

2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）
数学（理科）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.

1. 若集合 $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. \emptyset B. $\{-1, -4\}$ C. $\{0\}$ D. $\{1, 4\}$

2. 若复数 $z = i(3 - 2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$

- A. $3 - 2i$ B. $3 + 2i$ C. $2 + 3i$ D. $2 - 3i$

3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是

- A. $y = x + e^x$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = \sqrt{1+x^2}$

4. 袋中共有15个除了颜色外完全相同的球, 其中有10个白球, 5个红球. 从袋中任取2个球, 所

取的2个球中恰有1个白球, 1个红球的概率为

- A. 1 B. $\frac{11}{21}$ C. $\frac{10}{21}$ D. $\frac{5}{21}$

5. 平行于直线 $2x + y + 1 = 0$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线的方程是

- A. $2x - y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - \sqrt{5} = 0$ B. $2x + y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x + y - \sqrt{5} = 0$
C. $2x - y + 5 = 0$ 或 $2x - y - 5 = 0$ D. $2x + y + 5 = 0$ 或 $2x + y - 5 = 0$

6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x + 5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为

- A. $\frac{31}{5}$ B. 6 C. $\frac{23}{5}$ D. 4

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$, 且其右焦点 $F_2(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为

()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值

- A. 大于5 B. 等于5 C. 至多等于4 D. 至多等于3

二、填空题:本大题共7小题,考生作答6小题,每小题5分,满分30分.

(一) 必做题 (9-13题)

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____。

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$, 则 $a_2+a_8=$ _____。

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=\sqrt{3}$, $\sin B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{\pi}{6}$, 则 $b=$ _____。

12. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言。(用数字作答)

13. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言。(用数字作答)

(二) 选做题 (14-15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, 点 A 的极坐标为 $A(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$, 则点 A 到直线 l 的距离为_____。

15. (几何证明选讲选做题) 如图1, 已知 AB 是圆 O 的直径, $AB=4$, EC 是圆 O 的切线, 切点为 C ,

$BC=1$, 过圆心 O 做 BC 的平行线, 分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P , 则 $OD=$ _____。

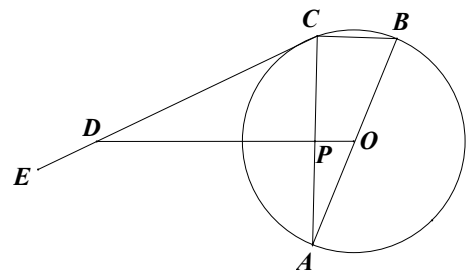


图1

三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题满分12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $m=(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $n=(\sin x, \cos x)$, $x \in (0,$

$\frac{\pi}{2}$)。

- (1) 若 $m \perp n$, 求 $\tan x$ 的值 (2) 若 m 与 n 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值。

17. (本小题满分12分)

某工厂36名工人的年龄数据如下表。

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

- (1) 用系统抽样法从36名工人中抽取容量为9的样本, 且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为44, 列出样本的年龄数据;
- (2) 计算 (1) 中样本的平均值 \bar{x} 和方差 s^2 ;
- (3) 36名工人中年龄在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间有多少人? 所占的百分比是多少 (精确到0.01%) ?

18. (本小题满分14分)

如图2, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4$, $AB = 6$, $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F, G 分别在线段 AB, BC 上, 且 $AF = 2FB$, $CG = 2GB$.

- (1) 证明: $PE \perp FG$;
- (2) 求二面角 $P - AD - C$ 的正切值;
- (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.

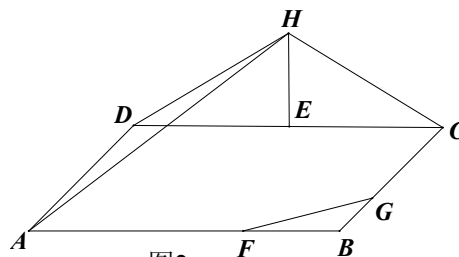


图2

19. (本小题满分14分)

设 $a > 1$, 函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点;

(3)

若曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m, n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是

坐标原点), 证明: $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$

20. (本小题满分14分)

已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点: 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分14分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in N^*$.

(1) 求 a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 T_n ;

(3) 令 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) a_n$ ($n \geq 2$), 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

满足 $S_n < 2 + 2 \ln n$

2015广东高考数学（理）试题（参考答案）

1、A 2、D 3、A 4、C 5、D 6、C 7、B 8、C

9、6 10、10 11、1 12、1560 13、 $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 15、8

16、

解: (1) 因为 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0$.

即 $\sin x = \cos x$, 且 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 1$.

(2) 易求得 $|\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$.

若 \vec{m} 与 \vec{n} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{1 \times 1}$.

化简为: $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $x - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

所以 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$, 解得: $x = \frac{5\pi}{12}$.

17. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由已知, 将 36 名工人分为 4 组, 每组抽取一名工人. 因为在第一分段中抽取的是年龄为 44 的工人, 即编号为 2 的工人, 故每隔 4 个编号取一名工人, 列出样本的数据为: 44, 40, 36, 43, 36, 37, 44, 43, 37.

$$(2) \text{ 均值 } \bar{x} = \frac{44+40+36+43+36+37+44+43+37}{9} = 40;$$

方差

$$s^2 = \frac{1}{9} [(44-40)^2 + (40-40)^2 + (36-40)^2 + (43-40)^2 + (36-40)^2 + (37-40)^2 + (44-40)^2 + (43-40)^2 + (37-40)^2] \\ = \frac{100}{9}.$$

(3) 由题意, 在区间 $\left(40 - \frac{10}{3}, 40 + \frac{10}{3}\right)$ 共有工人 23 人, 所占的百分比为 $\frac{23}{36} \times 100\% \approx 63.89\%$.

18. (本小题满分 14 分)

(1) 证明: 因为 $PD = PC$, 点 E 为 DC 中点, 所以 $PE \perp DC$.

又因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 DC , 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

又 $FG \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE \perp FG$.

(2) 解: 由 (1) 知, $PE \perp AD$.

因为四边形 $ABCD$ 为长方形, 所以 $AD \perp DC$.

又因为 $PE \cap DC = E$, 所以 $AD \perp$ 平面 PDC .

而 $PD \subset$ 平面 PDC , 所以 $AD \perp PD$.

由二面角的平面角的定义, 可知 $\angle PDC$ 为二面角 $P-AD-C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle PDE$ 中, $PE = \sqrt{PD^2 - DE^2} = \sqrt{7}$, 所以 $\tan \angle PDC = \frac{PE}{DE} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

从而二面角 $P-AD-C$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

(3) 解: 连结 AC . 因为 $\frac{AF}{AB} = \frac{BG}{BC} = \frac{1}{3}$, 所以 $FG \parallel AC$.

易求得 $AC = 3\sqrt{5}$, $PA = \sqrt{PD^2 + DA^2} = 5$.

所以直线 PA 与直线 FG 所成角等于直线 PA 与直线 AC 所成角.

即 $\angle PAC$, 在 $\triangle PAC$ 中, $\cos \angle PAC = \frac{PA^2 + AC^2 - PC^2}{2PA \cdot AC} = \frac{9\sqrt{5}}{25}$.

所以直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值为 $\frac{9\sqrt{5}}{25}$.

19. (本小题满分 14 分)

解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 R .

$$\text{因为 } f'(x) = 2x \cdot e^x + (1+x^2)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2 e^x \geq 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 R , 无单调递减区间.

$$(2) \text{ 因为 } a > 1, \text{ 所以 } f(0) = 1-a < 0, \quad f(\ln a) = (1+\ln^2 a)e^{\ln a} - a = a \ln^2 a > 0.$$

且 $\ln a > 0$, 满足 $f(0) \cdot f(\ln a) < 0$

由 (1) 知, $f(x)$ 在 R 上单调递增, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点.

(3) 设点 $P(x_0, y_0)$, 由题意, $f'(x_0) = (x_0+1)^2 e^{x_0} = 0$, 解得: $x_0 = -1$.

$$\text{所以 } y_0 = (1+x_0^2)e^{x_0} - a = \frac{2}{e} - a, \text{ 即 } P \text{ 点的坐标为 } \left(-1, \frac{2}{e} - a\right).$$

$$\text{所以 } k_{OP} = a - \frac{2}{e}. \text{ 由题意可得, } f'(m) = (m+1)^2 e^m = a - \frac{2}{e}.$$

$$\text{要证明: } m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1, \text{ 只需要证明: } m+1 \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}},$$

$$\text{只需要证明: } (m+1)^3 \leq a - \frac{2}{e} = (m+1)^2 e^m,$$

$$\text{只需要证明: } m+1 \leq e^m.$$

$$\text{构造函数: } h(x) = e^x - x - 1 (x \in R), \quad h'(x) = e^x - 1.$$

当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $h(x)$ 有最小值 $h(0) = 0$, 即 $h(x) \geq 0$.

所以 $e^x - x - 1 \geq 0$, 故 $m+1 \leq e^m$, 故原不等式证明成立.

20. (本小题满分 14 分)

解: (1) 圆 C_1 的方程 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 化为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$, 所以圆心坐标为 $(3, 0)$.

(2) 法 1: (代数法)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$), AB 的中点 $M(x_0, y_0)$

$$\text{其中 } x_0 = \frac{x_1 + y_1}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

由题意可知: 直线 l 的斜率必存在, 设为 $y = tx$.

将上述方程代入圆 C_1 的方程, 化简得: $(1+t^2)x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\text{由题意, 可得: } \begin{cases} \Delta = 36 - 20(1+t^2) \cdots \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 = \frac{6}{1+t^2} \cdots \textcircled{2} \end{cases}.$$

$$\text{所以 } x_0 = \frac{3}{1+t^2}, \text{ 代入直线 } l \text{ 的方程, 得: } y_0 = \frac{3t}{1+t^2}.$$

$$\text{因为 } x_0^2 + y_0^2 = \frac{9}{(1+t^2)^2} + \frac{9t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{9(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{9}{1+t^2} = 3x_0,$$

$$\text{即 } \left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 + y_0^2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 解得: } 0 \leq t^2 < \frac{4}{5}, \text{ 所以 } \frac{5}{3} < x_0 \leq 3.$$

法 2: (点差法)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$), AB 的中点 $M(x_0, y_0)$

$$\text{其中 } x_0 = \frac{x_1 + y_1}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

$$\text{将 } A, B \text{ 的坐标代入圆 } C_1 \text{ 的方程, 得: } \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x_2^2 + y_2^2 - 6x_2 + 5 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}.$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得, } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

$$\text{整理得: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 - 6}{y_1 + y_2}.$$

$$\text{因为 } O, A, M, B \text{ 四点均在直线 } l \text{ 上, 所以 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_0}{x_0}.$$

$$\text{所以: } \frac{y_0}{x_0} = -\frac{2x_0 - 6}{2y_0}, \text{ 以下同法 1.}$$

(3) 由(2)知, 曲线 C 是在区间 $\frac{5}{3} < x \leq 3$ 的一段圆弧.

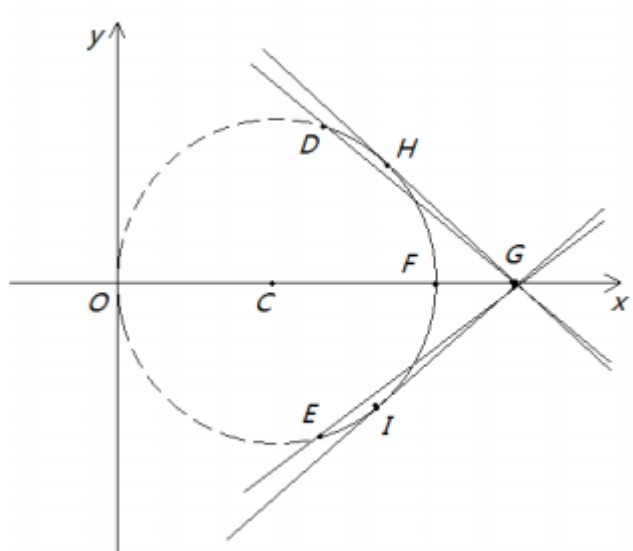
如图, $D\left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right), E\left(\frac{5}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right), F(3, 0)$, 直线 L 过定点 $G(4, 0)$.

联立直线 L 的方程与曲线 C 的方程, 整理得: $(1+k^2)x^2 - (3+8k^2)x + 16k^2 = 0$.

令判别式 $\Delta = 0$, 解得: $k = \pm \frac{3}{4}$, 由求根公式解得交点的横坐标为 $x_{H,I} = \frac{12}{5} \in \left(\frac{5}{3}, 3\right]$

结合图像可以判断, 当直线 L 在弧 DFE 上运动时(不包括 D, E 两点), 要与曲线 C

只有一个交点, 则满足 $k \in (k_{DG}, k_{EG}) \cup \{k_{GH}, k_{GI}\}$, 即 $k \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{7}\right) \cup \left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$.



21. (本小题满分 14 分)

解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1=1$; 当 $n=2$ 时, $a_1+2a_2=2$. 解得: $a_2=\frac{1}{2}$;

当 $n=3$ 时, $a_1+2a_2+3a_3=\frac{11}{4}$. 解得: $a_3=\frac{1}{4}$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\cdots$ ①

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=4-\frac{n+1}{2^{n-2}}\cdots$ ②

由①—②得, $na_n=\frac{n}{2^{n-1}}$, 所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(n \geq 2)$

经检验, $a_1=1$ 也适合上式, 所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(n \in N^*)$.

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$\text{所以 } T_n = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(3) $b_1=1$, $b_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} (n \geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $S_1=1 < 2+2\ln 1$ 显然成立.

当 $n=2$ 时, $S_2=1+\frac{5}{4}=2+\frac{1}{4}=2+2\ln e^{\frac{1}{8}} < 2+2\ln 2$ 也成立.

当 $n \geq 3$ 时, $b_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

$$< \frac{2}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+5}{2^n}$$

令 $c_n = \frac{2n+5}{2^n} (n \geq 1)$, 数列 $\{c_n\}$ 的和为 R_n .

$$\text{则 } R_n = \frac{7}{2} + \frac{9}{2^2} + \cdots + \frac{2n+5}{2^n}, \quad \frac{R_n}{2} = \frac{7}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \cdots + \frac{2n+5}{2^{n+1}}.$$

$$\text{两式相减得: } \frac{R_n}{2} = \frac{7}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{7}{2} + 2 \times \frac{\frac{1}{2^2} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n+5}{2^{n+1}} = \frac{9}{2} - \frac{2n+9}{2^{n+1}}$$

$$\text{求得: } R_n = 9 - \frac{2n+9}{2^n}$$

$$\text{所以当 } n \geq 3 \text{ 时, } S_n < 1 + \frac{5}{4} + (n-2) \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{3} \cdot \left(9 - \frac{2n+9}{2^n} - \frac{7}{2} - \frac{9}{4} \right)$$

$$= 2 + \left[\frac{9}{4} - \frac{4}{n} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{13}{4} - \frac{2n+9}{2^n} \right) \right] < 2 + \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{n} \right)$$

$$\text{构造函数 } f(x) = \frac{10}{3} - \frac{4}{x} - 2 \ln x (x \geq 3), \quad f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{2(2-x)}{x^2} < 0.$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } [3, +\infty) \text{ 上单调递减, 从而 } f(x) \leq f(3) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} - 2 \ln 3 = 2(1 - \ln 3) < 0.$$

$$\text{即 } \frac{10}{3} - \frac{4}{n} - 2 \ln n < 0, \text{ 所以 } S_n < 2 + 2 \ln n.$$

综上, 满足 $S_n < 2 + 2 \ln n, n \in \mathbb{N}^*$.

(以上解答若有疑问或错误, 敬请指出!)

(3) $n \geq 2$ 时, \leftarrow

$$b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) a_n \leftarrow$$

$$\text{故 } S_n = \sum_{i=1}^n b_i \leftarrow$$

$$= a_1 + \frac{a_1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) a_2 + \frac{a_1 + a_2}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) a_3 + \cdots + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) a_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) a_3 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) a_n \leftarrow$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) T_n \leftarrow$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leftarrow$$

$$< 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \leftarrow$$

$$\text{只需证明 } 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) < 2 + 2 \ln n, \quad n \in \mathbb{N}^* \leftarrow$$

往下用逐项比较也行, 定积分也行…… \leftarrow

以下为选择填空解析!

一、选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 满分40分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{1, 4\}$ B. $\{-1, -4\}$ C. $\{0\}$ D. \emptyset

【答案】D

【解析】 $\because M = \{x | (x+4)(x+1) = 0\} = \{-4, -1\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1) = 0\} = \{1, 4\}$

$$\therefore M \cap N = \Phi$$

2. 若复数 $z = i(3-2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$

- A. $2-3i$ B. $2+3i$ C. $3+2i$ D. $3-2i$

【答案】A

【解析】 $\because z = i(3-2i) = 3i+2,$

$$\therefore \bar{z} = 2-3i$$

3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是

- A. $y = \sqrt{1+x^2}$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = x + e^x$

【答案】D

【解析】A和C选项为偶函数, B选项为奇函数, D选项为非奇非偶函数

4.

袋中共有15个除了颜色外完全相同的球, 其中有10个白球, 5个红球, 从袋中任取2个球, 所取的2个球中恰好有1个白球, 1个红球的概率为

- A. $\frac{5}{21}$ B. $\frac{10}{21}$ C. $\frac{11}{21}$ D. 1

【答案】B

【解析】 $P = \frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{10}{21}$

5. 平行于直线 $2x+y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程是

- A. $2x+y+5=0$ 或 $2x+y-5=0$ B. $2x+y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x+y-\sqrt{5}=0$
C. $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$ D. $2x-y+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-\sqrt{5}=0$

【答案】A

【解析】设所求直线为 $2x+y+c=0$, 因为圆心坐标为 $(0, 0)$, 则由直线与圆相切可得

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 解得 } c = \pm 5, \text{ 所求直线方程为}$$

$$2x+y+5=0 \text{ 或 } 2x+y-5=0$$

6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x+5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 3x+2y$ 的最小值为

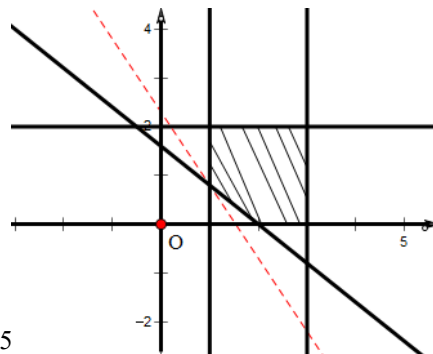
- A. 4 B. $\frac{23}{5}$ C. 6 D. $\frac{31}{5}$

【答案】B

【解析】如图所示，阴影部分为可行域，虚线表示目标

函数 $z = 3x + 2y$ ，则当目标函数过点 $(1, \frac{8}{5})$ ，

$z = 3x + 2y$ 取最小值为 $\frac{23}{5}$



7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$ ，且其右焦点为 $F_2(5, 0)$

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】C

【解析】由双曲线右焦点为 $F_2(5, 0)$ ，则 $c=5$ ， $\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \therefore a = 4$

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 9$ ，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等，则正整数 n 的取值

- A. 至多等于3 B. 至多等于4 C. 等于5 D. 大于5

【答案】B

【解析】当 $n = 3$ 时，正三角形的三个顶点符合条件；当 $n = 4$ 时，正四面体的四个顶点符合条件

故可排除A, C, D四个选项，故答案选B

二、填空题：本大题 共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分。

(一) 必做题 (9-13题)

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中， x 的系数为_____.

【答案】6

【解析】 $C_4^r (\sqrt{x})^{4-r} (-1)^r = (-1)^r C_4^r x^{\frac{4-r}{2}}$ ，则当 $r = 2$ 时， x 的系数为 $(-1)^2 C_4^2 = 6$

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25$ ，则 $a_2 + a_8 =$ _____.

【答案】10

【解析】由等差数列性质得， $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a_5 = 25$ ，解得 $a_5 = 5$ ，所以

$$a_2 + a_8 = 2a_5 = 10$$

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c, 若 $a = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 则b=_____.

【答案】1

【解析】 $\because \sin B = \frac{1}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$, 又 $\because C = \frac{\pi}{6}$, 故 $B = \frac{\pi}{6}$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$

由正弦定理得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $b = 1$

12. 某高三毕业班有40人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了____条毕业留言。(用数字作答)

【答案】1560

13. 已知随机变量X服从二项分布 $B(n, p)$, $E(X) = 30$, $D(X) = 20$, 则 $p =$ ____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $E(X) = np = 30$, $D(X) = np(1-p) = 20$, 解得 $p = \frac{1}{3}$

(二) 选做题 (14-15题, 考生只能从中选做一题),

14.

(坐标系与参数方程选做题)

已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 点 A 的极坐标为 $A(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$, 则点 A 到直线 l 的距离为 ____.

【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】 $\because 2\rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta) = \sqrt{2} \therefore \rho\sin\theta - \rho\cos\theta = 1$

即直线 l 的直角坐标方程为 $y - x = 1$, 即 $x - y + 1 = 0$, 点 A 的直角坐标为 $(2, -2)$

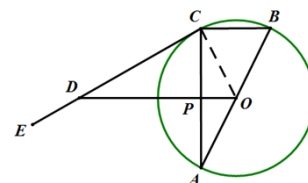
A 到直线的距离为 $d = \frac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

15.

(几何证明选讲选做题)如图1, 已知 AB 是圆 O 的直径, $AB = 4$, EC 是圆 O 的切线, 切点为 C , $BC = 1$, 过圆心 O 作 BC 的平行线, 分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P , 则 $OD =$ ____.

【答案】8

【解析】



如图所示, 连结 O, C 两点, 则 $OC \perp CD$, $\therefore OD \perp AC$
 $\therefore \angle CDO + \angle ACD = 90^\circ$

$\because \angle ACD = \angle CBA$, $\angle CBA + \angle CAB = 90^\circ$, $\therefore \angle CDO = \angle CAB$

则, 所以 $\frac{OD}{AB} = \frac{OC}{BC}$, 所以 $OD = 8$