

2004 年河南高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径，
球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 6 分，共 60。

1. $(1-i)^2 \cdot i =$ ()
 A. $2-2i$ B. $2+2i$ C. -2 D. 2
2. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$. 若 $f(a) = b$. 则 $f(-a) =$ ()
 A. b B. $-b$ C. $\frac{1}{b}$ D. $-\frac{1}{b}$
3. 已知 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 均为单位向量，它们的夹角为 60° ，那么 $|\mathbf{a}+3\mathbf{b}| =$ ()
 A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. 4
4. 函数 $y = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$ 的反函数是 ()
 A. $y = x^2 - 2x + 2 (x < 1)$ B. $y = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$
 C. $y = x^2 - 2x (x < 1)$ D. $y = x^2 - 2x (x \geq 1)$
5. $(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中常数项是 ()
 A. 14 B. -14 C. 42 D. -42
6. 设 A、B、I 均为非空集合，且满足 $A \subseteq B \subseteq I$ ，则下列各式中错误的是 ()
 A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
 C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I B$
7. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点为 F_1 、 F_2 ，过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点为 P，则 $|\overrightarrow{PF_2}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 4

8. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q, 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ B. $[-2, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-4, 4]$

9. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

10. 已知正四面体 ABCD 的表面积为 S, 其四个面的中心分别为 E、F、G、H. 设四面体 EFGH 的表面积为 T, 则 $\frac{T}{S}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2, 3, 4, 5, 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为 ()

- A. $\frac{13}{125}$ B. $\frac{16}{125}$ C. $\frac{18}{125}$ D. $\frac{19}{125}$

12. $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 的解集是_____.

14. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA、PB, 切点分别为 A、B, $\angle APB=60^\circ$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1=1$, $a_n=a_1+2a_2+3a_3+\dots+(n-1)a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 则 $\{a_n\}$ 的通项

$$a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ \text{_____}, & n \geq 2. \end{cases}$$

16. 已知 a 、 b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a 、 b 在 α 上的射影有可能是_____.

- ①两条平行直线
- ②两条互相垂直的直线
- ③同一条直线
- ④一条直线及其外一点

在一面结论中, 正确结论的编号是_____ (写出所有正确结论的编号).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

18. (本小题满分 12 分)

一接待中心有 A、B、C、D 四部热线电话, 已知某一时刻电话 A、B 占线的概率均为 0.5, 电话 C、D 占线的概率均为 0.4, 各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有 ξ 部电话占线. 试求随机变量 ξ 的概率分布和它的期望.

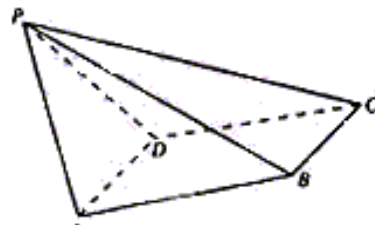
19. (本小题满分 12 分)

已知 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$ 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120° .

- (I) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离,
- (II) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



21. (本小题满分 12 分)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 与直线 $l: x + y = 1$ 相交于两个不同的点 A、B.

(I) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围:

(II) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 且 $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.

22. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, 且

$$a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k,$$

$$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k,$$

其中 $k=1, 2, 3, \dots$.

(I) 求 a_3, a_5 ;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2004 年高考理科数学答案

一、选择题

DBCBA BCCBADB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. $\{x | x \geq -1\}$ 14. $x^2 + y^2 = 4$ 15. $\frac{n!}{2}$ 16. ①②④

三、解答题

17. 本小题主要考查三角函数基本公式和简单的变形，以及三角函数的有关性质. 满分 12 分.

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{2 - 2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{2(1 - \sin x \cos x)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin x \cos x) \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ，最大值是 $\frac{3}{4}$ ，最小值是 $\frac{1}{4}$.

18. 本小题主要考查离散型随机变量分布列和数学期望等概念. 考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

解: $P(\xi = 0) = 0.5^2 \times 0.6^2 = 0.09.$

$$P(\xi = 1) = C_2^1 \times 0.5^2 \times 0.6^2 + C_2^1 \times 0.5^2 \times 0.4 \times 0.6 = 0.3$$

$$P(\xi = 2) = C_2^2 \times 0.5^2 \times 0.6^2 + C_2^1 C_2^1 \times 0.5^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_2^2 \times 0.5^2 \times 0.4^2 = 0.37.$$

$$P(\xi = 3) = C_2^2 C_2^1 \times 0.5^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_2^1 C_2^2 \times 0.5^2 \times 0.4^2 = 0.2$$

$$P(\xi = 4) = 0.5^2 \times 0.4^2 = 0.04$$

于是得到随机变量 ξ 的概率分布列为:

ξ	0	1	2	3	4
P	0.09	0.3	0.37	0.2	0.04

所以 $E \xi = 0 \times 0.09 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.37 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.04 = 1.8.$

19. 本小题主要考查导数的概率和计算，应用导数研究函数性质的方法，考查分类讨论的数学思想. 满分 12 分.

解: 函数 $f(x)$ 的导数:

$$f'(x) = 2xe^{ax} + ax^2 e^{ax} = (2x + ax^2)e^{ax}.$$

(I) 当 $a=0$ 时, 若 $x < 0$, 则 $f'(x) < 0$, 若 $x > 0$, 则 $f'(x) > 0$.

所以当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

(II) 当 $a > 0$ 时, 由 $2x + ax^2 > 0$, 解得 $x < -\frac{2}{a}$ 或 $x > 0$,

由 $2x + ax^2 < 0$, 解得 $-\frac{2}{a} < x < 0$.

所以, 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 内为增函数, 在区间 $(-\frac{2}{a}, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数;

(III) 当 $a < 0$ 时, 由 $2x + ax^2 > 0$, 解得 $0 < x < -\frac{2}{a}$,

由 $2x + ax^2 < 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > -\frac{2}{a}$.

所以当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, -\frac{2}{a})$ 内为增函数, 在区间 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 内为减函数.

20. 本小题主要考查棱锥, 二面角和线面关系等基本知识, 同时考查空间想象能力和推理、运算能力. 满分 12 分.

(I) 解: 如图, 作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 垂足为点 O . 连结 OB 、 OA 、 OD 、 OB 与 AD 交于点 E , 连结 PE .

$\because AD \perp PB, \therefore AD \perp OB$,

$\because PA = PD, \therefore OA = OD$,

于是 OB 平分 AD , 点 E 为 AD 的中点, 所以 $PE \perp AD$.

由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角,

$\therefore \angle PEB = 120^\circ, \angle PEO = 60^\circ$

由已知可求得 $PE = \sqrt{3}$

$$\therefore PO = PE \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$.

(II) 解法一: 如图建立直角坐标系, 其中 O 为坐标原点, x 轴平行于 DA .

$P(0, 0, \frac{3}{2}), B(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0), PB$ 中点 G 的坐标为 $(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$. 连结 AG .

又知 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$. 由此得到:

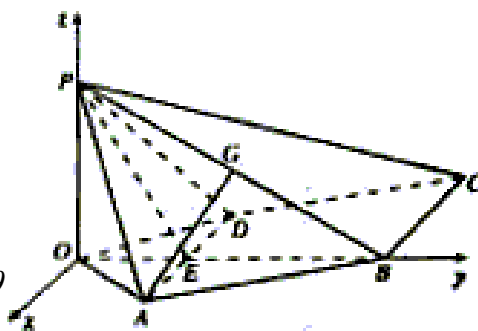
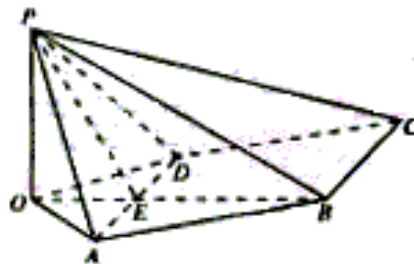
$$\overrightarrow{GA} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}),$$

$$\overrightarrow{PB} = (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}), \overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0).$$

于是有 $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

所以 $\overrightarrow{GA} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{PB}$. $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ

等于所求二面角的平面角,

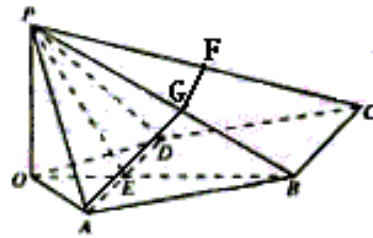


于是 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以所求二面角的大小为 $\pi - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

解法二：如图，取 PB 的中点 G，PC 的中点 F，连结 EG、AG、GF，则 $AG \perp PB$ ， $FG \parallel BC$ ， $FG = \frac{1}{2} BC$.

- ∵ $AD \perp PB$ ，∴ $BC \perp PB$ ， $FG \perp PB$ ，
- ∴ $\angle AGF$ 是所求二面角的平面角.
- ∵ $AD \perp$ 面 POB ，∴ $AD \perp EG$.
- 又 ∵ $PE = BE$ ，∴ $EG \perp PB$ ，且 $\angle PEG = 60^\circ$.



在 $Rt\triangle PEG$ 中， $EG = PE \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle PEG$ 中， $EG = \frac{1}{2} AD = 1$.

于是 $\tan \angle GAE = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\angle AGF = \pi - \angle GAE$.

所以所求二面角的大小为 $\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. (本小题主要考查直线和双曲线的概念和性质,平面向量的运算等解析几何的基本思想和综合解题能力. 满分 12 分.)

解：(I) 由 C 与 t 相交于两个不同的点，故知方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

有两个不同的实数解. 消去 y 并整理得

$$(1 - a^2) x^2 + 2ax - 2a^2 = 0. \tag{1}$$

所以 $\begin{cases} 1 - a^2 \neq 0. \\ 4a^4 + 8a^2(1 - a^2) > 0. \end{cases}$

解得 $0 < a < \sqrt{2}$ 且 $a \neq 1$.

双曲线的离心率

$$e = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}.$$

$$\because 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1,$$

$$\therefore e > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } e \neq \sqrt{2}$$

即离心率 e 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(0, 1)$

$$\because \overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB},$$

$$\therefore (x_1, y_1 - 1) = \frac{5}{12} (x_2, y_2 - 1).$$

$$\text{由此得 } x_1 = \frac{5}{12} x_2.$$

由于 $x_1 + x_2$ 都是方程①的根, 且 $1 - a^2 \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{17}{12} x_2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}.$$

$$\frac{5}{12} x_2^2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}.$$

$$\text{消去 } x_2, \text{ 得 } -\frac{2a^2}{1-a^2} = \frac{289}{60}$$

$$\text{由 } a > 0, \text{ 所以 } a = \frac{17}{13}$$

22. 本小题主要考查数列, 等比数列的概念和基本知识, 考查运算能力以及分析、归纳和推理能力. 满分 14 分.

$$\text{解: (I) } a_2 = a_1 + (-1)^1 = 0,$$

$$a_3 = a_2 + 3^1 = 3.$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^2 = 4,$$

$$a_5 = a_4 + 3^2 = 13,$$

所以, $a_3 = 3, a_5 = 13$.

$$(II) a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$$

$$= a_{2k-1} + (-1)^k + 3^k,$$

$$\text{所以 } a_{2k+1} - a_{2k-1} = 3^k + (-1)^k,$$

$$\text{同理 } a_{2k-1} - a_{2k-3} = 3^{k-1} + (-1)^{k-1},$$

.....

$$a_3 - a_1 = 3 + (-1).$$

$$\text{所以 } (a_{2k+1} - a_{2k-1}) + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) + \dots + (a_3 - a_1)$$

$$= (3^k + 3^{k-1} + \dots + 3) + [(-1)^k + (-1)^{k-1} + \dots + (-1)],$$

$$\text{由此得 } a_{2k+1} - a_1 = \frac{3}{2} (3^k - 1) + \frac{1}{2} [(-1)^k - 1],$$

于是 $a_{2k+1} = \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$.

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k-1} + (-1)^k \\ &= \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k \end{aligned}$$

$$= \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k = 1.$$

$\{a_n\}$ 的通项公式为:

当 n 为奇数时, $a_n = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$;

当 n 为偶数时, $a_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$.