + C_2^1) = 16$ ，①式右边 $= C_3^3 = 20$ ，所以①式成立

2° 假设 $n=m(m \geq 3)$ 时①式成立，即 $4(2 + \sum_{k=1}^{m-2} C_{2k}^k) < C_{2m}^m$ 成立

那么，当 $n=m+1$ 时，①式左边 $= 4(2 + \sum_{k=1}^{m-1} C_{2k}^k) = 4(2 + \sum_{k=1}^{m-2} C_{2k}^k) + 4C_{2m-2}^{m-1} < C_{2m}^m + 4C_{2m-2}^{m-1}$

$$= \frac{(2m)!}{m!m!} + \frac{4 \times (2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!} = \frac{(m+1)^2 (2m)(2m-2)!(4m-1)}{(m+1)!(m+1)!}$$

$$< \frac{(m+1)^2 (2m)(2m-2)!(4m)}{(m+1)!(m+1)!} = C_{2m+2}^{m+1} \cdot \frac{2(m-1)m}{(2m+1)(2m-1)} < C_{2m+2}^{m+1} = \text{①式右边}$$

即当 $n=m+1$ 时①式也成立

综合 1° 2° 得，对于 $n \geq 3$ 的所有正整数，都有 $P(C) < P(\bar{C})$ 成立

考点：概率分布及数学期望，概率，组合性质，数学归纳法