2010年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）复数（$\frac{3-i}{1+i}$）^{2}=（　　）

A. ﹣3﹣4i　　B. ﹣3+4i　　C. 3﹣4i　　D. 3+4i

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】首先进行复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，把复数整理成整式形式，再进行复数的乘方运算，合并同类项，得到结果.

【解答】解：（$\frac{3-i}{1+i}$）^{2}=$[\frac{(3-i)(1-i)}{2}]^2$=（1﹣2i）^{2}=﹣3﹣4i.

故选：A.

【点评】本题主要考查复数的除法和乘方运算，是一个基础题，解题时没有规律和技巧可寻，只要认真完成，则一定会得分.

2. （5分）函数$y=\frac{1+\ln(x-1)}{2}(x>1)$的反函数是（　　）

A. $y=e^{2x-1}-1$（x＞0）　　B. $y=e^{2x-1}+1$（x＞0）

C. $y=e^{2x-1}-1$（x∈R）　　D. $y=e^{2x-1}+1$（x∈R）

【考点】4H：对数的运算性质；4R：反函数.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】从条件中$y=\frac{1+\ln(x-1)}{2}(x>1)$中反解出x，再将x，y互换即得．解答本题首先熟悉反函数的概念，然后根据反函数求解三步骤：1、换：x、y换位，2、解：解出y，3、标：标出定义域，据此即可求得反函数.

【解答】解：由原函数解得

$x=e^{2y-1}+1$，

∴$f^{-1}(x)=e^{2x-1}+1$，

又x＞1，∴x﹣1＞0；

∴ln（x﹣1）∈R∴在反函数中x∈R，

故选：D．

【点评】求反函数，一般应分以下步骤：（1）由已知解析式y=f（x）反求出x=Φ（y）；（2）交换x=Φ（y）中x、y的位置；（3）求出反函数的定义域（一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域）．

3．（5分）若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant -1\\ y\geqslant x\\ 3x+2y\leqslant 5\end{cases}$，则z=2x+y的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】31：数形结合．

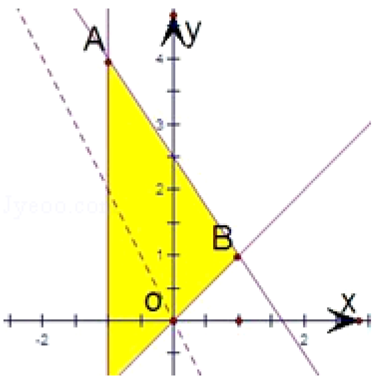
【分析】先根据约束条件画出可行域，设z=2x+y，再利用z的几何意义求最值，只需求出直线z=2x+y过可行域内的点B时，从而得到m值即可．

【解答】解：作出可行域，作出目标函数线，

可得直线与y=x与3x+2y=5的交点为最优解点，

∴即为B（1，1），当x=1，y=1时z_{max}=3．

故选：C．



【点评】本题考查了线性规划的知识，以及利用几何意义求最值，属于基础题．

4．（5分）如果等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么$a_1+a_2+\ldots+a_7=$（　　）

A．14　　B．21　　C．28　　D．35

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前n项和.

【分析】由等差数列的性质求解.

【解答】解：$a_3+a_4+a_5=3a_4=12$，$a_4=4$，

$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$

故选：C.

【点评】本题主要考查等差数列的性质.

5．（5分）不等式$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$的解集为（　　）

A．$\{x|x<-2$，或$x>3\}$　　B．$\{x|x<-2$，或$1<x<3\}$

C．$\{x|-2<x<1$，或$x>3\}$　　D．$\{x|-2<x<1$，或$1<x<3\}$

【考点】73：一元二次不等式及其应用.

【专题】11：计算题.

【分析】解$\frac{f(x)}{g(x)}>0$，可转化成$f(x)\bullet g(x)>0$，再利用根轴法进行求解.

【解答】解：$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)}>0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)(x-1)>0$

利用数轴穿根法解得$-2<x<1$或$x>3$，

故选：C.

【点评】本试题主要考查分式不等式与高次不等式的解法，属于不等式的基础题.

6．（5分）将标号为1，2，3，4，5，6的6张卡片放入3个不同的信封中，若每个信封放2张，其中标号为1，2的卡片放入同一信封，则不同的方法共有（　　）

A．12种　　B．18种　　C．36种　　D．54种

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】11：计算题．

【分析】本题是一个分步计数问题，首先从3个信封中选一个放1，2有3种不同的选法，再从剩下的4个数中选两个放一个信封有C_4^2，余下放入最后一个信封，根据分步计数原理得到结果．

【解答】解：由题意知，本题是一个分步计数问题，

∵先从3个信封中选一个放1，2，有C_3^1=3种不同的选法；根据分组公式，其他四封信放入两个信封，每个信封两个有$\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2$=6种放法，

∴共有3×6×1=18．

故选：B．

【点评】本题考查分步计数原理，考查平均分组问题，是一个易错题，解题的关键是注意到第二步从剩下的4个数中选两个放到一个信封中，这里包含两个步骤，先平均分组，再排列．

7．（5分）为了得到函数y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{3}$）的图象，只需把函数y=sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）的图象（　　）

A．向左平移$\frac{\pi}{4}$个长度单位　　B．向右平移$\frac{\pi}{4}$个长度单位

C．向左平移$\frac{\pi}{2}$个长度单位　　D．向右平移$\frac{\pi}{2}$个长度单位

【考点】HJ：函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】1：常规题型．

【分析】先将2提出来，再由左加右减的原则进行平移即可．

【解答】解：y=sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）=sin2（x+$\frac{\pi}{12}$），y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{3}$）=sin2（x﹣$\frac{\pi}{6}$），

所以将y=sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个长度单位得到y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{3}$）的图象，

故选：B．

【点评】本试题主要考查三角函数图象的平移．平移都是对单个的x来说的．

8．（5分）△ABC中，点D在边AB上，CD平分∠ACB，若$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$\overrightarrow{CD}=$（　　）

A．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

【考点】9B：向量加减混合运算．

【分析】由△ABC中，点D在边AB上，CD平分∠ACB，根据三角形内角平分线定理，我们易得到$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，我们将$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$后，将各向量用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示，即可得到答案．

【解答】解：∵CD为角平分线，

$\therefore\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，

$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\therefore\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

故选：B．

【点评】本题考查了平面向量的基础知识，解答的核心是三角形内角平分线定理，即若AD为三角形ABC的内角A的角平分线，则AB：AC=BD：CD

9．（5分）已知正四棱锥S﹣ABCD中，SA=$2\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设出底面边长，求出正四棱锥的高，写出体积表达式，利用求导求得

最大值时，高的值．

【解答】解：设底面边长为a，则高$h=\sqrt{SA^2-(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2}=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$，所以体积$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{1}{2}a^6}$，

设$y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$，则$y'=48a^3-3a^5$，当y取最值时，$y'=48a^3-3a^5=0$，解得a=0或a=4时，当a=4时，体积最大，

此时$h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}=2$，

故选：C．

【点评】本试题主要考查椎体的体积，考查高次函数的最值问题的求法．是中档题．

10．（5分）若曲线$y=x^{-\frac{1}{2}}$在点（a，$a^{-\frac{1}{2}}$）处的切线与两个坐标围成的三角形的面积为18，则a=（　　）

A．64　　B．32　　C．16　　D．8

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】31：数形结合．

【分析】欲求参数a值，必须求出在点（a，$a^{-\frac{1}{2}}$）处的切线方程，只须求出其斜率的值即可，故先利用导数求出在x=a处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率得到切线的方程，最后求出与坐标轴的交点坐标结合三角形的面积公式．从而问题解决．

【解答】解：$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，$\therefore k=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$，

切线方程是$y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$，

令x=0，$y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$，令y=0，x=3a，

∴三角形的面积是$s=\frac{1}{2}\bullet 3a\bullet \frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}=18$，

解得a=64．

故选：A．

【点评】本试题主要考查求导法则、导数的几何意义、切线的求法和三角形的面积公式，考查考生的计算能力．

11．（5分）与正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的三条棱AB、CC_1、A_1D_1所在直线的距离相等的点（　　）

A．有且只有1个　B．有且只有2个　　C．有且只有3个　D．有无数个

【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系．

【专题】16：压轴题．

【分析】由于点D、B_1显然满足要求，猜想B_1D上任一点都满足要求，然后想办法证明结论．

【解答】解：在正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$上建立如图所示空间直角坐标系，

并设该正方体的棱长为1，连接B_1D，并在B_1D上任取一点P，

因为$\overrightarrow{DB_1}$=（1，1，1），

所以设P（a，a，a），其中0≤a≤1．

作PE⊥平面A_1D，垂足为E，再作EF⊥A_1D_1，垂足为F，

则PF是点P到直线A_1D_1的距离．

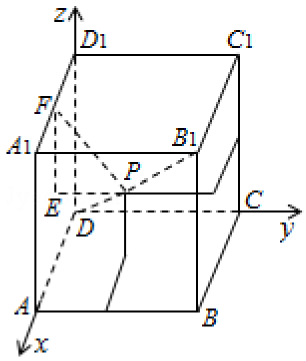
所以PF=$\sqrt{a^2+(1-a)^2}$；

同理点P到直线AB、CC_1的距离也是$\sqrt{a^2+(1-a)^2}$．

所以B_1D上任一点与正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的三条棱AB、CC_1、A_1D_1所在直线的距离都相等，

所以与正方体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$的三条棱AB、CC_1、A_1D_1所在直线的距离相等的点有无数个．

故选：D．



【点评】本题主要考查合情推理的能力及空间中点到线的距离的求法.

12. （5分）已知椭圆T：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点F且斜率为k（k＞0）的直线与T相交于A，B两点，若$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则k=（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），根据$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$求得$y_1$和$y_2$关系根据离心率设$a=2t$，$c=\sqrt{3}t$，b=t，代入椭圆方程与直线方程联立，消去x，根据韦达定理表示出y_1+y_2和y_1y_2，进而根据y_1和y_2关系求得k.

【解答】解：A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

∵$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，∴$y_1=-3y_2$，

∵$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设$a=2t$，$c=\sqrt{3}t$，b=t，

∴$x^2+4y^2-4t^2=0$①，

设直线AB方程为$x=sy+\sqrt{3}t$，代入①中消去x，可得$(s^2+4)y^2+2\sqrt{3}sty-t^2=0$，

∴$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{t^2}{s^2+4}$，$-2y_2=-\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}$，$-3y_2^2=-\frac{t^2}{s^2+4}$，

解得$s^2=\frac{1}{2}$，$k=\sqrt{2}$

故选：B．

【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题．此类题问题综合性强，要求考生有较高地转化数学思想的运用能力，能将已知条件转化到基本知识的运用．

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13．（5分）已知a是第二象限的角，$\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$，则$\tan\alpha=$__$-\frac{1}{2}$__．

【考点】GO：运用诱导公式化简求值；GS：二倍角的三角函数．

【专题】11：计算题．

【分析】根据诱导公式$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$得到$\tan2\alpha$，然后利用公式$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$求出$\tan\alpha$，因为α为第二象限的角，判断取值即可．

【解答】解：由$\tan(\pi+2a)=-\frac{4}{3}$得$\tan2a=-\frac{4}{3}$，又$\tan2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=-\frac{4}{3}$，

解得$\tan a=-\frac{1}{2}$或$\tan a=2$，

又a是第二象限的角，所以$\tan a=-\frac{1}{2}$．

故答案为：$-\frac{1}{2}$．

【点评】本试题主要考查三角函数的诱导公式、正切的二倍角公式和解方程，考查考生的计算能力．

14．（5分）若$(x-\frac{a}{x})^9$的展开式中x^3的系数是﹣84，则a=__1__．

【考点】DA：二项式定理．

【专题】11：计算题．

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第r+1项，令x的指数为3得展开式中x^3的系数，列出方程解得．

【解答】解：$(x-\frac{a}{x})^9$展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-\frac{a}{x})^r=(-a)^r C_9^r x^{9-2r}$

令$9-2r=3$得$r=3$

∴展开式中x^3的系数是C_9^3（﹣a）^{3}=﹣$84a^3$=﹣84，

∴a=1．

故答案为1

【点评】本试题主要考查二项展开式的通项公式和求指定项系数的方法．

15．（5分）已知抛物线C：$y^2=2px$（p＞0）的准线l，过M（1，0）且斜率为$\sqrt{3}$的直线与l相交于A，与C的一个交点为B，若$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，则p=__2__．

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设直线AB的方程与抛物线方程联立消去y得$3x^2$+（﹣6﹣2p）x+3=0，进而根据$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，可知M为A、B的中点，

可得p的关系式，解方程即可求得p．

【解答】解：设直线AB：$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，代入$y^2=2px$得$3x^2$+（﹣6﹣2p）x+3=0，

又∵$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，即M为A、B的中点，

∴x_B+（$-\frac{p}{2}$）=2，即$x_B=2+\frac{p}{2}$，

得p^2+4P﹣12=0，

解得p=2，p=﹣6（舍去）

故答案为：2

【点评】本题考查了抛物线的几何性质．属基础题．

16．（5分）已知球O的半径为4，圆M与圆N为该球的两个小圆，AB为圆M与圆N的公共弦，AB=4，若OM=ON=3，则两圆圆心的距离MN=__3__．

【考点】JE：直线和圆的方程的应用；ND：球的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】根据题意画出图形，欲求两圆圆心的距离，将它放在与球心组成的三角形MNO中，只要求出球心角即可，通过球的性质构成的直角三角形即可

解得．

【解答】解法一：∵ON=3，球半径为4，

∴小圆N的半径为$\sqrt{7}$，

∵小圆N中弦长AB=4，作NE垂直于AB，

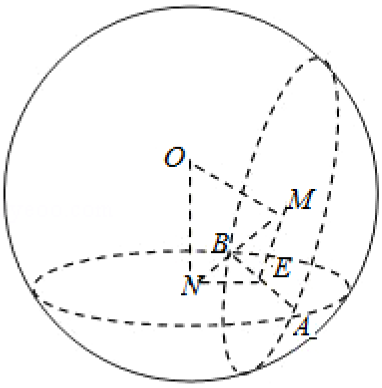
∴NE=$\sqrt{3}$，同理可得ME=$\sqrt{3}$，在直角三角形ONE中，

∵NE=$\sqrt{3}$，ON=3，

∴$\angle EON=\frac{\pi}{6}$，

∴$\angle MON=\frac{\pi}{3}$，

∴MN=3．



故填：3．

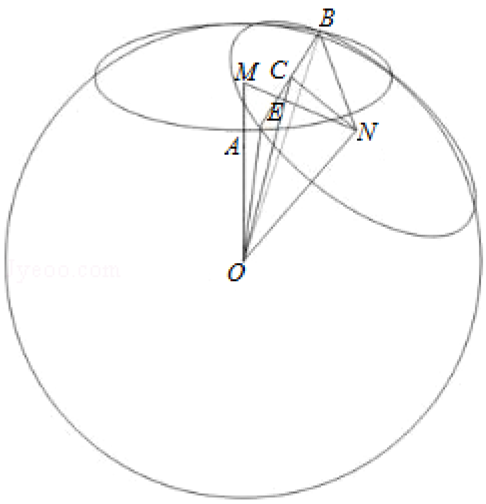
解法二：如下图：设AB的中点为C，则OC与MN必相交于MN中点为E，因为OM=ON=3，

故小圆半径NB为$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

C为AB中点，故CB=2；所以NC=$\sqrt{\sqrt{7}^2-2^2}=\sqrt{3}$，

∵△ONC为直角三角形，NE为△ONC斜边上的高，OC=$\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

∴MN=2EN=2•CN•$\frac{ON}{CO}=2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2\sqrt{3}}=3$



故填：3．

【点评】本题主要考查了点、线、面间的距离计算，还考查球、直线与圆的基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题．

三、解答题（共6小题，满分70分）

17．（10分）△ABC中，D为边BC上的一点，BD=33，$\sin B=\frac{5}{13}$，$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$，求AD．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理．

【分析】先由$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$确定角ADC的范围，因为∠BAD=∠ADC﹣B所以可求其正弦值，最后由正弦定理可得答案．

【解答】解：由$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}>0$，则$\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，

又由知B<∠ADC可得$B<\frac{\pi}{2}$，

由$\sin B=\frac{5}{13}$，可得$\cos B=\frac{12}{13}$，

又由$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$，可得$\sin\angle ADC=\frac{4}{5}$．

从而$\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$．

由正弦定理得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，

所以AD=$\frac{BD\cdot\sin B}{\sin\angle BAD}=\frac{33\times\frac{5}{13}}{\frac{33}{65}}=25$.

【点评】三角函数与解三角形的综合性问题，是近几年高考的热点，在高考试题中频繁出现．这类题型难度比较低，一般出现在17或18题，属于送分题，估计以后这类题型仍会保留，不会有太大改变．解决此类问题，要根据已知条件，灵活运用正弦定理或余弦定理，求边角或将边角互化．

18．（12分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(n^2+n)\cdot 3^n$.

（Ⅰ）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$；（Ⅱ）证明：$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

【考点】6F：极限及其运算；R6：不等式的证明.

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（1）由题意知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}$，由此可知答案.

（2）由题意知，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}=\frac{S_1}{1^2}+\frac{S_2-S_1}{2^2}+\cdots+\frac{S_n-S_{n-1}}{n^2}$

$=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})S_1+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})S_2+\cdots+(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2})S_{n-1}+\frac{1}{n^2}S_n>\frac{1}{n^2}S_n$，由此可知，当n≥1时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

【解答】解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{2}{3}$；

（2）当n=1时，$\frac{a_1}{1^2}=S_1=6>3$；

当n＞1时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}=\frac{S_1}{1^2}+\frac{S_2-S_1}{2^2}+\cdots+\frac{S_n-S_{n-1}}{n^2}$

$=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})\ S_1\ +(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})\ S_2\ +\cdots+(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2})S_{n-1}+\frac{1}{n^2}S_n>\frac{1}{n^2}S_n=$

$\frac{n^2+n}{n^2}\bullet 3^n>3^n$

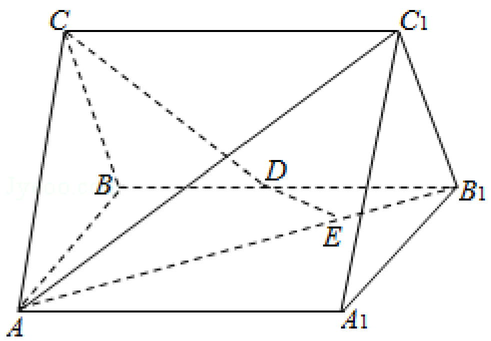
所以，n≥1时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

【点评】本题考查数列的极限问题，解题时要注意公式的灵活运用.

19. （12分）如图，直三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$中，AC=BC，AA_1=AB，D为BB_1的中点，E为AB_1上的一点，AE=3EB_1.

（Ⅰ）证明：DE为异面直线AB_1与CD的公垂线；

（Ⅱ）设异面直线AB_1与CD的夹角为45°，求二面角A_1﹣AC_1﹣B_1的大小.



【考点】LM：异面直线及其所成的角；LQ：平面与平面之间的位置关系.

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（1）欲证DE为异面直线AB_1与CD的公垂线，即证DE与异面直线AB_1与CD垂直相交即可；

（2）将AB_1平移到DG，故∠CDG为异面直线AB_1与CD的夹角，作HK⊥AC_1，K为垂足，连接B_1K，由三垂线定理，得B_1K⊥AC_1，因此∠B_1KH为二面角A_1﹣AC_1﹣B_1的平面角，在三角形B_1KH中求出此角即可.

【解答】解：（1）连接A_1B，记A_1B与AB_1的交点为F.

因为面AA_1BB_1为正方形，故A_1B⊥AB_1，且AF=FB_1，

又AE=3EB_1，所以FE=EB_1，

又D为BB_1的中点，

故DE∥BF，DE⊥AB_1.

作CG⊥AB，G为垂足，由AC=BC知，G为AB中点.

又由底面ABC⊥面AA_1B_1B．连接DG，则DG∥AB_1，

故DE⊥DG，由三垂线定理，得DE⊥CD.

所以DE为异面直线AB_1与CD的公垂线.

（2）因为DG∥AB_1，故∠CDG为异面直线AB_1与CD的夹角，∠CDG=45°

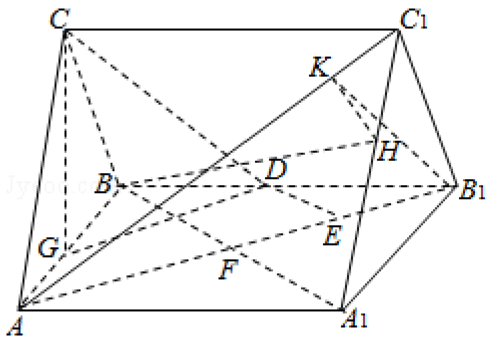
设AB=2，则$AB_1=2\sqrt{2}$，DG=$\sqrt{2}$，CG=$\sqrt{2}$，AC=$\sqrt{3}$.

作B_1H⊥A_1C_1，H为垂足，因为底面$A_1B_1C_1$⊥面AA_1CC_1，故B_1H⊥面AA_1C_1C．又作HK⊥AC_1，K为垂足，连接B_1K，由三垂线定理，得B_1K⊥AC_1，因此∠B_1KH为二面角$A_1-AC_1-B_1$的平面角.

$B_1H=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$C_1H=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AC_1=\sqrt{7}$，$HK=\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\tan\angle B_1KH=\sqrt{14}$，

∴二面角$A_1-AC_1-B_1$的大小为$\arctan\sqrt{14}$.



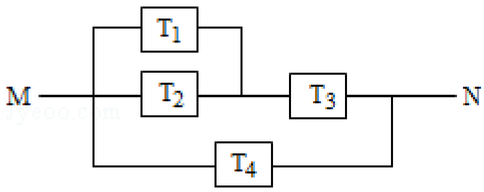
【点评】本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解，考查考生的空间想象与推理计算的能力．三垂线定理是立体几何的最重要定理之一，是高考的热点，它是处理线线垂直问题的有效方法，同时它也是确定二面角的平面角的主要手段．通过引入空间向量，用向量代数形式来处理立体几何问题，淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法，从而降低了思维难度，使解题变得程序化，这是用向量解立体几何问题的独到之处.

20．（12分）如图，由M到N的电路中有4个元件，分别标为T_1，T_2，T_3，T_4，电流能通过T_1，T_2，T_3的概率都是P，电流能通过T_4的概率是0.9，电流能否通过各元件相互独立．已知T_1，T_2，T_3中至少有一个能通过电流的概率为0.999

.

（Ⅰ）求P；

（Ⅱ）求电流能在M与N之间通过的概率．



【考点】C5：互斥事件的概率加法公式；C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）设出基本事件，将要求事件用基本事件的来表示，将T1，T2，T3至少有一个能通过电流用基本事件表示并求出概率即可求得p．

（Ⅱ）根据题意，B表示事件：电流能在M与N之间通过，根据电路图，可得$B=A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3$，由互斥事件的概率公式，代入数据计算可得答案．

【解答】解：（Ⅰ）根据题意，记电流能通过T_i为事件A_i，i=1、2、3、4，

A表示事件：T_1，T_2，T_3，中至少有一个能通过电流，

易得A_1，A_2，A_3相互独立，且$\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$，

$P(\overline{A})=(1-p)^3=1-0.999=0.001$，

计算可得，p=0.9；

（Ⅱ）根据题意，B表示事件：电流能在M与N之间通过，

有$B=A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3$，

则$P(B)=P(A_4+(1-A_4)A_1A_3+(1-A_4)(1-A_1)A_2A_3)$

$=0.9+0.1\times0.9\times0.9+0.1\times0.1\times0.9\times0.9$

$=0.9891$．

【点评】本题考查了概率中的互斥事件、对立事件及独立事件的概率，注意先明确事件之间的关系，进而选择对应的公式来计算．

21．（12分）已知斜率为1的直线l与双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)相交于B、D两点，且BD的中点为M（1，3）．

（Ⅰ）求C的离心率；

（Ⅱ）设C的右顶点为A，右焦点为F，|DF|•|BF|=17，证明：过A、B、D三点的圆与x轴相切．

【考点】J9：直线与圆的位置关系；KC：双曲线的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】11：计算题；14：证明题；16：压轴题．

【分析】（Ⅰ）由直线过点（1，3）及斜率可得直线方程，直线与双曲线交于BD两点的中点为（1，3），可利用直线与双曲线消元后根据中点坐标公式找出a，b的关系式即求得离心率．

（Ⅱ）利用离心率将条件|FA||FB|=17，用含a的代数式表示，即可求得a，则A点坐标可得（1，0），由于A在x轴上所以，只要证明2AM=BD即证得．

【解答】解：（Ⅰ）由题设知，l的方程为：y=x+2，代入C的方程，并化简，

得$(b^2-a^2)x^2-4a^2x-a^2b^2-4a^2=0$，

设B（x_1，y_1），D（x_2，y_2），则$x_1+x_2=\frac{4a^2}{b^2-a^2}$，$x_1x_2=-\frac{4a^2+a^2b^2}{b^2-a^2}$，①

由M（1，3）为BD的中点知$\frac{x_1+x_2}{2}=1$．

故$\frac{1}{2}\times\frac{4a^2}{b^2-a^2}=1$，即$b^2=3a^2$，②

故$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，

∴C的离心率$e=\frac{c}{a}=2$．

（Ⅱ）由①②知，C的方程为：$3x^2-y^2=3a^2$，A（a，0），F（2a，0），

$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-\frac{4+3a^2}{2}$．

故不妨设$x_1\le -a$，$x_2\ge a$，

$|BF|=\sqrt{(x_1-2a)^2+y_1^2}=a-2x_1$，$|FD|=\sqrt{(x_2-2a)^2+y_2^2}=2x_2-a$，

$|BF|\bullet|FD|=(a-2x_1)(2x_2-a)=-4x_1x_2+2a(x_1+x_2)-a^2=5a^2+4a+8$.

又$|BF|\bullet|FD|=17$，故$5a^2+4a+8=17$.

解得$a=1$，或$a=-\frac{9}{5}$（舍去），

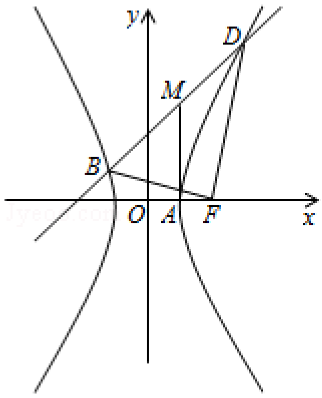
故$|BD|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6$，

连接MA，则由A（1，0），M（1，3）知$|MA|=3$，

从而MA=MB=MD，且MA⊥x轴，

因此以M为圆心，MA为半径的圆经过A、B、D三点，且在点A处与x轴相切，

所以过A、B、D三点的圆与x轴相切.



【点评】本题考查了圆锥曲线、直线与圆的知识，考查学生运用所学知识解决问题的能力.

22．（12分）设函数$f(x)=1-e^{-x}$.

（Ⅰ）证明：当$x>-1$时，$f(x)\geq\frac{x}{x+1}$；

（Ⅱ）设当$x\geq0$时，$f(x)\leq\frac{x}{ax+1}$，求a的取值范围.

【考点】6E：利用导数研究函数的最值.

【专题】15：综合题；16：压轴题.

【分析】（1）将函数f（x）的解析式代入$f(x)\geq\frac{x}{x+1}$整理成$e^x\geq1+x$，组成新函数$g(x)=e^x-x-1$，然后根据其导函数判断单调性进而可求出函数g（x）的最小值g（0），进而$g(x)\geq g(0)$可得证.

（2）先确定函数f（x）的取值范围，然后对a分$a<0$和$a\geq0$两种情况进行讨论.

当a＜0时根据x的范围可直接得到f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$不成立；当a≥0时，令h（x）=axf（x）+f（x）﹣x，然后对函数h（x）进行求导，根据导函数判断单调性并求出最值，求a的范围．

【解答】解：（1）当x＞﹣1时，f（x）$\geq\frac{x}{x+1}$当且仅当$e^x\geq1+x$

令g（x）$=e^x-x-1$，则g'（x）$=e^x-1$

当x≥0时g'（x）≥0，g（x）在[0，+∞）是增函数

当x≤0时g'（x）≤0，g（x）在（﹣∞，0]是减函数

于是g（x）在x=0处达到最小值，因而当x∈R时，g（x）≥g（0）时，即$e^x\geq1+x$

所以当x＞﹣1时，f（x）$\geq\frac{x}{x+1}$

（2）由题意x≥0，此时f（x）≥0

当a＜0时，若x＞$-\frac{1}{a}$，则$\frac{x}{ax+1}$＜0，f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$不成立；

当a≥0时，令h（x）=axf（x）+f（x）﹣x，则

f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$当且仅当h（x）≤0

因为f（x）$=1-e^{-x}$，所以h'（x）=af（x）+axf'（x）+f'（x）﹣1=af（x）﹣axf（x）+ax﹣f（x）

（i）当$0\leq a\leq\frac{1}{2}$时，由（1）知x≤（x+1）f（x）

h'（x）≤af（x）﹣axf（x）+a（x+1）f（x）﹣f（x）

=（2a﹣1）f（x）≤0，

h（x）在[0，+∞）是减函数，h（x）≤h（0）=0，即f（x）$\leq\frac{x}{ax+1}$；

（ii）当a＞$\frac{1}{2}$时，由y=x﹣f（x）$=x-1+e^{-x}$，

$y'=1-e^{-x}$，x＞0时，函数y递增；x＜0，函数y递减．

可得x=0处函数y取得最小值0，即有x≥f（x）．

h'（x）=af（x）﹣axf（x）+ax﹣f（x）≥af（x）﹣axf（x）+af（x）﹣f（x）=（2a﹣1﹣ax）f（x）

当0＜x＜$\frac{2a-1}{a}$时，h'（x）＞0，所以h'（x）＞0，所以h（x）＞h（0）=0，即f（x）＞$\frac{x}{ax+1}$

综上，a的取值范围是$[0,\ \frac{1}{2}]$

【点评】本题主要考查导数的应用和利用导数证明不等式，考查考生综合运用知识的能力及分类讨论的思想，考查考生的计算能力及分析问题、解决问题的能力；导数常作为高考的压轴题，对考生的能力要求非常高，它不仅要求考生牢固掌握基础知识、基本技能，还要求考生具有较强的分析能力和计算能力．估计以后对导数的考查力度不会减弱．作为压轴题，主要是涉及利用导数求最值解决恒成立问题，利用导数证明不等式等，常伴随对参数的讨论，这也是难点之所在．