1994年广东高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．共150分，考试时间120分钟．

第Ⅰ卷(选择题共65分)

一、选择题：本大题共15小题；第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(15)题每小题5分，共65分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

(1) 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}$ (　　)

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0,1\}$

(C) $\{0,1,4\}$　　(D) $\{0,1,2,3,4\}$

(2) 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，那么实数 k 的取值范围是 (　　)

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(0,2)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(0,1)$

(3) 极坐标方程 $\rho=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ 所表示的曲线是 (　　)

(A) 双曲线　　(B) 椭圆　　(C) 抛物线　　(D) 圆

(4) 设 θ 是第二象限的角，则必有 (　　)

(A) $\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}>\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}$　　(B) $\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}<\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}$

(C) $\sin\dfrac{\theta}{2}>\cos\dfrac{\theta}{2}$　　(D) $\sin\dfrac{\theta}{2}<\cos\dfrac{\theta}{2}$

(5) 某种细菌在培养过程中，每20分钟分裂一次(一个分裂为两个)．经过3小时，这种细菌由1个可繁殖成 (　　)

(A) 511个　　(B) 512个　　(C) 1023个　　(D) 1024个

(6) 在下列函数中，以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期的函数是 (　　)

(A) $y=\sin 2x+\cos 4x$　　(B) $y=\sin 2x\cos 4x$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$　　(D) $y=\sin 2x\cos 2x$

(7) 已知正六棱台的上、下底面边长分别为2和4，高为2，则其体积为 (　　)

(A) $32\sqrt{3}$　　(B) $28\sqrt{3}$　　(C) $24\sqrt{3}$　　(D) $20\sqrt{3}$

(8) 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是　　(　　)

(A) 1　　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

(9) 如果复数 z 满足 $|z+i|+|z-i|=2$，那么 $|z+i+1|$ 的最小值是　　(　　)

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

(10) 有甲、乙、丙三项任务，甲需 2 人承担，乙、丙各需 1 人承担．从 10 人中选派 4 人承担这三项任务，不同的选法共有　　(　　)

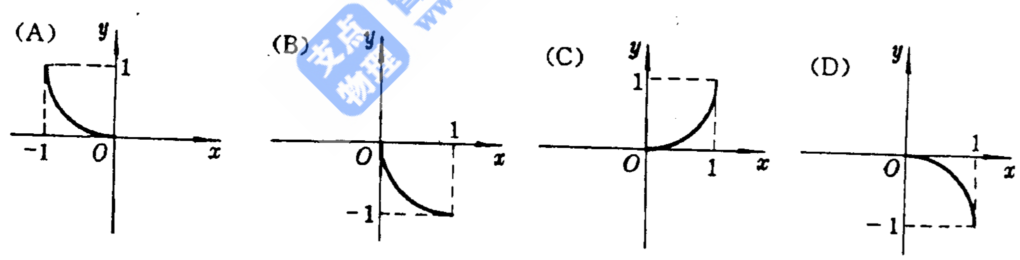
(A) 1260 种　　(B) 2025 种　　(C) 2520 种　　(D) 5040 种

(11) 对于直线 m、n 和平面 α、β，$\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是　　(　　)

(A) $m\perp n$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$　　(B) $m\perp n$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$

(C) $m/\!/n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$　　(D) $m/\!/n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$

(12) 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是　　(　　)



(13) 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半，且 $AB=BC=CA=2$，则球面面积是　　(　　)

(A) $\dfrac{16}{9}\pi$　　(B) $\dfrac{8}{3}\pi$　　(C) 4π　　(D) $\dfrac{64}{9}\pi$

(14) 函数 $y=\arccos(\sin x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是　　(　　)

(A) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$　　(B) $\left[0,\dfrac{5\pi}{6}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　(D) $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$

(15) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函

数 $h(x)$之和，如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) $g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题共 85 分)

二、填空题（本大题共 5 小题，共 6 个空格；每空格 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上）

(16) 在$(3-x)^7$的展开式中，x^5的系数是__________．(用数字作答)

(17) 抛物线 $y^2=8-4x$ 的准线方程是_________________，圆心在该抛物线的顶点且与其准线相切的圆的方程是____________________．

(18) 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\operatorname{ctg}\theta$的值是______________．

(19) 设圆锥底面圆周上两点 A、B 间的距离为 2，圆锥顶点到直线 AB 的距离为$\sqrt{3}$，AB 和圆锥的轴的距离为 1，则该圆锥的体积为__________．

(20) 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1，a_2，$\cdots a_n$，共 n 个数据，我们规定所测量物理量的“最佳近似值” a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小．依此规定，从 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 推出的 $a=$__________．

三、解答题(本大题共 5 小题，共 61 分；解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

(21)（本小题满分 11 分）

已知 $z=1+i$.

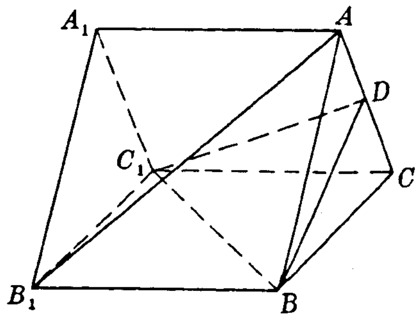
(1)设 $\omega=z^2+3\bar{z}-4$，求 ω的三角形式；

(2)如果 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$，求实数 a，b 的值.

(22)（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\text{tg}x$，$x\in(0,\ \dfrac{\pi}{2})$．若 x_1，$x_2\in(0,\ \dfrac{\pi}{2})$，且 $x_1\neq x_2$，证明 $\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

(23)（本小题满分 12 分）

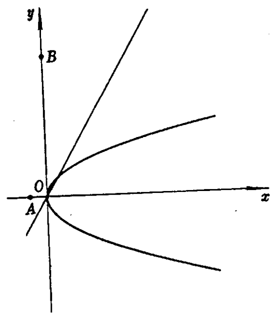


如图，已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱，D 是 AC 中点．

(1)证明 AB_1∥平面 DBC_1；

(2)假设 $AB_1\perp BC_1$，求以 BC_1 为棱，DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角 α 的度数．

(24)（本小题满分 12 分）



已知直线 l 过坐标原点，抛物线 C 顶点在原点，焦点在 x 轴正半轴上．若点 $A(-1,0)$ 和点 $B(0，8)$ 关于 l 的对称点都在 C 上，求直线 l 和抛物线 C 的方程．

(25)（本小题满分 14 分）

设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，其前 n 项和为 S_n，并且对于所有的自然数 n，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项．

(1)写出数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式(写出推证过程)；

(3)令 $b_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)(n\in\mathbf{N})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)$.

参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1．C　2．D　3．D　4．A　5．B　6．D　7．B　8．A　9．A

10．C　11．C　12．B　13．D　14．B　15．C

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16．-189　17．$x=3$，$(x-2)^2+y^2=1$　18．$-\dfrac{3}{4}$　19．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

20. $\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$

三、解答题

21．本小题考查共轭复数、复数的三角形式等基础知识及运算能力．

解：(1)由 $z=1+i$，有

$\omega=z^2+3\overline{z}-4$

$=(1+i)^2+3\overline{(1+i)}-4$

$=2i+3(1-i)-4=-1-i$，

ω的三角形式是$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$.

(2)由 $z=1+i$，有

$$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\frac{(1+i)^2+a(1+i)+b}{(1+i)^2-(1+i)+1}$$

$$=\frac{(a+b)+(a+2)i}{i}$$

$$=(a+2)-(a+b)i$$

由题设条件知$(a+2)-(a+b)i=1-i$.

根据复数相等的定义，得$\begin{cases}a+2=1\\-(a+b)=-1\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

22．本小题考查三角函数基础知识、三角函数性质及推理能力．

证明：

$$\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}$$

$$=\frac{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}{\cos x_1\cos x_2}$$

$$=\frac{\sin\left(x_1+x_2\right)}{\cos x_1\cos x_2}$$

$$=\frac{2\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}$$

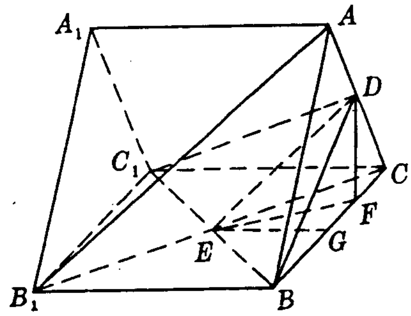
∵x_1，x_2∈(0，$\frac{\pi}{2}$)，$x_1\neq x_2$，

∴$2\sin(x_1+x_2)>0$，$\cos x_1\cos x_2>0$，且 $0<\cos(x_1-x_2)<1$，

从而有 $0<\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)<1+\cos(x_1+x_2)$，

由此得 $\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2>=\frac{2\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}$，∴$\frac{1}{2}(\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2)>\mathrm{tg}\frac{x_1+x_2}{2}$，

即 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2})$



23．本小题考查空间线面关系、正棱柱的性质、空间想象能力和逻辑推理能力．

(1)证明：

∵$A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱，∴四边形 B_1BCC_1 是矩形．

连结 B_1C 交 BC_1 于 E，则 $B_1E=EC$．连结 DE．

在△AB_1C 中，∵$AD=DC$，∴$DE\,//\,AB_1$．

又 $AB_1\not\subset$ 平面 DBC_1，$DE\subset$ 平面 DBC_1，∴$AB_1\,//$ 平面 DBC_1．

(2)解：作 $DF\perp BC$，垂足为 F，则 $DF\perp$ 面 B_1BCC_1，连结 EF，则 EF 是 ED 在平面 B_1BCC_1 上的射影．

∵$AB_1\perp BC_1$，

由(1)知 $AB_1\,//\,DE$，∴$DE\perp BC_1$，则 $BC_1\perp EF$，∴∠DEF 是二面角 α 的平面角．

设 $AC=1$，则 $DC=\frac{1}{2}$．∵△ABC 是正三角形，∴在 Rt△DCF 中，

$DF=DC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$CF=DC\cdot\cos C=\frac{1}{4}$．取 BC 中点 G．∵$EB=EC$，∴$EG\perp BC$．

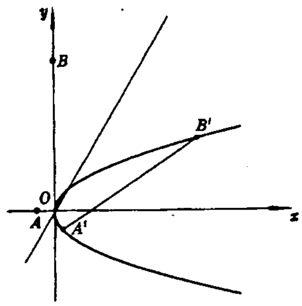
在 Rt△BEF 中，

$EF^2=BF\cdot GF$，又 $BF=BC-FC=\frac{3}{4}$，$GF=\frac{1}{4}$，

∴$EF^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$，即 $EF=\frac{\sqrt{3}}{4}$．∴$\mathrm{tg}\angle DEF=\frac{DF}{EF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=1$．∴∠$DEF=45°$．

故二面角 α 为 45°．

24．本小题考查直线与抛物线的基本概念和性质，解析几何的基本思想方法以及综合运用知识解决问题的能力.



解法一：依题设抛物线 C 的方程可写为

$$y^2=2px \quad (p>0),$$

且 x 轴和 y 轴不是所求直线，又 l 过原点，因而可设 l 的方程为

$$y=kx \quad (k\neq 0). \quad ①$$

设 A'、B' 分别是 A、B 关于 l 的对称点，因而 $A'A\perp l$，直线 $A'A$ 的方程为

$$y=-\frac{1}{k}(x+1) \quad ②$$

由①、②联立解得 AA' 与 l 的交点 M 的坐标为 $\left(-\frac{1}{k^2+1},-\frac{k}{k^2+1}\right)$.

又 M 为 AA' 的中点，从而点 A' 的坐标为

$$x_{A'}=2\left(-\frac{1}{k^2+1}\right)+1=\frac{k^2-1}{k^2+1},$$

$$y_{A'}=2\left(\frac{-k}{k^2+1}\right)+0=-\frac{2k}{k^2+1}. \quad ③$$

同理得点 B' 的坐标为

$$x_{B'}=\frac{16k}{k^2+1}, \quad y_{B'}=\frac{8(k^2-1)}{k^2+1}. \quad ④$$

又 A'、B' 均在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，由③得

$\left(-\frac{2k}{k^2+1}\right)^2=2p\cdot\frac{k^2-1}{k^2+1}$，由此知 $k\neq\pm 1$，

即 $$p=\frac{2k^2}{k^4-1} \quad ⑤$$

同理由④得 $\left(\frac{8(k^2-1)}{k^2+1}\right)^2=2p\cdot\frac{16k}{k^2+1}$.

即 $$p=\frac{2(k^2-1)^2}{(k^2+1)k}.$$

从而 $\dfrac{2k^2}{k^4-1}=\dfrac{2\left(k^2-1\right)^2}{\left(k^2+1\right)k}$，

整理得 $k^2-k-1=0$.

解得 $k_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$k_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

但当 $k=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时，由③知 $x_{A'}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}<0$，

这与 A' 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上矛盾，故舍去 $k_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

设 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，则直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$.

将 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入⑤，求得 $p=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以直线方程为

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x.$$

抛物线方程为

$$y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x.$$

解法二：设点 A、B 关于 l 的对称点分别为 $A'(x_1$、$y_1)$、$B'(x_2，y_2)$，则

$$|OA'|=|OA|=1，|OB'|=|OB|=8.$$

设由 x 轴正向到 OB' 的转角为 α，则

$x_2=8\cos\alpha$，$y_2=8\sin\alpha$. ①

因为 A'、B' 为 A、B 关于直线 l 的对称点，而 $\angle BOA$ 为直角，故 $\angle B'OA'$ 为直角，因此

$x_1=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$，$y_1=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$， ②

由题意知 $x_1>0$，$x_2>0$，故 α 为第一象限角.

因为 A'、B' 都在抛物线 $y^2=2px$ 上，将①、②代入得

$$\cos^2\alpha=2p\cdot\sin\alpha，64\sin^2\alpha=2p\cdot 8\cos\alpha.$$

∴$8\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$,

∴$2\sin\alpha=\cos\alpha$,

解得 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

将$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$代入$\cos^2\alpha=2p\sin\alpha$得

$$p=\frac{\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

∴抛物线 C 的方程为$y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$.

因为直线 l 平分$\angle B'OB$，故 l 的斜率

$$k=tg\left[\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

∴直线 l 的方程为$y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$.

25．本小题考查等差数列、等比数列、数列极限等基础知识考查逻辑推理能力和分析问题与解决问题的能力.

解：(1)由题意，当 $n=1$ 时有$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1}$，$S_1=a_1$,

∴$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1}$,

解得 $a_1=2$.

当 $n=2$ 时有$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2}$，$S_2=a_1+a_2$，$a_1=2$ 代入，整理得

$$(a_2-2)^2=16.$$

由 $a_2>0$，解得 $a_2=6$.

当 $n=3$ 时有 $\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2S_3}$，$S_3=a_1+a_2+a_3$，将 $a_1=2$，$a_2=6$ 代入，整理得

$$(a_3-2)^2=64.$$

由 $a_3>0$，解得 $a_3=10$.

故该数列的前 3 项为 2，6，10.

(2)解法一：由(1)猜想数列$\{a_n\}$有通项公式 $a_n=4n-2$.

下面用数学归纳法证明数列$\{a_n\}$的通项公式是

$a_n=4n-2$　$(n\in N)$.

①当 $n=1$ 时，因为 $4\times1-2=2$，又在(1)中已求出 $a_1=2$，所以上述结论成立.

②假设 $n=k$ 时结论成立，即有 $a_k=4k-2$．由题意，有

$$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2S_k},$$

将 $a_k=4k-2$ 代入上式，得 $2k=\sqrt{2S_k}$，解得 $S_k=2k^2$.

由题意，有 $\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}}$，$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$，

将 $S_k=2k^2$ 代入，得 $\left(\frac{a_{k+1}+2}{2}\right)^2=2(a_{k+1}+2k^2)$，整理得 $a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4-16k^2=0$.

由 $a_{k+1}>0$，解得 $a_{k+1}=2+4k$．所以 $a_{k+1}=2+4k=4(k+1)-2$.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，上述结论成立.

根据①、②，上述结论对所有的自然数 n 成立.

解法二：由题意，有 $\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}\left(n\in N\right)$，整理得 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$，

由此得 $S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2$，

$\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}[(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2]$，

整理得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$，

由题意知　$a_{n+1}+a_n\neq0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=4$.

即数列$\{a_n\}$为等差数列，其中 $a_1=2$，公差 $d=4$．$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1)$，

即通项公式为 $a_n=4n-2$.

(3)解：令 $c_n=b_n-1$，则

$$c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}-2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)+\left(\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1},$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n-n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+1}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(b_1+b_2+\cdots+b_n-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$