

2012 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（文）

参考公式：

如果事件互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么

在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第一部分（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 份，共 60 份。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、设集合  $A = \{a, b\}$ ， $B = \{b, c, d\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )

- A、 $\{b\}$                       B、 $\{b, c, d\}$                       C、 $\{a, c, d\}$                       D、 $\{a, b, c, d\}$

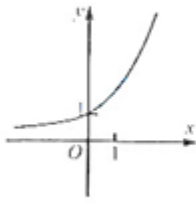
2、 $(1+x)^7$  的展开式中  $x^2$  的系数是 ( )

- A、21                      B、28                      C、35                      D、42

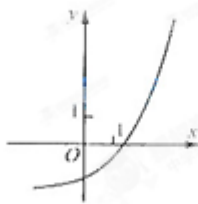
3、交通管理部门为了解机动车驾驶员（简称驾驶员）对某新法规的知晓情况，对甲、乙、丙、丁四个社区做分层抽样调查。假设四个社区驾驶员的总人数为 N，其中甲社区有驾驶员 96 人。若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为 12, 21, 25, 43，则这四个社区驾驶员的总人数 N 为 ( )

- A、101                      B、808                      C、1212                      D、2012

4、函数  $y = a^x - a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象可能是 ( )



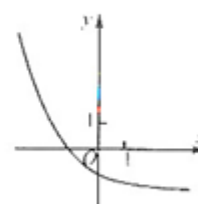
(A)



(B)



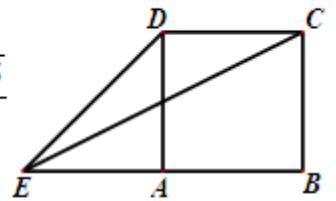
(C)



(D)

5、如图，正方形  $ABCD$  的边长为1，延长  $BA$  至  $E$ ，使  $AE = 1$ ，连接  $EC$ 、 $ED$  则  $\sin \angle CED = ( \quad )$

- A、 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$       B、 $\frac{\sqrt{10}}{10}$       C、 $\frac{\sqrt{5}}{10}$       D、 $\frac{\sqrt{5}}{15}$



6、下列命题正确的是 ( )

- A、若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行  
 B、若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行  
 C、若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行  
 D、若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

7、设  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  都是非零向量，下列四个条件中，使  $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$  成立的充分条件是 ( )

- A、 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$  且  $\mathbf{a} // \mathbf{b}$       B、 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$       C、 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$       D、 $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$

8、若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq -3, \\ x + 2y \leq 12, \\ 2x + y \leq 12, \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + 4y$  的最大值是 ( )

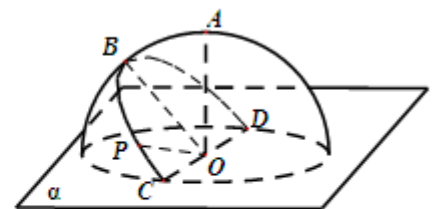
- A、12      B、26      C、28      D、33

9、已知抛物线关于  $x$  轴对称，它的顶点在坐标原点  $O$ ，并且经过点  $M(2, y_0)$ 。若点  $M$  到该抛物线焦点的距离为3，则  $|OM| = ( \quad )$

- A、 $2\sqrt{2}$       B、 $2\sqrt{3}$       C、4      D、 $2\sqrt{5}$

10、如图，半径为  $R$  的半球  $O$  的底面圆  $O$  在平面  $\alpha$  内，过点  $O$  作平面  $\alpha$  的垂线交半球面于点  $A$ ，过圆  $O$  的直径  $CD$  作平面  $\alpha$  成  $45^\circ$  角的平面与半球面相交，所得交线上到平面  $\alpha$  的距离最大的点为  $B$ ，该交线上的一点  $P$  满足  $\angle BOP = 60^\circ$ ，则  $A$ 、 $P$  两点间的球面距离为 ( )

- A、 $R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$       B、 $\frac{\pi R}{4}$       C、 $R \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$       D、 $\frac{\pi R}{3}$



11、方程  $ay = b^2x^2 + c$  中的  $a, b, c \in \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ ，且  $a, b, c$  互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有 ( )

- A、28 条                      B、32 条                      C、36 条                      D、48 条

12、设函数  $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$ ， $\{a_n\}$  是公差不为 0 的等差数列，

$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_7) = 14$ ，则  $a_1 + a_2 + \dots + a_7 =$  (      )

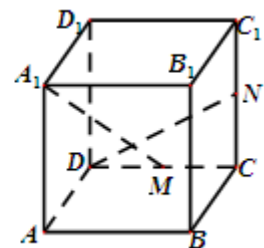
- A、0                              B、7                              C、14                              D、21

## 第二部分 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分)

13、函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$  的定义域是\_\_\_\_\_。(用区间表示)

14、如图，在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $M$ 、 $N$  分别是  $CD$ 、 $CC_1$  的中点，



则异面直线  $A_1M$  与  $DN$  所成的角的大小是\_\_\_\_\_。

15、椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$  ( $a$  为定值，且  $a > \sqrt{5}$ ) 的左焦点为  $F$ ，直线  $x = m$  与椭圆相交于点

$A$ 、 $B$ ， $\triangle FAB$  的周长的最大值是 12，则该椭圆的离心率是\_\_\_\_\_。

16、设  $a, b$  为正实数，现有下列命题：

- ①若  $a^2 - b^2 = 1$ ，则  $a - b < 1$ ；
- ②若  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 1$ ，则  $a - b < 1$ ；
- ③若  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = 1$ ，则  $|a - b| < 1$ ；
- ④若  $|a^3 - b^3| = 1$ ，则  $|a - b| < 1$ 。

其中的真命题有\_\_\_\_\_。(写出所有真命题的编号)

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 74 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17、(本小题满分 12 分)

某居民小区有两个相互独立的安全防范系统 (简称系统)  $A$  和  $B$ ，系统  $A$  和系统  $B$  在任意时刻发生故障的概率分别为  $\frac{1}{10}$  和  $p$ 。

(I) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为  $\frac{49}{50}$ ，求  $p$  的值；

(II) 求系统  $A$  在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数的概率。

18、(本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ 。

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和值域；

(II) 若  $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ ，求  $\sin 2\alpha$  的值。

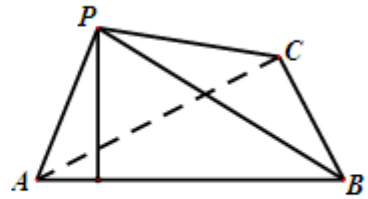
19、(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥  $P-ABC$  中， $\angle APB = 90^\circ$ ，

$\angle PAB = 60^\circ$ ， $AB = BC = CA$ ，点  $P$  在平面  $ABC$  内的射影  $O$  在  $AB$  上。

(I) 求直线  $PC$  与平面  $ABC$  所成的角的大小；

(II) 求二面角  $B-AP-C$  的大小。



20、(本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，常数  $\lambda > 0$ ，且  $\lambda a_1 a_n = S_1 + S_n$  对一切正整数  $n$  都成立。

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $a_1 > 0$ ， $\lambda = 100$ 。当  $n$  为何值时，数列  $\{\lg \frac{1}{a_n}\}$  的前  $n$  项和最大？

21、(本小题满分 12 分)

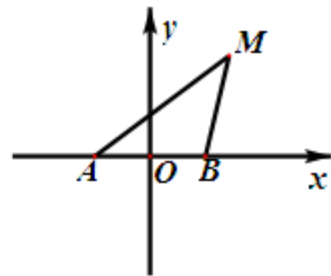
如图，动点  $M$  与两定点  $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$  构成  $\triangle MAB$ ，

且直线  $MA$ 、 $MB$  的斜率之积为 4，设动点  $M$  的轨迹为  $C$ 。

(I) 求轨迹  $C$  的方程；

(II) 设直线  $y = x + m (m > 0)$  与  $y$  轴交于点  $P$ ，与轨迹  $C$

相交于点  $Q$ 、 $R$ ，且  $|PQ| < |PR|$ ，求  $\frac{|PR|}{|PQ|}$  的取值范围。



22、(本小题满分 14 分)

已知  $a$  为正实数， $n$  为自然数，抛物线  $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$  与  $x$  轴正半轴相交于点  $A$ ，设  $f(n)$  为该抛物线在点  $A$  处的切线在  $y$  轴上的截距。

(I) 用  $a$  和  $n$  表示  $f(n)$ ；

(II) 求对所有  $n$  都有  $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n}{n+1}$  成立的  $a$  的最小值；

(III) 当  $0 < a < 1$  时，比较  $\frac{1}{f(1)-f(2)} + \frac{1}{f(2)-f(4)} + \dots + \frac{1}{f(n)-f(2n)}$  与

6 •  $\frac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$  的大小，并说明理由。