

2004年青海高考文科数学真题及答案

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第I卷1至2页，第II卷3至10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷

参考公式：

三角函数的和差化积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长， l 表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

(1) 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$ ， $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$ ，

则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(2) 函数 $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

(3) 记函数 $y = 1 + 3^{-x}$ 的反函数为 $y = g(x)$ ，则 $g(10) = ()$

- A. 2 B. -2 C. 3 D. -1

(4) 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 9$ ， $a_5 = 243$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 ()

- A. 81 B. 120 C. 168 D. 192

(5) 圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程是 ()

- A. $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ B. $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$
C. $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ D. $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

- (6) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为 ()
- A. 15 B. -15 C. 20 D. -20
- (7) 设复数 z 的幅角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2 =$ ()
- A. $-2 - 2\sqrt{3}i$ B. $-2\sqrt{3} - 2i$
- C. $2 + 2\sqrt{3}i$ D. $2\sqrt{3} + 2i$
- (8) 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则双曲线的离心率 $e =$ ()
- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$
- (9) 不等式 $1 < |x+1| < 3$ 的解集为 ()
- A. $(0, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (2, 4)$
- C. $(-4, 0)$ D. $(-4, -2) \cup (0, 2)$
- (10) 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为 ()
- A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$
- (11) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, BC = \sqrt{13}, AC = 4$, 则边 AC 上的高为 ()
- A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $3\sqrt{3}$
- (12) 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名教师, 则不同的分配方案共有 ()
- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

(13) 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是_____.

(14) 用平面 α 截半径为 R 的球, 如果球心到平面 α 的距离为 $\frac{R}{2}$, 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为_____.

(15) 函数 $y = \sin x - \frac{1}{2} \cos x (x \in R)$ 的最大值为_____.

(16) 设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则点 P 到直线 $3x - 4y - 10 = 0$ 的距离的最小值为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

解方程 $4^x - 2^{x+2} - 12 = 0$.

(18) (本小题满分 12 分)

已知 α 为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$ 的值.

(19) (本上题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_1^2 = 9S_2$,

$S_4 = 4S_2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (本小题满分 12 分)

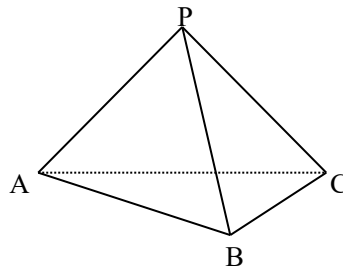
某村计划建造一个室内面积为 800m^2 的矩形蔬菜温室，在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1m 宽的通道，沿前侧内墙保留 3m 宽的空地。当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？

(21) (本小题满分 12 分)

三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA=PB=PC=3$.

(1) 求证 $AB \perp BC$;

(2) 如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$, 求侧面 PBC 与侧面 PAC 所成二面角的大小.



(22) (本小题满分 14 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$ 与 $F_2(c,0)(c > 0)$, 且椭圆上存在点 P,

使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 设 L 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 L 相交于点 Q. 若 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$,

求直线 PF_2 的方程.

2004年普通高等学校招生全国统一考试
数学(文史类)(老课程)参考答案

1—12 BCBBD AACDC BC

13. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ 14. $\frac{3}{16}$ 15. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 16. 1

三、解答题

17. 本小题主要考查指数和对数的性质以及解方程的有关知识. 满分12分.

解: $(2^x)^2 - 4(2^x) - 12 = 0.$

$$(2^x - 6)(2^x + 2) = 0.$$

$$2^x = 6, 2^x = -2 \text{ (无解)}. \text{ 所以 } x = \log_2 6.$$

18. 本小题主要考查同角三角函数的基本关系式、二倍角公式等基础知识以及三角恒等变形的能力. 满分12分.

解: 原式 = $\frac{\sin \alpha \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha}.$

因为 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 时, $\sin \alpha \neq 0, \cos 2\alpha \neq 0,$

所以 原式 = $\frac{1}{2 \cos \alpha}.$

因为 α 为锐角, 由 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 得 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

所以 原式 = $\frac{\sqrt{5}}{4}.$

因为 α 为锐角, 由 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 得 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

所以 原式 = $\frac{\sqrt{5}}{4}.$

19. 本小题主要考查等差数列的通项公式, 前 n 项和公式等基础知识, 根据已知条件列方程以及运算能力. 满分 12 分.

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 及已知条件得

$$(3a_1 + 3d)^2 = 9(2a_1 + d), \quad \textcircled{1}$$

$$4a_1 + 6d = 4(2a_1 + d), \quad \textcircled{2}$$

由②得 $d = 2a_1$, 代入①有 $a_1^2 = \frac{4}{9}a_1$

解得 $a_1 = 0$ 或 $a_1 = \frac{4}{9}$. 当 $a_1 = 0$ 时, $d = 0$, 舍去.

因此 $a_1 = \frac{4}{9}, d = \frac{8}{9}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{4}{9} + (n-1) \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9}(2n-1)$.

20. 本小题主要考查把实际问题抽象为数学问题, 应用不等式等基础知识和方法解决问题的能力. 满分 12 分.

解: 设矩形温室的左侧边长为 a m, 后侧边长为 b m, 则

$$ab = 800.$$

蔬菜的种植面积

$$S = (a-4)(b-2)$$

$$= ab - 4b - 2a + 8$$

$$= 808 - 2(a+2b).$$

所以 $S \leq 808 - 4\sqrt{2ab} = 648(m^2)$.

当 $a=2b$, 即 $a=40(m), b=20(m)$ 时, $S_{\text{最大值}} = 648(m^2)$.

答: 当矩形温室的左侧边长为 40m, 后侧边长为 20m 时, 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积为 648m².

21. 本小题主要考查两个平面垂直的性质、二面角等有关知识, 以有逻辑思维能力和空间想象能力. 满分 12 分.

(1) 证明: 如果, 取 AC 中点 D , 连结 PD 、 BD .

因为 $PA=PC$, 所以 $PD \perp AC$,

又已知面 $PAC \perp$ 面 ABC ,

所以 $PD \perp$ 面 ABC , D 为垂足.

因为 $PA=PB=PC$,

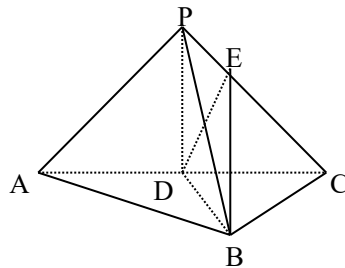
所以 $DA=DB=DC$, 可知 AC 为 $\triangle ABC$ 外接圆直径,

因此 $AB \perp BC$.

(2) 解: 因为 $AB=BC$, D 为 AC 中点, 所以 $BD \perp AC$.

又面 $PAC \perp$ 面 ABC ,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC , D 为垂足.



作 $BE \perp PC$ 于 E , 连结 DE ,
 因为 DE 为 BE 在平面 PAC 内的射影,
 所以 $DE \perp PC$, $\angle BED$ 为所求二面角的平面角.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=BC=2\sqrt{3}$, 所以 $BD=\sqrt{6}$.

在 $Rt\triangle PDC$ 中, $PC=3$, $DC=\sqrt{6}$, $PD=\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } DE = \frac{PD \cdot DC}{PC} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}.$$

$$\text{因此, 在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } \tan \angle BED = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

$$\angle BED = 60^\circ,$$

所以侧面 PBC 与侧面 PAC 所成的二面角为 60° .

22. 本小题主要考查直线和椭圆的基本知识, 以及综合分析和解题能力. 满分 14 分.

解: (1) 由题设有 $m > 0, c = \sqrt{m}$.

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) , 由 $PF_1 \perp PF_2$, 得 $\frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{y_0}{x_0 + c} = -1$,

$$\text{化简得 } x_0^2 + y_0^2 = m. \quad \textcircled{1}$$

将①与 $\frac{x_0^2}{m+1} + y_0^2 = 1$ 联立, 解得 $x_0^2 = \frac{m^2 - 1}{m}, y_0^2 = \frac{1}{m}$.

由 $m > 0, x_0^2 = \frac{m^2 - 1}{m} \geq 0$, 得 $m \geq 1$.

所以 m 的取值范围是 $m \geq 1$.

(2) 准线 L 的方程为 $x = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$. 设点 Q 的坐标为 (x_1, y_1) , 则 $x_1 = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$.

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} - \frac{x_1 - c}{c - x_0} = \frac{\frac{m+1}{\sqrt{m}} - \sqrt{m}}{\sqrt{m} - x_0}. \quad \textcircled{2}$$

将 $x_0 = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m}}$ 代入②, 化简得 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{m - \sqrt{m^2 - 1}} = m + \sqrt{m^2 - 1}$.

由题设 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$, 得 $m + \sqrt{m^2 - 1} = 2 - \sqrt{3}$, 无解.

将 $x_0 = -\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$ 代入②，化简得

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{m + \sqrt{m^2-1}} = m - \sqrt{m^2-1}.$$

由题设 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ ，得 $m - \sqrt{m^2-1} = 2 - \sqrt{3}$.

解得 $m=2$.

从而 $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \sqrt{2}$, 得到 PF_2 的方程

$$y = \pm(\sqrt{3}-2)(x - \sqrt{2}).$$