绝密★启用前

2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

答案解析版

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】

先求出集合B再求出交集.

【详解】由题意得，$B=\{x|-1\le x\le 1\}$，则 $A\cap B=\{-1,0,1\}$．故选A.

【点睛】本题考查了集合交集的求法，是基础题.

2.若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 z =（　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据复数运算法则求解即可.

【详解】$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$．故选D.

【点睛】本题考查复数的商的运算，渗透了数学运算素养．采取运算法则法，利用方程思想解题.

3.《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了100学生，其中

阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有90位，阅读过《红楼梦》的学生共有80位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有60位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为（　）

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题先求出阅读过西游记的人数，进而得解.

【详解】由题意得，阅读过《西游记》的学生人数为90-80+60=70，则其与该校学生人数之比为70÷100=0．7．故选C．

【点睛】本题考查抽样数据的统计，渗透了数据处理和数学运算素养．采取去重法，利用转化与化归思想解题.

4.（$1+2x^2$）（$1+x$）^{4}的展开式中x^3的系数为

A. 12　　B. 16　　C. 20　　D. 24

【答案】A

【解析】

【分析】

本题利用二项展开式通项公式求展开式指定项的系数.

【详解】由题意得x^3的系数为$C_4^3+2C_4^1=4+8=12$，故选A.

【点睛】本题主要考查二项式定理，利用展开式通项公式求展开式指定项的系数.

5.已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前4项和为15，且$a_5=3a_3+4a_1$，则$a_3=$（　）

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

利用方程思想列出关于a_1，q的方程组，求出a_1，q，再利用通项公式即可求得a_3的值.

【详解】设正数的等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\begin{cases} a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=15, \\ a_1q^4=3a_1q^2+4a_1 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} a_1=1, \\ q=2 \end{cases}$，$\therefore a_3=a_1q^2=4$，故选C．

【点睛】应用等比数列前n项和公式解题时，要注意公比是否等于1，防止出错．

6.已知曲线$y=ae^x+x\ln x$在点$(1,ae)$处的切线方程为$y=2x+b$，则（　）

A. $a=e,b=-1$　　B. $a=e,b=1$　　C. $a=e^{-1},b=1$　　D. $a=e^{-1},b=-1$

【答案】D

【解析】

【分析】

通过求导数，确定得到切线斜率的表达式，求得，将点的坐标代入直线方程，求得b．

【详解】详解：$y'=ae^x+\ln x+1,$

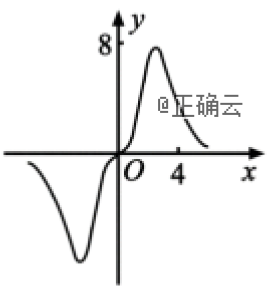
$k=y'|_{x=1}=ae+1=2$

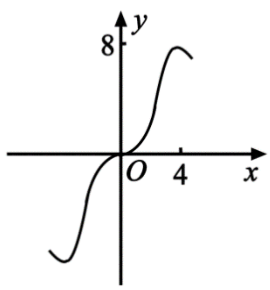
$\therefore a=e^{-1}$

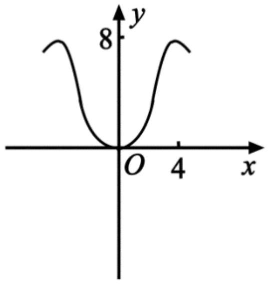
将$(1,1)$代入$y=2x+b$得$2+b=1,b=-1$，故选D．

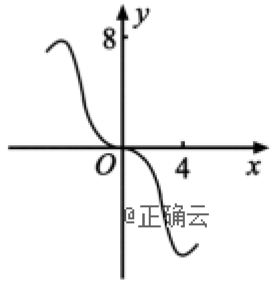
【点睛】准确求导数是进一步计算的基础，本题易因为导数的运算法则掌握不熟，二导致计算错误．求导要“慢”，计算要准，是解答此类问题的基本要求．

7.函数$y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$在$[-6,6]$的图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】

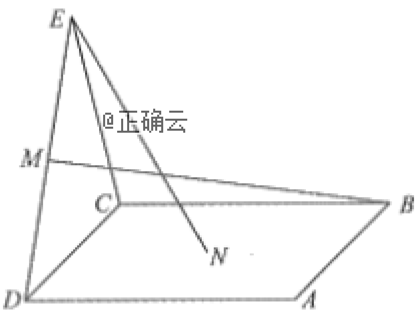
由分子、分母的奇偶性，易于确定函数为奇函数，由 $f(4)$ 的近似值即可得出结果．

【详解】设 $y=f(x)=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$，则 $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{2^{-x}+2^x}=-\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点成中心对称，排除选项C．又 $f(4)=\dfrac{2\times4^3}{2^4+2^{-4}}>0,$ 排除选项D；

$f(6)=\dfrac{2\times6^3}{2^6+2^{-6}}\approx7$，排除选项A，故选B．

【点睛】本题通过判断函数的奇偶性，缩小考察范围，通过计算特殊函数值，最后做出选择．本题较易，注重了基础知识、基本计算能力的考查．

8.如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，ΔECD 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD, M$ 是线段 ED 的中点，则（　）



A. $BM=EN$，且直线 BM,EN 是相交直线

B. $BM\neq EN$，且直线 BM,EN 是相交直线

C. $BM=EN$，且直线 BM,EN 是异面直线

D. $BM \neq EN$，且直线BM, EN 是异面直线

【答案】B

【解析】

【分析】

利用垂直关系，再结合勾股定理进而解决问题.

【详解】$\because \Delta BDE$，N 为BD中点M为DE中点，$\therefore$ BM，EN 共面相交，选项C，D为错．作$EO \perp CD$于O，连接ON，过M作$MF \perp OD$于F．

连BF，$\because$ 平面$CDE \perp$平面$ABCD$．

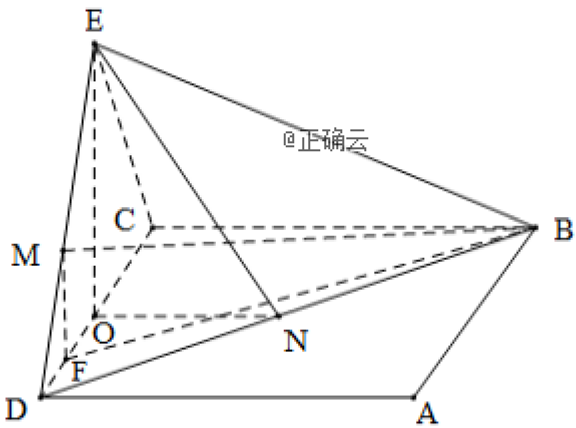
$EO \perp CD, EO \subset$平面CDE，$\therefore EO \perp$平面$ABCD$，$MF \perp$平面$ABCE$，

$\therefore \Delta MFB$与ΔEON均为直角三角形.

设正方形边长为2，易知$EO = \sqrt{3}$, $0N = 1$ $EN = 2$，

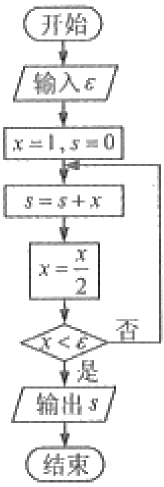
$MF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $BF = \sqrt{2^2 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2}$ $\therefore$ $BM = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{24}{4}} = \sqrt{7}$.

$\therefore BM \neq EN$，故选B.



【点睛】本题为立体几何中等问题，考查垂直关系，线面、线线位置关系.

9.执行如图所示的程序框图，如果输入的ε为0.01，则输出S的值等于（ ）



A. $2-\frac{1}{2^4}$　　B. $2-\frac{1}{2^5}$　　C. $2-\frac{1}{2^6}$　　D. $2-\frac{1}{2^7}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据程序框图，结合循环关系进行运算，可得结果.

【详解】$x=1$．　$S=0$，　$S=0+1$，　$x=\frac{1}{2}<0.01?$ 不成立

$S=0+1+\frac{1}{2}$，　$x=\frac{1}{4}<0.01?$ 不成立

$\vdots$

$S=0+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^6}$，　$x=\frac{1}{128}=0.0078125<0.01?$ 成立

输出 $S=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^6}=\frac{1-\frac{1}{2^7}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^7}\right)$，故选D.

【点睛】循环运算，何时满足精确度成为关键，加大了运算量，输出前项数需准确，此为易错点.

10.双曲线C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$的右焦点为$F$，点$P$在$C$的一条渐近线上，$O$为坐标原点，若$|PO|=|PF|$，则△$PFO$的面积为

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{x_1}{x_2}$　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查以双曲线为载体的三角形面积的求法，渗透了直观想象、逻辑推理和数学运算素养．采取公式法，利用数形结合、转化与化归和方程思想解题．

【详解】由 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$，．

$\because |PO|=|PF|$，$\therefore x_P=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

又P在C的一条渐近线上，不妨设为在 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，

$\therefore S_{\triangle PFO}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y_P|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，故选A．

【点睛】忽视圆锥曲线方程和两点间的距离公式的联系导致求解不畅，采取列方程组的方式解出三角形的高，便可求三角形面积．

11.设 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则（　）

A. $f\left(\log_5\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

B. $f\left(\log_8\dfrac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_5\dfrac{1}{4}\right)$

D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_5\dfrac{1}{4}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】

由已知函数为偶函数，把 $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$，$f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$，$f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$，转化为同一个单调区间上，再比较大小．

【详解】$\because f\left(x\right)$是R的偶函数，$\therefore f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)=f\left(\log_3 4\right)$.

$\therefore \log_3 4>1=2^0>2^{-\frac{3}{2}}$，又$f\left(x\right)$在(0，+∞)单调递减，$f\left(\log_3 4\right)<f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)<f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

，

$\therefore f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$，故选C.

【点睛】本题主要考查函数的奇偶性、单调性，考查学生转化与化归及分析问题解决问题的能力.

12.设函数$f\left(x\right)$=sin（$\omega x+\frac{\pi}{5}$）(ω>0)，已知$f\left(x\right)$在$\left[0,2\pi\right]$有且仅有5个零点，下述四个结论：

①$f\left(x\right)$在（$0,2\pi$）有且仅有3个极大值点

②$f\left(x\right)$在（$0,2\pi$）有且仅有2个极小值点

③$f\left(x\right)$在（$0,\frac{\pi}{10}$）单调递增

④ω的取值范围是[$\frac{12}{5},\frac{29}{10}$)

其中所有正确结论的编号是

A. ①④　　B. ②③　　C. ①②③　　D. ①③④

【答案】D

【解析】

【分析】

本题为三角函数与零点结合问题，难度大，可数形结合，分析得出答案，要求大，理解深度高，考查数形结合思想.

【详解】$\because f(x)=\sin\left(wx+\frac{\pi}{5}\right)(w>0)$，在$[0,2\pi]$有且仅有5个零点. ∴　$0\le x\le 2\pi$，

$\frac{1}{5}\le wx+\frac{\pi}{5}\le 2\pi w+\frac{\pi}{5}$，$\frac{12}{5}\le w<\frac{29}{10}$，④正确. 如图$x_1,x_2,x_3$为极大值点为3个，①正确；极小值点为2个或3个. ∴　②不正确.

当$0 < x < \frac{\pi}{10}$时，$\frac{\pi}{5} < wx + \frac{\pi}{f} < \frac{w\pi}{10} + \frac{\pi}{5}$，当$w = \frac{29}{10}$时，

$\frac{w\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{29\pi}{100} + \frac{20\pi}{100} = \frac{49\pi}{100} < \frac{\pi}{2}$.

∴ ③正确，故选D.

【点睛】极小值点个数动态的，易错，③正确性考查需认真计算，易出错.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知**a**，**b**为单位向量，且**a**•**b**=0，若$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - \sqrt{5}\boldsymbol{b}$，则$\cos < \vec{a}, \vec{c} > =$ ___________.

【答案】$\frac{2}{3}$.

【解析】

【分析】

根据$|\vec{c}|^2$结合向量夹角公式求出$|\vec{c}|$，进一步求出结果.

【详解】因为$\vec{c} = 2\vec{a} - \sqrt{5}\vec{b}$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，

所以$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2\vec{a}^2 - \sqrt{5}\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$，

$|\vec{c}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\sqrt{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 9$，所以$|\vec{c}| = 3$，

所以$\cos < \vec{a}, \vec{c} > = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$.

【点睛】本题主要考查平面向量的数量积、向量的夹角．渗透了数学运算、直观想象素养．使用转化思想得出答案.

14.记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1 \neq 0$，$a_2 = 3a_1$，则$\frac{S_{10}}{S_5} =$ ___________.

【答案】4.

【解析】

【分析】

根据已知求出a_1和d 的关系，再结合等差数列前n项和公式求得结果.

【详解】因$a_2 = 3a_1$，所以$a_1 + d = 3a_1$，即$2a_1 = d$，

所以 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d}{5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d}=\dfrac{100a_1}{25a_1}=4$.

【点睛】本题主要考查等差数列的性质、基本量的计算．渗透了数学运算素养．使用转化思想得出答案．

15.设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为___________.

【答案】$\left(3,\sqrt{15}\right)$

【解析】

【分析】

根据椭圆的定义分别求出 $\left|MF_1\right|$、$\left|MF_2\right|$，设出 M 的坐标，结合三角形面积可求出 M 的坐标.

【详解】由已知可得 $a^2=36, b^2=36, \therefore c^2=a^2-b^2=16, \therefore c=4$，

$\therefore \left|MF_1\right|=\left|F_1F_2\right|=2c=8$.

$\because \left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a=12, \left|MF_2\right|=4$.

设点 M 的坐标为 $\left(x_0, y_0\right)\left(x_0>0, y_0>0\right)$，则 $S_{\triangle MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|F_1F_2\right|\cdot y_0=4y_0$,

又 $S_{\triangle MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{8^2-2^2}=4\sqrt{15}, \therefore 4y_0=4\sqrt{15}$，解得 $y_0=\sqrt{15}$,

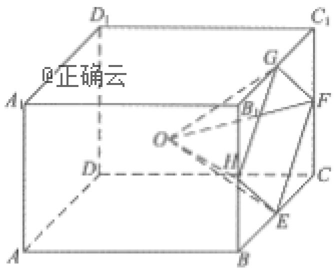
$\therefore \dfrac{x_0^2}{36}+\dfrac{\left(\sqrt{15}\right)^2}{20}=1$，解得 $x_0=3$（$x_0=-3$ 舍去），

\ M 的坐标为 $\left(3,\sqrt{15}\right)$.

【点睛】本题考查椭圆标准方程及其简单性质，考查数形结合思想、转化与化归的能力，很好的落实了直观想象、逻辑推理等数学素养.

16.学生到工厂劳动实践，利用 $3D$ 打印技术制作模型. 如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E, F, G, H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{cm}, AA_1=4\text{cm}$，$3D$ 打印所用原料密

度为$0.9g/cm^3$，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为__________ g .



【答案】118．8

【解析】

【分析】

根据题意可知模型的体积为四棱锥体积与四棱锥体积之差进而求得模型的体积，再求出模型的质量.

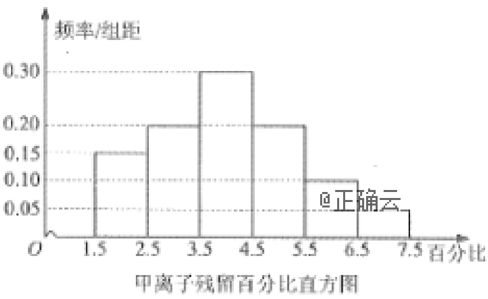
【详解】由题意得，四棱锥O-EFGH的底面积为$4\times6-4\times\frac{1}{2}\times2\times3=12cm^2$，其高为点O到底面$BB_1C_1C$的距离为3cm，则此四棱锥的体积为$V_1=\frac{1}{3}\times12\times3=12cm^2$．又长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为$V_2=4\times6\times6=144cm^2$，所以该模型体积为$V=V_2-V_1=144-12=132cm^2$，其质量为$0.9\times132=118.8g$.

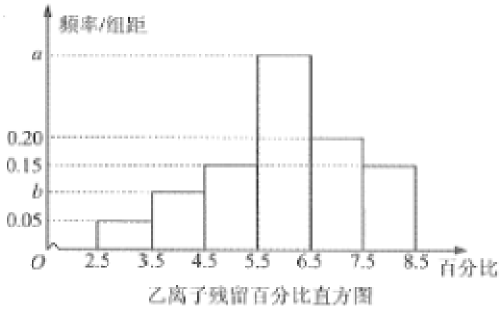
【点睛】此题牵涉到的是3D打印新时代背景下的几何体质量，忽略问题易致误，理解题中信息联系几何体的体积和质量关系，从而利用公式求解.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将200只小鼠随机分成A,B两组，每组100只，其中A组小鼠给服甲离子溶液，B组小鼠给服乙离子溶液.每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同.经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比.根据试验数据分别得到如下直方图：





记 C 为事件："乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5 "，根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a,b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.

【答案】(1) $a=0.35$， $b=0.10$；(2) 4.05， 6.

【解析】

【分析】

(1)由 $P(C)=0.70$ 可解得和 b 的值；(2)根据公式求平均数.

【详解】(1)由题得 $a+0.20+0.15=0.70$，解得 $a=0.35$，由

$0.05+b+0.15=1-P(C)=1-0.70$，解得 $b=0.10$.

(2)由甲离子的直方图可得，甲离子残留百分比的平均值为

$0.15\times2+0.20\times3+0.30\times4+0.20\times5+0.10\times6+0.05\times7=4.05$，

乙离子残留百分比的平均值为

$0.05\times3+0.10\times4+0.15\times5+0.35\times6+0.20\times7+0.15\times8=6$

【点睛】本题考查频率分布直方图和平均数，属于基础题.

18. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

（1）求 B；

（2）若 ΔABC 为锐角三角形，且 $c=1$，求 ΔABC 面积的取值范围.

【答案】(1) $B=\dfrac{\pi}{3}$;(2) $(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

【解析】

【分析】

(1)利用正弦定理化简题中等式，得到关于B的三角方程，最后根据A,B,C均为三角形内角解得$B=\frac{\pi}{3}$.(2)根据三角形面积公式$S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B$，又根据正弦定理和$\frac{12}{25}$得到$S_{\vartriangle ABC}$关于$C$的函数，由于$\vee ABC$是锐角三角形，所以利用三个内角都小于$\frac{\pi}{2}$来计算$C$的定义域，最后求解$S_{\vartriangle ABC}(C)$的值域.

【详解】(1)根据题意$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$由正弦定理得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，因为$0<A<\pi$，故$\sin A>0$，消去$\sin A$得$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$。

$0<B$，$0<\frac{A+C}{2}<\pi$因为故$\frac{A+C}{2}=B$或者$\frac{A+C}{2}+B=\pi$，而根据题意$A+B+C=\pi$，故$\frac{A+C}{2}+B=\pi$不成立，所以$\frac{A+C}{2}=B$，又因为$A+B+C=\pi$，代入得$3B=\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\vee ABC$是锐角三角形，又由前问$B=\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}<A,C<\frac{\pi}{2}$，$A+B+C=\pi$得到$A+C=\frac{2}{3}\pi$，故$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$又应用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{12}{25}$，由三角形面积公式有

$$S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}c^2\frac{a}{c}\cdot\sin B=\frac{1}{2}c^2\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sin\frac{2\pi}{3}\cot C-\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{8}\cot C+\frac{\sqrt{3}}{8}$$.又因

$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$,故$\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3}{8}\cot\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\vartriangle ABC}<\frac{3}{8}\cot\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\vartriangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故$S_{\vartriangle ABC}$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2})$

【点睛】这道题考查了三角函数的基础知识，和正弦定理或者余弦定理的使用（此题也可以用余弦定理求解），最后考查$\vee ABC$是锐角三角形这个条件的利用。考查的很全面，是一道很好的考题.

19.图1是由矩形$ADEB$，Rt△ABC和菱形$BFGC$组成的一个平面图形，其中AB=1，BE=BF=2，∠FBC=60°，将其沿AB，BC折起使得BE与BF重合，连结DG，如图2.

（1）证明：图2中的A，C，G，D四点共面，且平面ABC⊥平面$BCGE$;

（2）求图2中的二面角$B-CG-A$的大小.

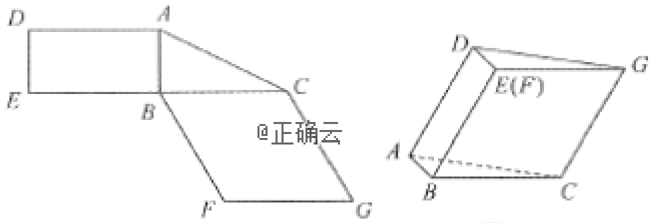


图 1　　图 2

【答案】(1)见详解；(2) 30°.

【解析】

【分析】

(1)因为折纸和粘合不改变矩形$ABED$，$Rt\triangle ABC$和菱形$BFGC$内部的夹角，所以$AD//BE$，$BF//CG$依然成立，又因E和F粘在一起，所以得证.因为AB是平面$BCGE$垂线，所以易证.(2)在图中找到$B-CG-A$对应的平面角，再求此平面角即可.于是考虑B关于GC的垂线，发现此垂足与A的连线也垂直于CG.按照此思路即证.

【详解】(1)证：∵ $AD//BE$，$BF//CG$，又因为E和F粘在一起.

∴ $AD//CG$，A，C，G，D四点共面.

又∵ $AB\perp BE, AB\perp BC$.

∴ $AB\perp$平面BCGE，∵ $AB\subset$平面ABC，∴ 平面ABC$\perp$平面BCGE，得证.

(2)过B作$BH\perp GC$延长线于H，连结AH，因为AB$\perp$平面BCGE，所以$AB\perp GC$

而又$BH\perp GC$，故$GC\perp$平面HAB，所以$AH\perp GC$.又因为$BH\perp GC$所以$\angle BHA$是二面角$B-CG-A$的平面角，而在$\triangle BHC$中$\angle BHC=90^{\circ}$，又因为$\angle FBC=60^{\circ}$故$\angle BCH=60^{\circ}$，所以$BH=BC\sin 60^{\circ}=\sqrt{3}$.

而在$\triangle ABH$中$\angle ABH=90^{\circ}$，$\angle BHA=\arctan\dfrac{AB}{BH}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=30^{\circ}$，即二面角$B-CG-A$的度数为$30^{\circ}$.

【点睛】很新颖的立体几何考题。首先是多面体粘合问题，考查考生在粘合过程中哪些量是不变的。再者粘合后的多面体不是直棱柱，建系的向量解法在本题中略显麻烦，突出考查几何方法。最后将求二面角转化为求二面角的平面角问题考查考生的空间想象能力。

20.已知函数$f(x)=2x^3-ax^2+b$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由.

【答案】(1)见详解；(2) $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$.

【解析】

【分析】

(1)先求 $f(x)$ 的导数，再根据的范围分情况讨论函数单调性；(2)

根据的各种范围，利用函数单调性进行最大值和最小值的判断，最终得出,b的值.

【详解】(1)对 $f(x)=2x^3-ax^2+b$ 求导得 $f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\frac{a}{3})$.所以有

当 $a<0$时，$(-\infty,\frac{a}{3})$ 区间上单调递增，$(\frac{a}{3},0)$ 区间上单调递减，$(0,+\infty)$ 区间上单调递增；

当 $a=0$时，$(-\infty,+\infty)$ 区间上单调递增；

当 $a>0$ 时，$(-\infty,0)$ 区间上单调递增，$(0,\frac{a}{3})$ 区间上单调递减，$(\frac{a}{3},+\infty)$ 区间上单调递增.

(2)若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 有最大值1和最小值-1，所以

若 $a<0$，$(-\infty,\frac{a}{3})$ 区间上单调递增，$(\frac{a}{3},0)$ 区间上单调递减，$(0,+\infty)$ 区间上单调递增；

此时在区间 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $f(0)=-1$，$f(1)=1$ 代入解得 $b=-1$，$a=0$，与 $a<0$ 矛盾，所以 $a<0$不成立.

若 $a=0$，$(-\infty,+\infty)$ 区间上单调递增；在区间 $[0,1]$.所以 $f(0)=-1$，$f(1)=1$ 代入解得 $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$.

若 $0<a\le 2$，$(-\infty,0)$ 区间上单调递增，$(0,\frac{a}{3})$ 区间上单调递减，$(\frac{a}{3},+\infty)$ 区间上单调递增

.

即 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{a}{3})$ 单调递减，在区间 $(\frac{a}{3},1)$ 单调递增，所以区间 $[0,1]$ 上最小值为 $f(\frac{a}{3})$

而 $f(0)=b, f(1)=2-a+b\ge f(0)$，故所以区间 $[0,1]$ 上最大值为 $f(1)$.

即 $\begin{cases}2(\frac{a}{3})^3-a(\frac{a}{3})^2+b=-1\\2-a+b=1\end{cases}$ 相减得 $2-a+\frac{a^3}{27}=2$，即 $a(a-3\sqrt{3})(a+3\sqrt{3})=0$，又因为

$0<a\le 2$，所以无解.

若$2<a\le 3$，$(-\infty,0)$区间上单调递增，$(0,\frac{a}{3})$区间上单调递减，$(\frac{a}{3},+\infty)$区间上单调递增

.

即$f(x)$在区间$(0,\frac{a}{3})$单调递减，在区间$(\frac{a}{3},1)$单调递增，所以区间$[0,1]$上最小值为$f(\frac{a}{3})$

而$f(0)=b, f(1)=2-a+b\le f(0)$，故所以区间$[0,1]$上最大值为$f(0)$.

即$\begin{cases}2(\frac{a}{3})^3-a(\frac{a}{3})^2+b=-1\\ b=1\end{cases}$相减得$\frac{a^3}{27}=2$，解得$x=3\sqrt[3]{2}$，又因为$2<a\le 3$，所以无解.

若$a>3$，$(-\infty,0)$区间上单调递增，$(0,\frac{a}{3})$区间上单调递减，$(\frac{a}{3},+\infty)$区间上单调递增.

所以有$f(x)$区间$[0,1]$上单调递减，所以区间$[0,1]$上最大值为$f(0)$，最小值为$f(1)$

即$\begin{cases}b=1\\ 2-a+b=-1\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}$.

综上得$\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}$.

【点睛】1)这是一道常规的函数导数不等式和综合题，题目难度比往年降低了不少。考查的函数单调性，最大值最小值这种基本概念的计算。思考量不大，由计算量补充。

21.已知曲线C：$y=\frac{x^2}{2}$，D为直线$y=-\frac{1}{2}$上的动点，过D作C的两条切线，切点分别为A，B.

（1）证明：直线AB过定点：

（2）若以$E(0,\frac{5}{2})$为圆心的圆与直线AB相切，且切点为线段AB的中点，求四边形$ADBE$的面积.

【答案】(1)见详解；(2) 3或$4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】

可用解析法和几何法证明。解析法可设A，B两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，然后求出A，B两点处的切线，两条切线交于直线$y=-\frac{1}{2}$之上，所以交点的纵坐标为$-\frac{1}{2}$

联立方程可解x_1和x_2的关系。之后用两点式求出直线AB方程，最后根据直线AB方程求出它所过的定点.(2)应用四边形面积公式，代入化简出关于x_1和x_2的对称式。然后分情

况讨论求解。如果不知道四面下面积公式则可以将四边形分成两个三角形求面积之后做和，但会稍微麻烦一些。（此题若用向量积的概念则更为容易）

【详解】(1)证明：设A，B两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，因为$y=\frac{1}{2}x^2$，所以$y'=x$，

则切线DA为：$y-y_1=x_1(x-x_1)$---------①，切线DB为：$y-y_2=x_2(x-x_2)$--------②，

代入$y=\frac{1}{2}x^2$得$\begin{cases} y-\frac{1}{2}{x_1}^2=x_1x-x_1^2\cdots\cdots① \\ y-\frac{1}{2}{x_2}^2=x_2x-x_2^2\cdots\cdots② \end{cases}$，①$\times x_2-$②$\times x_1$得

$(x_2-x_1)y+\frac{1}{2}x_1x_2(x_1-x_2)=0$，因为$x_1-x_2\neq 0$故消去得交点的纵坐标$y=\frac{1}{2}x_1x_2$，

因为DA和DB的交点D为直线$y=-\frac{1}{2}$上的动点，所以有$y=\frac{1}{2}x_1x_2=-\frac{1}{2}$，$x_1x_2=-1$，

直线AB为$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，点A，B在曲线$y=\frac{x^2}{2}$上，则有$\frac{y-\frac{{x_1}^2}{2}}{\frac{{x_2}^2}{2}-\frac{{x_1}^2}{2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，整理

得$y=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x-x_1)+\frac{{x_1}^2}{2}=-\frac{1}{2}x_1x_2+(x_1+x_2)x=\frac{1}{2}+(x_1+x_2)x$，即

$(x_1+x_2)x+(\frac{1}{2}-y)=0$.当$x=0$，$y=\frac{1}{2}$时无论$x_1,x_2$取何值时，此等式均成立。因此直线AB过定点$(0,\frac{1}{2})$，得证。

(2)设AB的中点为G，由题得G点坐标为$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，则

$\overline{EG}=(\frac{x_1+x_2}{2}-0,\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{5}{2})$，又$\overline{BA}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.由题意知$EG\perp BA$，即

$\overline{EG}\cdot\overline{BA}=0$即$(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1-x_2)+(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{5}{2})(y_1-y_2)=0$.代入$y=\frac{1}{2}x^2$得

$\frac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)+(\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{4}-\frac{5}{2})\cdot\frac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)=0$整理得$(x_1-x_2)(x_1+x_2)({x_1}^2+{x_2}^2-6)=0$.

因$x_1-x_2\neq 0$，故$(x_1+x_2)({x_1}^2+{x_2}^2-6)=0$.所以$x_1+x_2=0$或${x_1}^2+{x_2}^2-6=0$.

由第一问中$\begin{cases} y-\frac{1}{2}{x_1}^2=x_1x-x_1^2\cdots\cdots① \\ y-\frac{1}{2}{x_2}^2=x_2x-x_2^2\cdots\cdots② \end{cases}$，为这里的$(x,y)$为D点坐标,然而$y=\frac{1}{2}$,故

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}{x_1}^2=x_1x-x_1^2$，所以$x=\frac{1}{2}(x_1-\frac{1}{x_1})$，又因为$x_1x_2=-1$.所以

$x=\frac{1}{2}(x_1-\frac{1}{x_1})=\frac{1}{2}(x_1-\frac{-x_1x_2}{x_1})=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$。即D坐标为$(\frac{1}{2}(x_1+x_2),-\frac{1}{2})$.

那么$\overline{BA}=(x_1-x_2,y_1-y_2),\overline{ED}=(\frac{1}{2}(x_1+x_2),3)$.

设θ为$\overline{BA}$与$\overline{ED}$的夹角，那么有

$$S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}BA\cdot ED\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{BA^2\cdot ED^2(1-\cos^2\theta)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{BA}\right|^2\cdot\left|\overline{ED}\right|^2-(\overline{BA}\cdot\overline{ED})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]\cdot[\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2+9]^2-[(x_1-x_2)\cdot\frac{1}{2}(x_1+x_2)-3(y_1-y_2)]^2}$$

代入$y=\frac{1}{2}x^2$进行化简有$S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2\cdot[9+3(x_1+x_2)^2+\frac{(x_1+x_2)^4}{16}]}$

若$x_1+x_2=0$，则$S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2\cdot 9}=\frac{3}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3$.

若${x_1}^2+{x_2}^2-6=0$，则$(x_1+x_2)^2={x_1}^2+{x_2}^2+2x_1x_2=4,(x_1-x_2)^2={x_1}^2+{x_2}^2-2x_1x_2=8$

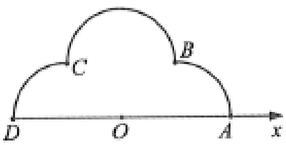
代入有$S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot(9+\frac{3}{2}\cdot 4+\frac{4^2}{16})}=4\sqrt{2}$.

所以四边形$ADBE$的面积为3或$4\sqrt{2}$.

【点睛】此题第一问是圆锥曲线中的定点问题和第二问是求面积类型，属于常规题型，按部就班的求解就可以。思路较为清晰，但计算量不小。

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.如图，在极坐标系Ox中，$A(2,0)$，$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，$C(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$，$D(2,\pi)$，弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$所在圆的圆心分别是$(1,0)$，$(1,\frac{\pi}{2})$，$(1,\pi)$，曲线$M_1$是弧$\overset{\frown}{AB}$，曲线$M_2$是弧$\overset{\frown}{BC}$，曲线$M_3$是弧$\overset{\frown}{CD}$.



（1）分别写出 M_1，M_2，M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1，M_2，M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP|=\sqrt{3}$，求 P 的极坐标.

【答案】(1) $\rho=2\cos\theta(\theta\in[0,\frac{\pi}{4}])$，$\rho=2\sin\theta(\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}])$，$\rho=-2\cos\theta(\theta\in[\frac{3\pi}{4},\pi])$，

(2) $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$，$(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$，$(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$，$(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$.

【解析】

【分析】

(1)将三个过原点的圆方程列出，注意题中要求的是弧，所以要注意的方程中 θ 的取值范围.

(2)根据条件 $\rho=\sqrt{3}$ 逐个方程代入求解，最后解出 P 点的极坐标.

【详解】(1)由题意得，这三个圆的直径都是2，并且都过原点.

$M_1:\rho=2\cos\theta(\theta\in[0,\frac{\pi}{4}])$，

$M_2:\rho=2\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=2\sin\theta(\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}])$，

$M_3:\rho=2\cos(\theta-\pi)=-2\cos\theta(\theta\in[\frac{3\pi}{4},\pi])$.

(2)解方程 $2\cos\theta=\sqrt{3}(\theta\in[0,\frac{\pi}{4}])$ 得 $\theta=\frac{\pi}{6}$，此时P的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$

解方程 $2\sin\theta=\sqrt{3}(\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}])$ 得 $\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ 或 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，此时P的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$ 或

$(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$

解方程 $-2\cos\theta=\sqrt{3}(\theta\in[\frac{3\pi}{4},\pi])$ 得 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，此时P的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$

故P的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$，$(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$，$(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$，$(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$.

【点睛】此题考查了极坐标中过极点的圆的方程，思考量不高，运算量不大，属于中档题.

23.设 $x,y,z\in R$，且 $x+y+z=1$.

（1）求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$ 成立，证明：$a \leqslant -3$ 或 $a \geq -1$.

【答案】(1) $\frac{4}{3}$；(2)见详解.

【解析】

【分析】

(1)根据条件 $x+y+z=1$，和柯西不等式得到 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \geq \frac{4}{3}$，再讨论 x,y,z 是否可以达到等号成立的条件.(2)恒成立问题，柯西不等式等号成立时构造的 x,y,z 代入原不等式，便可得到参数的取值范围.

【详解】(1)

$$[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2](1^2+1^2+1^2) \geq [(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2=(x+y+z+1)^2=4$$

故 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \geq \frac{4}{3}$ 等号成立当且仅当 $x-1=y+1=z+1$ 而又因

$x+y+z=1$，解得 $\begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 时等号成立

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2)

因为 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2 \geq \frac{1}{3}$，所以 $[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2) \geq 1$.

根据柯西不等式等号成立条件，当 $x-2=y-1=z-a$，即 $\begin{cases} x=2-\frac{a+2}{3} \\ y=1-\frac{a+2}{3} \\ z=a-\frac{a+2}{3} \end{cases}$ 时有

$[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2=(a+2)^2$ 成立.

所以 $(a+2)^2 \geq 1$ 成立，所以有 $a \leqslant -3$ 或 $a \geq -1$.

另解：用反证法.

若 $a \leqslant -3$ 或 $a \geq -1$ 不成立，那么 $1<a<3$ 成立，则 $(a+2)^2<1$ 而

$[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2$左面等号成立当且仅当

$x-2=y-1=z-a$，又因为$x+y+z=1$所以$x-2=y-1=z-a=-\frac{a+2}{3}$.故此时

$[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2=(a+2)^2<1$,即

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2<\frac{1}{3}$，与原命题矛盾放

【点睛】两个问都是考查柯西不等式，属于柯西不等式的常见题型.