2022 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号框，回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $M=\{2,4,6,8,10\},N=\{x|-1<x<6\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{2,4\}$　　B. $\{2,4,6\}$　　C. $\{2,4,6,8\}$　　D. $\{2,4,6,8,10\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出.

【详解】因为 $M=\{2,4,6,8,10\}$，$N=\{x|-1<x<6\}$，所以 $M\cap N=\{2,4\}$.

故选：A.

2. 设 $(1+2\mathrm{i})a+b=2\mathrm{i}$，其中 a,b 为实数，则（　　）

A. $a=1,b=-1$　　B. $a=1,b=1$　　C. $a=-1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及复数相等的概念即可解出.

【详解】因为 $a,b\in \mathbf{R}$，$(a+b)+2a\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，所以 $a+b=0,2a=2$，解得：$a=1,b=-1$.

故选：A.

3. 已知向量 $\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-2,4)$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】先求得$\vec{a}-\vec{b}$，然后求得$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

【详解】因为$\vec{a}-\vec{b}=(2,1)-(-2,4)=(4,-3)$，所以$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

故选：D

4. 分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长（单位：h），得如下茎叶图：

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

则下列结论中错误的是（　　）

A. 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4

B. 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8

C. 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4

D. 乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.6

【答案】C

【解析】

【分析】结合茎叶图、中位数、平均数、古典概型等知识确定正确答案.

【详解】对于 A 选项，甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为$\frac{7.3+7.5}{2}=7.4$，A 选项结论正确.

对于 B 选项，乙同学课外体育运动时长的样本平均数为：

$$\frac{6.3+7.4+7.6+8.1+8.2+8.2+8.5+8.6+8.6+8.6+8.6+9.0+9.2+9.3+9.8+10.1}{16}=8.50625>8,$$

B 选项结论正确.

对于 C 选项，甲同学周课外体育运动时长大于8的概率的估计值$\frac{6}{16}=0.375<0.4$，

C 选项结论错误.

对于 D 选项，乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值 $\frac{13}{16}=0.8125>0.6$，

D 选项结论正确.

故选：C

5. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 2,\\ x+2y\leq 4,\\ y\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值是（　　）

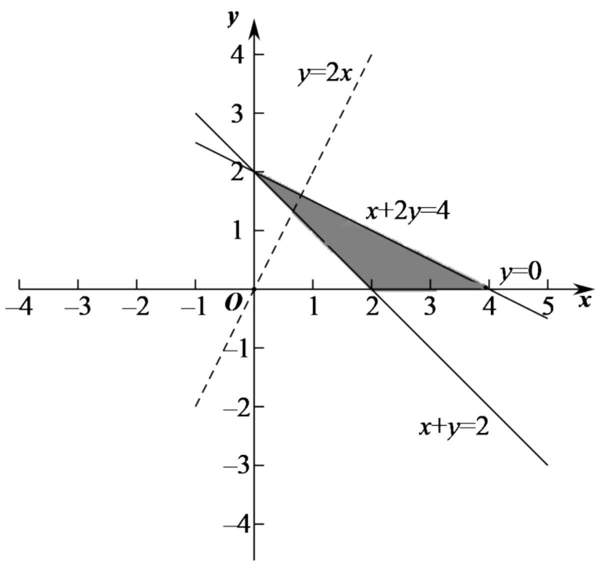
A. -2　　B. 4　　C. 8　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】作出可行域，数形结合即可得解.

【详解】由题意作出可行域，如图阴影部分所示，



转化目标函数 $z=2x-y$ 为 $y=2x-z$，

上下平移直线 $y=2x-z$，可得当直线过点 $(4,0)$ 时，直线截距最小，z 最大，

所以 $z_{\max}=2\times 4-0=8$.

故选：C.

6. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线上的点到焦点和准线的距离相等，从而求得点A的横坐标，进而求得点A坐标，即可得到答案.

【详解】由题意得，$F\left(1,0\right)$，则$\left|AF\right|=\left|BF\right|=2$，

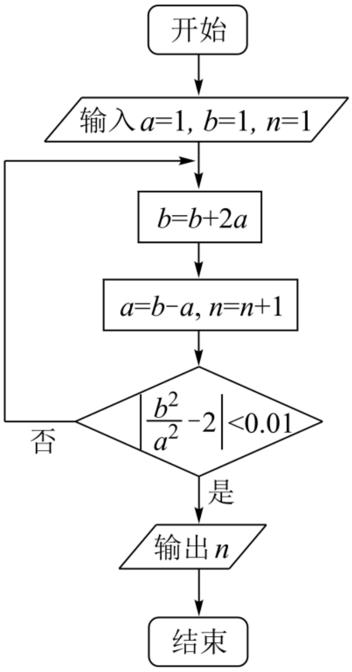
即点A到准线$x=-1$的距离为2，所以点A的横坐标为$-1+2=1$，

不妨设点A在x轴上方，代入得，$A\left(1,2\right)$，

所以$\left|AB\right|=\sqrt{\left(3-1\right)^{2}+\left(0-2\right)^{2}}=2\sqrt{2}$.

故选：B

7. 执行下边的程序框图，输出的$n=$（　　）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据框图循环计算即可.

【详解】执行第一次循环，$b=b+2a=1+2=3$，

$a=b-a=3-1=2,n=n+1=2$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=b+2a=3+4=7$，

$a=b-a=7-2=5, n=n+1=3$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

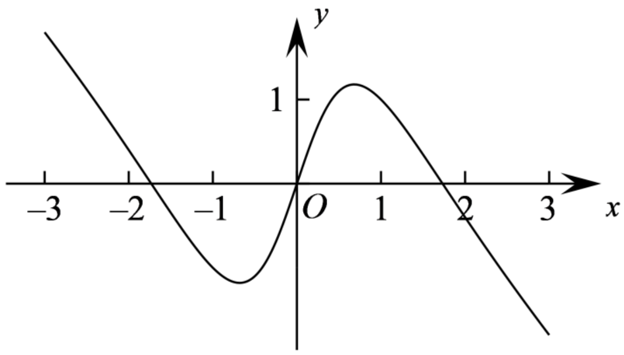
执行第三次循环，$b=b+2a=7+10=17$，

$a=b-a=17-5=12, n=n+1=4$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$.

故选：B

8. 如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3,3]$ 的大致图像，则该函数是（　　）



A. $y=\frac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B. $y=\frac{x^3-x}{x^2+1}$　　C. $y=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D. $y=\frac{2\sin x}{x^2+1}$

【答案】A

【解析】

【分析】由函数图像的特征结合函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】设 $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$，则 $f(1)=0$，故排除 B;

设 $h(x)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0<\cos x<1$，

所以 $h(x)=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}<\dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$，故排除 C;

设 $g(x)=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$，则 $g(3)=\dfrac{2\sin 3}{10}>0$，故排除 D.

故选：A.

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB,BC 的中点，则（　　）

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC

D. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

【解析】

【分析】证明 $EF\perp$ 平面 BDD_1，即可判断 A；如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，分别求出平面 B_1EF，A_1BD，A_1C_1D 的法向量，根据法向量的位置关系，即可判断 BCD.

【详解】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC\perp BD$ 且 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $EF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF\perp DD_1$，

因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，

所以 $EF\parallel AC$，所以 $EF\perp BD$，

又 $BD\cap DD_1=D$，

所以 $EF\perp$ 平面 BDD_1，

又 $EF\subset$ 平面 B_1EF，

所以平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1，故 A 正确；

选项 BCD 解法一：

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，

则 $B_1(2,2,2),E(2,1,0),F(1,2,0),B(2,2,0),A_1(2,0,2),A(2,0,0),C(0,2,0)$，

$C_1(0,2,2)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,0),\overrightarrow{EB_1}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0),\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_1+y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EB_1}=y_1+2z_1=0\end{cases}$，可取 $\overrightarrow{m}=(2,2,-1)$，

同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,-1)$，

平面 A_1AC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$，

平面 A_1C_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n_3}=(1,1,-1)$，

则 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n_1}=2-2+1=1\neq 0$，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直，故 B 错误；

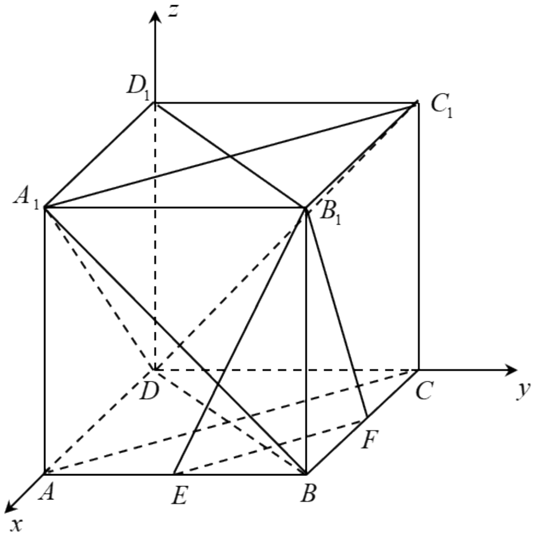
因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_2}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1AC 不平行，故 C 错误；

因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_3}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1C_1D 不平行，故 D 错误，

故选：A.



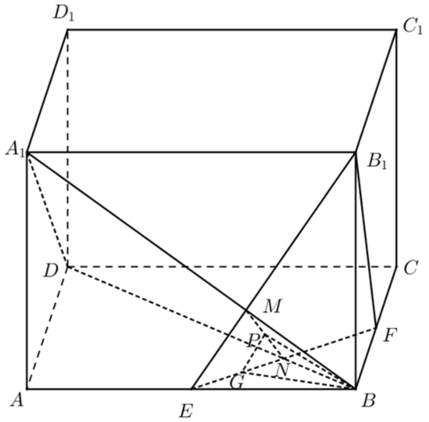
选项 BCD 解法二：

解：对于选项 B，如图所示，设 $A_1B\cap B_1E=M$，$EF\cap BD=N$，则 MN 为平面 B_1EF 与平面 A_1BD 的

交线，

在$\triangle BMN$内，作$BP\perp MN$于点P，在$\triangle EMN$内，作$GP\perp MN$，交EN于点G，连结BG，

则$\angle BPG$或其补角为平面B_1EF与平面A_1BD所成二面角的平面角，



由勾股定理可知：$PB^2+PN^2=BN^2$，$PG^2+PN^2=GN^2$，

底面正方形$ABCD$中，E,F为中点，则$EF\perp BD$，

由勾股定理可得$NB^2+NG^2=BG^2$，

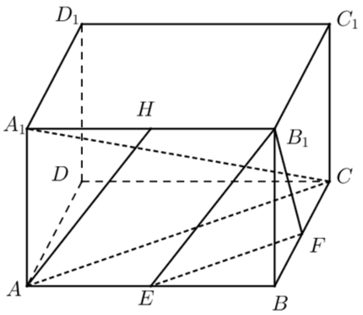
从而有：$NB^2+NG^2=\left(PB^2+PN^2\right)+\left(PG^2+PN^2\right)=BG^2$，

据此可得$PB^2+PG^2\neq BG^2$，即$\angle BPG\neq 90^\circ$，

据此可得平面$B_1EF\perp$平面A_1BD不成立，选项 B 错误；

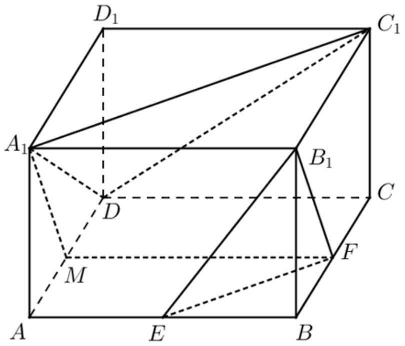
对于选项 C，取A_1B_1的中点H，则$AH\parallel B_1E$，

由于AH与平面A_1AC相交，故平面$B_1EF/\!/$平面A_1AC不成立，选项 C 错误；



对于选项 D，取AD的中点M，很明显四边形A_1B_1FM为平行四边形，则$A_1M\parallel B_1F$，

由于A_1M与平面A_1C_1D相交，故平面$B_1EF/\!/$平面A_1C_1D不成立，选项 D 错误；



故选：A.

10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，易得$q\neq 1$，根据题意求出首项与公比，再根据等比数列的通项即可得解.

【详解】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，

若$q=1$，则$a_2-a_5=0$，与题意矛盾，

所以$q\neq 1$，

则$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=168 \\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=96 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

所以$a_6=a_1q^5=3$.

故选：D.

11. 函数$f\left(x\right)=\cos x+\left(x+1\right)\sin x+1$在区间$\left[0,2\pi\right]$的最小值、最大值分别为（　　）

A. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$　　B. $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$　　C. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$　　D. $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间，从而判断出 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最小值和最大值.

【详解】$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x=(x+1)\cos x$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增；

在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减，

又 $f(0)=f(2\pi)=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+2$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)+1=-\frac{3\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最小值为 $-\frac{3\pi}{2}$，最大值为 $\frac{\pi}{2}+2$.

故选：D

12. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：先证明当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$，进而得到四棱锥体积表达式，再利用均值定理去求四棱锥体积的最大值，从而得到当该四棱锥的体积最大时其高的值.

【详解】**[方法一]：【最优解】基本不等式**

设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r，

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为 α，

则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\le\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\le\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$

（当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立）

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$

又设四棱锥的高为 h，则 $r^2+h^2=1$，

$$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot 2h^2}\le\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{r^2+r^2+2h^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

当且仅当$r^2=2h^2$即$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立.

故选：C

[方法二]：统一变量＋基本不等式

由题意可知，当四棱锥为正四棱锥时，其体积最大，设底面边长为a，底面所在圆的半径为r，则

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以该四棱锥的高$h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，

$$V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot(1-\frac{a^2}{2})}\le\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+1-\frac{a^2}{2}}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{1}{3})^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

(当且仅当$\frac{a^2}{4}=1-\frac{a^2}{2}$，即$a^2=\frac{4}{3}$时，等号成立)

所以该四棱锥的体积最大时，其高$h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

[方法三]：利用导数求最值

由题意可知，当四棱锥为正四棱锥时，其体积最大，设底面边长为a，底面所在圆的半径为r，则

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以该四棱锥的高$h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，$V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，令$a^2=t(0<t<2)$，$V=\frac{1}{3}\sqrt{t^2-\frac{t^3}{2}}$，设

$f\left(t\right)=t^2-\frac{t^3}{2}$，则$f'\left(t\right)=2t-\frac{3t^2}{2}$，

$0<t<\frac{4}{3}$，$f'\left(t\right)>0$，单调递增，$\frac{4}{3}<t<2$，$f'\left(t\right)<0$，单调递减，

所以当$t=\frac{4}{3}$时，V最大，此时$h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

【整体点评】方法一：思维严谨，利用基本不等式求最值，模型熟悉，是该题的最优解；

方法二：消元，实现变量统一，再利用基本不等式求最值；

方法三：消元，实现变量统一，利用导数求最值，是最值问题的常用解法，操作简便，是通性通法.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 记S_n为等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和．若$2S_3=3S_2+6$，则公差$d=$_______.

【答案】2

【解析】

【分析】转化条件为$2(a_1+2d)=2a_1+d+6$，即可得解.

【详解】由$2S_3=3S_2+6$可得$2(a_1+a_2+a_3)=3(a_1+a_2)+6$，化简得$2a_3=a_1+a_2+6$，

即$2(a_1+2d)=2a_1+d+6$，解得$d=2$.

故答案为：2.

14. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为____________.

【答案】$\frac{3}{10}$##0.3

【解析】

【分析】根据古典概型计算即可

【详解】**解法一**：设这 5 名同学分别为甲，乙，1,2,3，从 5 名同学中随机选 3 名，

有：(甲，乙，1)，(甲，乙，2)，(甲，乙，3)，(甲，1，2)，(甲，1，3)，(甲，2，3)，(乙，1，2)，(乙，1，3)，(乙，2，3)，(1，2，3)，共 10 种选法；

其中，甲、乙都入选的选法有 3 种，故所求概率$P=\frac{3}{10}$.

故答案为：$\frac{3}{10}$.

解法二：从 5 名同学中随机选 3 名的方法数为$C_5^3=10$

甲、乙都入选的方法数为$C_3^1=3$，所以甲、乙都入选的概率$P=\frac{3}{10}$

故答案为：$\frac{3}{10}$

15. 过四点$(0,0),(4,0),(-1,1),(4,2)$中的三点的一个圆的方程为____________.

【答案】$(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

【解析】

【分析】法一：设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，根据所选点的坐标，得到方程组，解得即可；

【详解】[法一]：**圆的一般方程**

依题意设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

（1）若过$\left(0,0\right)$，$\left(4,0\right)$，$\left(-1,1\right)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\1+1-D+E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-6\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$，即$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=13$；

（2）若过$\left(0,0\right)$，$\left(4,0\right)$，$\left(4,2\right)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-2\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$，即$\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$；

（3）若过$\left(0,0\right)$，$\left(4,2\right)$，$\left(-1,1\right)$，则$\begin{cases}F=0\\1+1-D+E+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-\frac{8}{3}\\E=-\frac{14}{3}\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$，即$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$；

（4）若过$\left(-1,1\right)$，$\left(4,0\right)$，$\left(4,2\right)$，则$\begin{cases}1+1-D+E+F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=-\frac{16}{5}\\D=-\frac{16}{5}\\E=-2\end{cases}$，所以圆的方程

为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$，即$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{169}{25}$；

故答案为：$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=13$或$\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或

$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{169}{25}$.

[法二]：**【最优解】圆的标准方程**（三点中的两条中垂线的交点为圆心）

设点$A\left(0,0\right)$，$B\left(4,0\right)$，$C\left(-1,1\right)$，$D\left(4,2\right)$

（1）若圆过 A、B、C 三点，圆心在直线 $x=2$，设圆心坐标为 $(2,a)$，

则 $4+a^2=9+(a-1)^2 \Rightarrow a=3, r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{5}$，所以圆的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$；

（2）若圆过 A、B、D 三点， 设圆心坐标为 $(2,a)$，则 $4+a^2=4+(a-2)^2 \Rightarrow a=1$,$r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{5}$，所以圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$；

（3）若圆过 A、C、D 三点，则线段 AC 的中垂线方程为 $y=x+1$，线段 AD 的中垂线方程 为 $y=-2x+5$，联立得 $x=\frac{4}{3}, y=\frac{7}{3} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{65}}{3}$ ，所以圆的方程为 $(x-\frac{4}{3})^2+(y-\frac{7}{3})^2=\frac{65}{9}$；

（4）若圆过 B、C、D 三点，则线段 BD 的中垂线方程为 $y=1$， 线段 BC 中垂线方程为 $y=5x-7$，联立得 $x=\frac{8}{5}, y=1 \Rightarrow r=\frac{13}{5}$，所以圆的方程为 $(x-\frac{8}{5})^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

故答案为：$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

【整体点评】法一；利用圆过三个点，设圆的一般方程，解三元一次方程组，思想简单，运算稍繁；法二；利用圆的几何性质，先求出圆心再求半径，运算稍简洁，是该题的最优解.

16. 若 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数，则 $a=$_____， $b=$______.

【答案】 ①. $-\frac{1}{2}$； ②. $\ln 2$.

【解析】

【分析】根据奇函数的定义即可求出.

【详解】因为函数 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 为奇函数，所以其定义域关于原点对称.

由 $a+\frac{1}{1-x}\neq 0$ 可得，$(1-x)(a+1-ax)\neq 0$，所以 $x=\frac{a+1}{a}=-1$，解得：$a=-\frac{1}{2}$，即函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，再由 $f(0)=0$ 可得，$b=\ln 2$．即

$f\left(x\right)=\ln\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right|+\ln 2=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$，在定义域内满足 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，符合题意.

故答案为：$-\frac{1}{2}$；$\ln 2$.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17. 记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$.

（1）若 $A=2B$，求 C；

（2）证明：$2a^2=b^2+c^2$

【答案】（1）$\frac{5\pi}{8}$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据题意可得，$\sin C=\sin\left(C-A\right)$，再结合三角形内角和定理即可解出；

（2）由题意利用两角差的正弦公式展开得

$\sin C\left(\sin A\cos B-\cos A\sin B\right)=\sin B\left(\sin C\cos A-\cos C\sin A\right)$，再根据正弦定理，余弦定理化简即可证出.

【小问 1 详解】

由 $A=2B$，$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$可得，$\sin C\sin B=\sin B\sin\left(C-A\right)$，而$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin B\in\left(0,1\right)$，即有$\sin C=\sin\left(C-A\right)>0$，而$0<C<\pi,0<C-A<\pi$，显然$C\neq C-A$，所以，

$C+C-A=\pi$，而 $A=2B$，$A+B+C=\pi$，所以$C=\frac{5\pi}{8}$.

【小问 2 详解】

由$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$可得，

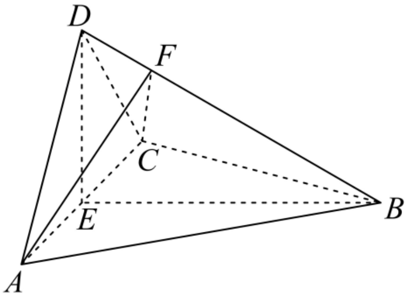
$\sin C\left(\sin A\cos B-\cos A\sin B\right)=\sin B\left(\sin C\cos A-\cos C\sin A\right)$，再由正弦定理可得，

$ac\cos B-bc\cos A=bc\cos A-ab\cos C$，然后根据余弦定理可知，

$\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-b^2\right)-\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)$，化简得：

$2a^2=b^2+c^2$，故原等式成立.

18. 如图，四面体 $ABCD$ 中， $AD\perp CD,AD=CD,\angle ADB=\angle BDC$ ，E 为 AC 的中点.



（1）证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD;

（2）设 $AB=BD=2,\angle ACB=60^\circ$ ，点 F 在 BD 上，当$\triangle AFC$ 的面积最小时，求三棱锥 $F-ABC$ 的体积.

【答案】（1）证明详见解析

（2） $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】（1）通过证明 $AC\perp$ 平面 BED 来证得平面 $BED\perp$ 平面 ACD .

（2）首先判断出三角形 AFC 的面积最小时 F 点的位置，然后求得 F 到平面 ABC 的距离，从而求得三棱锥 $F-ABC$ 的体积.

【小问 1 详解】

由于 $AD=CD$ ， E 是 AC 的中点，所以 $AC\perp DE$.

由于 $\begin{cases}AD=CD\\BD=BD\\\angle ADB=\angle CDB\end{cases}$ ，所以 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$,

所以 $AB=CB$ ，故 $AC\perp BD$,

由于 $DE\cap BD=D$ ， $DE,BD\subset$ 平面 BED ,

所以 $AC\perp$ 平面 BED ,

由于 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD .

【小问 2 详解】

解法 1：判别几何关系

依题意 $AB=BD=BC=2$， $\angle ACB=60^\circ$，三角形 ABC 是等边三角形，

所以 $AC=2, AE=CE=1, BE=\sqrt{3}$，

由于 $AD=CD, AD\perp CD$，所以三角形 ACD 是等腰直角三角形，所以 $DE=1$.

$DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$，

由于 $AC\cap BE=E$， $AC,BE\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

由于 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以 $\angle FBA=\angle FBC$，

由于 $\begin{cases}BF=BF\\ \angle FBA=\angle FBC\\ AB=CB\end{cases}$，所以 $\triangle FBA\cong\triangle FBC$，

所以 $AF=CF$，所以 $EF\perp AC$，

由于 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF$，所以当 EF 最短时，三角形 AFC 的面积最小

过 E 作 $EF\perp BD$，垂足为 F，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中， $\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，解得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

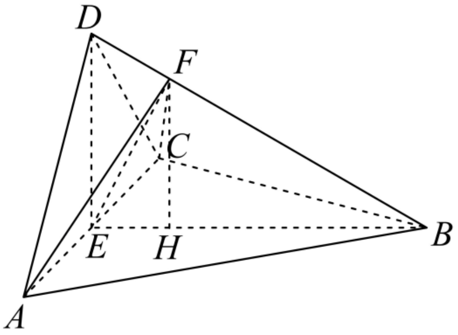
所以 $DF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}, BF=2-DF=\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$.

过 F 作 $FH\perp BE$，垂足为 H，则 $FH//DE$，所以 $FH\perp$ 平面 ABC，且 $\frac{FH}{DE}=\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$，

所以 $FH=\frac{3}{4}$，

所以 $V_{F-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



解法 2：等体积转换

$\because AB=BC$， $\angle ACB=60^\circ$， $AB=2$

$\therefore \Delta ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，

$\therefore BE=\sqrt{3}$

连接 EF

$\because \Delta ADB \cong \Delta CDB \therefore AF=CF$

$\therefore EF \perp AC$

$\therefore$ 在ΔBED中，当$EF \perp BD$时，ΔAFC面积最小

$\because AD \perp CD, AD=CD, AC=2, E$为$AC$中点

$\therefore DE=1 \because DE^2+BE^2=BD^2$

$\therefore BE \perp ED$

若$EF \perp BD$,在ΔBED中,$\mathrm{EF}=\dfrac{BE \cdot DE}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$BF=\sqrt{BE^2-EF^2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore S_{\Delta BEF}=\dfrac{1}{2} BF \cdot EF=\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore V_{F-ABC}=V_{A-BEF}+V_{C-BEF}=\dfrac{1}{3} S_{\Delta BEF} \cdot AC=\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

19. 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_{i}	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得$\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{10} x_{\mathrm{i}}^2=0.038, \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{10} y_{\mathrm{i}}^2=1.6158, \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{10} x_{\mathrm{i}} y_{\mathrm{i}}=0.2474$．

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186\mathrm{m}^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量

的估计值．

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{1.896}\approx1.377$．

【答案】（1） $0.06\mathrm{m}^2$； $0.39\mathrm{m}^3$

（2） 0.97

（3） $1209\mathrm{m}^3$

【解析】

【分析】（1）计算出样本的一棵根部横截面积的平均值及一棵材积量平均值，即可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）代入题给相关系数公式去计算即可求得样本的相关系数值；

（3）依据树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，列方程即可求得该林区这种树木的总材积量的估计值．

【小问 1 详解】

样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\overline{x}=\dfrac{0.6}{10}=0.06$

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\dfrac{3.9}{10}=0.39$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 $0.06\mathrm{m}^2$，

平均一棵的材积量为 $0.39\mathrm{m}^3$

【小问 2 详解】

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$$

则 $r\approx0.97$

【小问 3 详解】

设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\mathrm{m}^3$，

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，

可得$\frac{0.06}{0.39}=\frac{186}{Y}$，解之得$Y=1209\text{m}^3$.

则该林区这种树木的总材积量估计为1209m^3

20. 已知函数$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x$.

（1）当$a=0$时，求$f(x)$的最大值；

（2）若$f(x)$恰有一个零点，求a的取值范围.

【答案】（1）-1

（2）$(0,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）由导数确定函数的单调性，即可得解；

（2）求导得$f'(x)=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$，按照$a\le 0$、$0<a<1$及$a>1$结合导数讨论函数的单调性，求得函数的极值，即可得解.

【小问1详解】

当$a=0$时，$f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x, x>0$，则$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

所以$f(x)_{\max}=f(1)=-1$；

【小问2详解】

$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x, x>0$，则$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$，

当$a\le 0$时，$ax-1<0$，所以当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

所以$f(x)_{\max}=f(1)=a-1<0$，此时函数无零点，不合题意；

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，在$(0,1),\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

又 $f\left(1\right)=a-1<0$，

由（1）得 $\frac{1}{x}+\ln x\geq 1$，即 $\ln\frac{1}{x}\geq 1-x$，所以 $\ln x<x,\ln\sqrt{x}<\sqrt{x},\ln x<2\sqrt{x}$，

当 $x>1$ 时，$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x>ax-\frac{1}{x}-2(a+1)\sqrt{x}>ax-(2a+3)\sqrt{x}$，

则存在 $m=\left(\frac{3}{a}+2\right)^2>\frac{1}{a}$，使得 $f\left(m\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 仅在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 有唯一零点，符合题意；

当 $a=1$ 时，$f'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2}\geq 0$，所以 $f\left(x\right)$ 单调递增，又 $f\left(1\right)=a-1=0$，

所以 $f\left(x\right)$ 有唯一零点，符合题意；

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，在 $\left(0,\frac{1}{a}\right),(1,+\infty)$ 上，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减；此时 $f\left(1\right)=a-1>0$，

由（1）得当 $0<x<1$ 时，$\ln x>1-\frac{1}{x}$，$\ln\sqrt{x}>1-\frac{1}{\sqrt{x}}$，所以 $\ln x>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，

此时 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x<ax-\frac{1}{x}-2(a+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<-\frac{1}{x}+\frac{2(a+1)}{\sqrt{x}}$，

存在 $n=\frac{1}{4(a+1)^2}<\frac{1}{a}$，使得 $f(n)<0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 有一个零点，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 无零点，

所以 $f\left(x\right)$ 有唯一零点，符合题意；

综上，a 的取值范围为 $\left(0,+\infty\right)$.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用导数研究函数的极值与单调性，把函数零点问题转化为函数的单调性与极值的问题.

21. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P\left(1,-2\right)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点．

【答案】（1）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（2）$(0,-2)$

【解析】

【分析】（1）将给定点代入设出的方程求解即可；

（2）设出直线方程，与椭圆 C 的方程联立，分情况讨论斜率是否存在，即可得解.

【小问 1 详解】

解：设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则 $\begin{cases} 4n=1 \\ \frac{9}{4}m+n=1 \end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$A(0,-2),B(\frac{3}{2},-1)$，所以 $AB:y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $M(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(-\sqrt{6}+3,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 得到 $H(-2\sqrt{6}+5,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得 HN 方程：

$y=(2+\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}kx-y-(k+2)=0\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得$(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{6k(2+k)}{3k^2+4}\\ x_1x_2=\dfrac{3k(4+k)}{3k^2+4}\end{cases}$，$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-8(2+k)}{3k^2+4}\\ y_2y_2=\dfrac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4}\end{cases}$，

且$x_1y_2+x_2y_1=\dfrac{-24k}{3k^2+4}(*)$

联立$\begin{cases}y=y_1\\ y=\dfrac{2}{3}x-2\end{cases}$，可得$T(\dfrac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时$HN:y-y_2=\dfrac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将$(0,-2)$，代入整理得$2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将$(*)$代入，得$24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0,$

显然成立，

综上，可得直线HN过定点$(0,-2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中选定一题作答，并用2B铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑．按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分.

[选修4—4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$，（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线$l$的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$.

（1）写出l的直角坐标方程；

（2）若l与C有公共点，求m的取值范围.

【答案】（1） $\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2） $\left[-\frac{19}{12},\frac{5}{2}\right]$

【解析】

【分析】（1）根据极坐标与直角坐标的互化公式处理即可；

（2）方法一：联立 l 与 C 的方程，采用换元法处理，根据新设 a 的取值范围求解 m 的范围即可.

【小问 1 详解】

因为 l： $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以 $\frac{1}{2}\rho\cdot\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cdot\cos\theta+m=0$，

又因为 $\rho\cdot\sin\theta=y,\rho\cdot\cos\theta=x$，所以化简为 $\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得 l 的直角坐标方程： $\sqrt{3}x+y+2m=0$

【小问 2 详解】

[方法一]：【最优解】参数方程

联立 l 与 C 的方程，即将 $x=\sqrt{3}\cos 2t$， $y=2\sin t$ 代入 $\sqrt{3}x+y+2m=0$ 中，

可得 $3\cos 2t+2\sin t+2m=0\Rightarrow 3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为 $-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$ 有解，

令 $\sin t=a$，则 $a\in[-1,1]$，令 $f(a)=6a^2-2a-3$， $(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为 $a=\frac{1}{6}$，开口向上，

$\therefore f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{\min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

$\therefore -\frac{19}{6}\leq 2m\leq 5$，即 m 的取值范围为 $\left[-\frac{19}{12},\frac{5}{2}\right]$.

[方法二]：直角坐标方程

由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$， t 为参数，消去参数 t，可得 $y^2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$，

联立$\begin{cases}\sqrt{3}x+y+2m=0\\ y^2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+2\end{cases}$，得$3y^2-2y-4m-6=0(-2\le y\le 2)$，即$4m=3y^2-2y-6=3\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{19}{3}$，

即有$-\dfrac{19}{3}\le 4m\le 10$，即$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$，$\therefore m$的取值范围是$\left[-\dfrac{19}{12},\dfrac{5}{2}\right]$.

【整体点评】方法一：利用参数方程以及换元，转化为两个函数的图象有交点，是该题的最优解；

方法二：通过消参转化为直线与抛物线的位置关系，再转化为二次函数在闭区间上的值域，与方法一本质上差不多，但容易忽视y的范围限制而出错.

[选修4—5：不等式选讲]

23. 已知a，b，c都是正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\dfrac{1}{9}$；

（2）$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{1}{2\sqrt{abc}}$；

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用三元均值不等式即可证明；

（2）利用基本不等式及不等式的性质证明即可.

【小问1详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\ge\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$(abc)^{\frac{1}{2}}\le\dfrac{1}{3}$，所以$abc\le\dfrac{1}{9}$，当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即$a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$时取等号.

【小问2详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$a+c\ge 2\sqrt{ac}$，$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，

所以$\dfrac{a}{b+c}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{b}{a+c}\le\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}=\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

当且仅当$a=b=c$时取等号.