

绝密★启用前

## 2007年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

### 数学试卷(文史类)

(满分150分, 考试时间120分钟)

考生注意

1. 本场考试时间120分钟, 试卷共4页, 满分150分, 答题纸共2页.
2. 作答前, 在答题纸正面填写姓名、准考证号, 反面填写姓名, 将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题, 用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一. 填空题(本大题满分44分) 本大题共有11题, 只要求直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 方程  $3^{x-1} = \frac{1}{9}$  的解是\_\_\_\_\_.

2. 函数  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.

3. 直线  $4x + y - 1 = 0$  的倾斜角  $\theta =$ \_\_\_\_\_.

4. 函数  $y = \sec x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  的最小正周期  $T =$ \_\_\_\_\_.

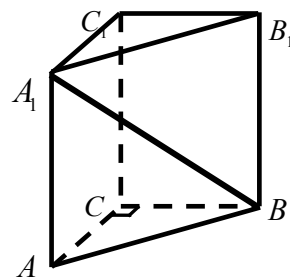
5. 以双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的中心为顶点, 且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是\_\_\_\_\_.

6. 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ , 则  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ \_\_\_\_\_.

7. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$AA_1 = 2, AC = BC = 1$ , 则异面直线  $A_1B$  与  $AC$  所成角

的大小是\_\_\_\_\_ (结果用反三角函数值表示).



8. 某工程由  $A, B, C, D$  四道工序组成, 完成它们需用时间依次为  $2, 5, x, 4$  天. 四道工序的先后顺序及相互关系是:  $A, B$  可以同时开工;  $A$  完成后,  $C$  可以开工;  $B, C$  完成后,  $D$  可以开工. 若该工程总时数为9天, 则完成工序  $C$  需要的天数  $x$  最大是\_\_\_\_\_.

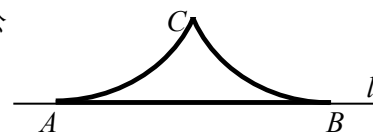
9. 在五个数字  $1, 2, 3, 4, 5$  中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是\_\_\_\_\_ (结果用数值表示).

10. 对于非零实数  $a, b$ , 以下四个命题都成立:

- ①  $a + \frac{1}{a} \neq 0$ ;                      ②  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  
 ③ 若  $|a|=|b|$ , 则  $a = \pm b$ ;        ④ 若  $a^2 = ab$ , 则  $a = b$ .

那么, 对于非零复数  $a, b$ , 仍然成立的命题的所有序号是\_\_\_\_\_.

11. 如图,  $A, B$  是直线  $l$  上的两点, 且  $AB = 2$ . 两个半径相等的动圆分别与  $l$  相切于  $A, B$  点,  $C$  是这两个圆的公共点, 则圆弧  $AC, CB$  与线段  $AB$  围成图形面积  $S$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



二. 选择题 (本大题满分16分) 本大题共有4题, 每题都给出代号为  $A, B, C, D$  的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得4分, 不选、选错或者选出的代号超过一个 (不论是否都写在圆括号内), 一律得零分.

12. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $2 + ai, b + 3i$  ( $i$  是虚数单位) 是一个实系数一元二次方程的两个根, 那么  $a, b$  的值分别是 ( )

- A.  $a = -3, b = 2$                       B.  $a = 3, b = -2$   
 C.  $a = -3, b = -2$                     D.  $a = 3, b = 2$

13. 圆  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  关于直线  $2x - y + 3 = 0$  对称的圆的方程是 ( )

- A.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{2}$                       B.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{2}$

C.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$

D.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$

14. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & 1 \leq n \leq 1000, \\ \frac{n^2}{n^2 - 2n}, & n \geq 1001, \end{cases}$  则数列  $\{a_n\}$  的极限值 ( )

- A. 等于0      B. 等于1      C. 等于0或1      D. 不存在

15. 设  $f(x)$  是定义在正整数集上的函数, 且  $f(x)$  满足: “当  $f(k) \geq k^2$  成立时,

总可推出  $f(k+1) \geq (k+1)^2$  成立”. 那么, 下列命题总成立的是 ( )

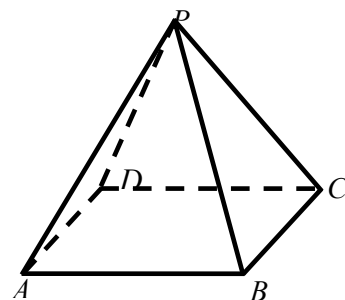
- A. 若  $f(1) < 1$  成立, 则  $f(10) < 100$  成立  
 B. 若  $f(2) < 4$  成立, 则  $f(1) \geq 1$  成立  
 C. 若  $f(3) \geq 9$  成立, 则当  $k \geq 1$  时, 均有  $f(k) \geq k^2$  成立  
 D. 若  $f(4) \geq 25$  成立, 则当  $k \geq 4$  时, 均有  $f(k) \geq k^2$  成立

三. 解答题 (本大题满分90分) 本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

16. (本题满分12分)

如图, 在正四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA = 2$ , 直线  $PA$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $60^\circ$ ,

求正四棱锥  $P-ABCD$  的体积  $V$ .



17. (本题满分14分)

在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是三个内角  $A, B, C$  的对边. 若  $a = 2, C = \frac{\pi}{4}$ ,

$\cos \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

18. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002年全球太阳能电池的年生产量达到670兆瓦, 年生产量的增长率为34%. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增2% (如, 2003年的年生产量的增长率为36%).

(1) 求2006年全球太阳能电池的年生产量 (结果精确到0.1兆瓦);

(2) 目前太阳能电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006年的实际安装量为1420兆瓦. 假设以后若干年内太阳能电池的年生产量的增长率保持在42%, 到2010年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的95%), 这四年中太阳能电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到0.1%)?

19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分7分, 第2小题满分7分.

已知函数  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  ( $x \neq 0$ , 常数  $a \in \mathbf{R}$ ).

(1) 当  $a = 2$  时, 解不等式  $f(x) - f(x-1) > 2x - 1$ ;

(2) 讨论函数  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

20. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

如果有穷数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  ( $m$  为正整数) 满足条件  $a_1 = a_m, a_2 = a_{m-1}, \dots,$

$$a_m = a_1,$$

即  $a_i = a_{m-i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 我们称其为“对称数列”.

例如, 数列 1, 2, 5, 2, 1 与数列 8, 4, 2, 2, 4, 8 都是“对称数列”.

(1) 设  $\{b_n\}$  是 7 项的“对称数列”, 其中  $b_1, b_2, b_3, b_4$  是等差数列, 且  $b_1 = 2, b_4 = 11$ .

依次写出  $\{b_n\}$  的每一项;

(2) 设  $\{c_n\}$  是 49 项的“对称数列”, 其中  $c_{25}, c_{26}, \dots, c_{49}$  是首项为 1,

公比为 2 的等比数列, 求  $\{c_n\}$  各项的和  $S$ ;

(3) 设  $\{d_n\}$  是 100 项的“对称数列”, 其中  $d_{51}, d_{52}, \dots, d_{100}$  是首项为 2,

公差为 3 的等差数列. 求  $\{d_n\}$  前  $n$  项的和  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 100$ ).

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分5分, 第3小题满分9分.

我们把由半椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \geq 0)$  与半椭圆  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1 (x \leq 0)$  合成的曲线

称作“果圆”, 其中  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $a > 0$ ,  $b > c > 0$ .

如图, 设点  $F_0, F_1, F_2$  是相应椭圆的焦点,  $A_1, A_2$  和  $B_1, B_2$  是“果圆”

与  $x, y$  轴的交点,  $M$  是线段  $A_1A_2$  的中点.

(1) 若  $\triangle F_0F_1F_2$  是边长为1的等边三角形,

求该“果圆”的方程;

(2) 设  $P$  是“果圆”的半椭圆  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$

$(x \leq 0)$  上任意一点. 求证: 当  $|PM|$  取得

最小值时,  $P$  在点  $B_1, B_2$  或  $A_1$  处;

(2) 若  $P$  是“果圆”上任意一点, 求  $|PM|$  取得最小值时点  $P$  的横坐标.

