

# 1997 年河南高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。

## 第 I 卷（选择题共 65 分）

一、选择题：本大题共 15 小题；第(1)一(10)题每小题 4 分，第(11)一(15)题每小题 5 分，共 65 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

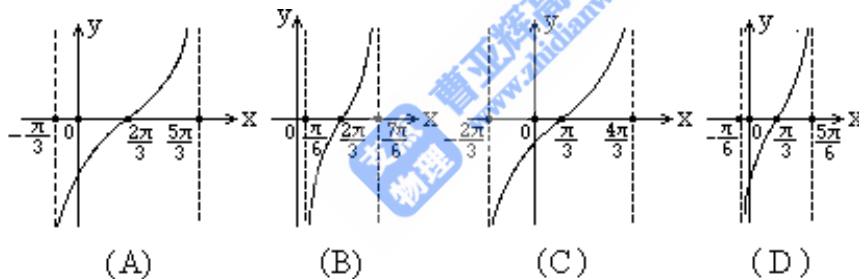
1. 设集合  $M = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$ ，集合  $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合  $M \cap N =$  ( )

- (A)  $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$  (B)  $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$   
 (C)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$  (D)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

2. 如果直线  $ax + 2y + 2 = 0$  与直线  $3x - y - 2 = 0$  平行，那么系数  $a =$  ( )

- (A)  $-3$  (B)  $-6$  (C)  $-\frac{3}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

3. 函数  $y = \text{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$  在一个周期内的图像是 ( )



4. 已知三棱锥  $D-ABC$  的三个侧面与底面全等，且  $AB=AC=\sqrt{3}$ ， $BC=2$ ，则以  $BC$  为棱，以面  $BCD$  与面  $BCA$  为面的二面角的大小是 ( )

- (A)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\arccos \frac{1}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{2\pi}{3}$

5. 函数  $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \cos 2x$  的最小正周期是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$

6. 满足  $\arccos(1-x) \geq \arccos x$  的  $x$  的取值范围是 ( )

- (A)  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$  (B)  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  (C)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

7. 将  $y=2^x$  的图像 ( )

- (A) 先向左平行移动 1 个单位                      (B) 先向右平行移动 1 个单位  
 (C) 先向上平行移动 1 个单位                      (D) 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线  $y=x$  对称的图像, 可得到函数  $y=\log_2(x+1)$  的图像.

8. 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5, 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是 ( )

- (A)  $20\sqrt{2}\pi$                       (B)  $25\sqrt{2}\pi$                       (C)  $50\pi$                       (D)  $200\pi$

9. 曲线的参数方程是  $\begin{cases} x=1-\frac{1}{t} \\ y=1-t^2 \end{cases}$  ( $t$  是参数,  $t \neq 0$ ), 它的普通方程是 ( )

- (A)  $(x-1)^2(y-1)=1$                       (B)  $y=\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$   
 (C)  $y=\frac{1}{(1-x)^2}-1$                       (D)  $y=\frac{x}{1-x^2}+1$

10. 函数  $y=\cos^2x-3\cos x+2$  的最小值为 ( )

- (A) 2                      (B) 0                      (C)  $-\frac{1}{4}$                       (D) 6

11. 椭圆  $C$  与椭圆  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$  关于直线  $x+y=0$  对称, 椭圆  $C$  的方程是 ( )

- (A)  $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$                       (B)  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$   
 (C)  $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$                       (D)  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

12. 圆台上、下底面积分别为  $\pi$ 、 $4\pi$ , 侧面积为  $6\pi$ , 这个圆台的体积是 ( )

- (A)  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$                       (B)  $2\sqrt{3}\pi$                       (C)  $\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$                       (D)  $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

13. 定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  的奇函数  $f(x)$  为增函数; 偶函数  $g(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  的图像与  $f(x)$  的图像重合, 设  $a > b > 0$ , 给出下列不等式:

- ①  $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$ ;  
 ②  $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$ ;  
 ③  $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$ ;



其中正确的命题的序号是\_\_\_\_\_ (注:把你认为正确的命题的序号都填上)

三. 解答题:本大题共 6 小题;共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20. (本小题满分 10 分)

已知复数  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . 复数  $\overline{z\omega}$ ,  $z^2\omega^3$  在复数平面上所对应的点分

别为  $P, Q$ . 证明  $\triangle OPQ$  是等腰直角三角形 (其中  $O$  为原点).

21. (本小题满分 11 分)

已知数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  都是由正数组成的等比数列, 公比分别为  $p, q$ , 其中  $p > q$ , 且

$p \neq 1, q \neq 1$ . 设  $c_n = a_n + b_n$ ,  $S_n$  为数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}}$ .

22. (本小题满分 12 分)

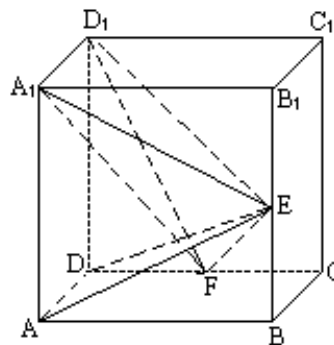
甲、乙两地相距  $S$  千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过  $c$  千米/时. 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度  $v$  (千米/时) 的平方成正比、比例系数为  $b$ ; 固定部分为  $a$  元.

I. 把全程运输成本  $y$  (元) 表示为速度  $v$  (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;

II. 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

23. (本小题满分 12 分)

如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别是  $BB_1, CD$  的中点.



I. 证明  $AD \perp D_1F$ ;

II. 求  $AE$  与  $D_1F$  所成的角;

III. 证明面  $AED \perp$  面  $A_1FD_1$ ;

IV. 设  $AA_1=2$ , 求三棱锥  $F-A_1ED_1$  的体积  $V_{F-A_1ED_1}$

24. (本小题满分 12 分)

设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ , 方程  $f(x) - x = 0$  的两个根  $x_1, x_2$  满足  $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$ .

I. 当  $x \in (0, x_1)$  时, 证明  $x < f(x) < x_1$ ;

11. 设函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x=x_0$  对称, 证明  $x_0 < \frac{x_1}{2}$ .

(25) (本小题满分 12 分)

设圆满足: ①截  $y$  轴所得弦长为 2; ②被  $x$  轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3:1, 在满足条件①、②的所有圆中, 求圆心到直线  $l: x-2y=0$  的距离最小的圆的方程.

### 1997 年普通高等学校招生全国统一考试

#### 数学试题(理工农医类)参考解答及评分标准

一. 选择题: 本题考查基本知识和基本运算.

1. B    2. B    3. A    4. C    5. B    6. D    7. D    8. C    9. B    10. B  
11. A    12. D    13. C    14. C    15. D

二. 填空题: 本题考查基本知识和基本运算.

16. 4    17.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     18.  $2-\sqrt{3}$     19. ①, ④

注: 第(19)题多填、漏填和错填均给 0 分.

三. 解答题

20. 本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算以及复数的几何意义等基础知识, 考查运算能力和逻辑推理能力.

解法一:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

于是

$$z\omega = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},$$

$$\overline{z\omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z^2\omega^3 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \times \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$

因为  $OP$  与  $OQ$  的夹角为  $\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $OP \perp OQ$ .

因为  $|OP| = |\overline{z\omega}| = 1, |OQ| = |z^2\omega^3| = 1$ , 所以  $|OP| = |OQ|$

由此知  $\triangle OPQ$  有两边相等且其夹角为直角, 故  $\triangle OPQ$  为等腰直角三角形.

解法二:

因为  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ , 所以  $z^3 = -i$ .

因为  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ , 所以  $\omega^4 = -1$

于是  $\frac{z^2\omega^3}{z\omega} = \frac{z^2\omega^3}{z\omega} \cdot \frac{z\omega}{z\omega} = \frac{z^3\omega^4}{|z|^2|\omega|^2} = i$

由此得  $OP \perp OQ, |OP| = |OQ|$ .

由此知  $\triangle OPQ$  有两边相等且其夹角为直角, 故  $\triangle OPQ$  为等腰直角三角形.

(21) 本小题主要考查等比数列的概念、数列极限的运算等基础知识, 考查逻辑推理能力和运算能力. 满分 11 分.

解:

$$S_n = \frac{a_1(p^n - 1)}{p - 1} + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{a_1(q-1)(p^n - 1) + b_1(p-1)(q^n - 1)}{a_1(q-1)(p^{n-1} - 1) + b_1(p-1)(q^{n-1} - 1)}.$$

分两种情况讨论.

(I)  $p > 1$ .

$$\because p > q > 0, 0 < \frac{q}{p} < 1,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n [a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^n}) + b_1(p-1)(\frac{q^n}{p^n} - \frac{1}{p^n})]}{p^{n-1} [a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^{n-1}}) + b_1(p-1)(\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}})]} \\
&= p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^n}) + b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^n - \frac{1}{p^n}]}{a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^{n-1}}) + b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^{n-1} - \frac{1}{p^{n-1}}]} \\
&= p \cdot \frac{a_1(q-1)}{a_1(q-1)}
\end{aligned}$$

$= p$ .

(II)  $p < 1$ .

$\because 0 < q < p < 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q-1)(p^n - 1) + b_1(p-1)(q^n - 1)}{a_1(q-1)(p^{n-1} - 1) + b_1(p-1)(q^{n-1} - 1)} \\
&= \frac{-a_1(q-1) - b_1(p-1)}{-a_1(q-1) - b_1(p-1)} = 1
\end{aligned}$$

(22) 本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识，考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：(I) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为  $\frac{S}{v}$ ，全程运输成本为

$$y = a \cdot \frac{S}{v} + bv^2 \cdot \frac{S}{v} = S(\frac{a}{v} + bv)$$

故所求函数及其定义域为

$$y = S(\frac{a}{v} + bv), v \in (0, c]$$

(II) 依题意知  $S, a, b, v$  都为正数，故有

$$S(\frac{a}{v} + bv) \geq 2S\sqrt{ab}$$

当且仅当  $\frac{a}{v} = bv$ , 即  $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$  时上式中等号成立

若  $\sqrt{\frac{a}{b}} \leq c$ , 则当  $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$  时, 全程运输成本  $y$  最小,

若  $\sqrt{\frac{a}{b}} > c$ , 则当  $v \in (0, c]$  时, 有

$$\begin{aligned} & S\left(\frac{a}{v} + bv\right) - S\left(\frac{a}{c} + bc\right) \\ &= S\left[\left(\frac{a}{v} - \frac{a}{c}\right) + (bv - bc)\right] \\ &= \frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv) \end{aligned}$$

因为  $c-v \geq 0$ , 且  $a > bc^2$ , 故有  $a-bcv \geq a-bc^2 > 0$ ,

所以  $S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq S\left(\frac{a}{c} + bc\right)$ , 且仅当  $v=c$  时等号成立,

也即当  $v=c$  时, 全程运输成本  $y$  最小.

综上知, 为使全程运输成本  $y$  最小, 当  $\frac{\sqrt{ab}}{b} \leq c$  时行驶速度应为  $v = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ ; 当

$\frac{\sqrt{ab}}{b} > c$  时行驶速度应为  $v=c$ .

(23) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 考查逻辑推理能力和空间想象能力, 满分 12 分.

解: (I)  $\because AC_1$  是正方体,

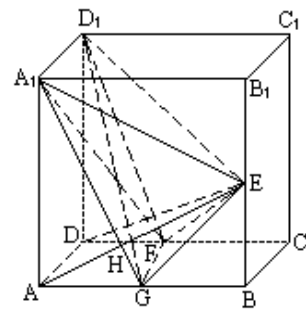
$\therefore AD \perp$  面  $DC_1$ .

又  $D_1F \subset$  面  $DC_1$ ,

$\therefore AD \perp D_1F$ .

(II) 取  $AB$  中点  $G$ , 连结  $A_1G, FG$ . 因为  $F$  是  $CD$  的中点, 所以  $GF, AD$  平行且相等, 又  $A_1D_1, AD$  平行且相等, 所以  $GF, A_1D_1$  平行且相等, 故  $GFD_1A_1$  是平行四边形,  $A_1G \parallel D_1F$ .

设  $A_1G$  与  $AE$  相交于点  $H$ , 则  $\angle AHA_1$  是  $AE$  与  $D_1F$  所成的角, 因为  $E$  是  $BB_1$  的中点, 所以  $\text{Rt} \triangle A_1AG \cong \text{Rt} \triangle ABE$ ,  $\angle GA_1A = \angle GAH$ , 从而  $\angle AHA_1 = 90^\circ$ , 即直线  $AE$  与  $D_1F$  所成角为直角.



(III) 由(I)知  $AD \perp D_1F$ , 由(II)知  $AE \perp D_1F$ , 又  $AD \cap AE = A$ , 所以  $D_1F \perp$  面  $AED$ . 又因为  $D_1F \subset$  面  $A_1FD_1$ , 所以面  $AED \perp$  面  $A_1FD_1$ .

(IV) 连结  $GE, GD_1$ .

$\because FG \parallel A_1D_1, \therefore FG \parallel$  面  $A_1ED_1$ ,

$$\therefore V_{F-A_1ED_1} = V_{G-A_1ED_1} = V_{D_1-A_1GE}$$

$\because AA_1 = 2$ ,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\Delta A_1GE} &= S_{\text{正方形 } ABB_1A_1} - 2S_{\Delta A_1AG} - S_{\Delta GBE} = \frac{3}{2} \\ V_{F-A_1ED_1} &= V_{D_1-A_1GE} = \frac{1}{3} \times A_1D_1 \times S_{\Delta A_1GE} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

(24) 本小题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识, 考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

证明: (I) 令  $F(x) = f(x) - x$ . 因为  $x_1, x_2$  是方程  $f(x) - x = 0$  的根, 所以

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

当  $x \in (0, x_1)$  时, 由于  $x_1 < x_2$ , 得  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ , 又  $a > 0$ , 得

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

即  $x < f(x)$ .

$$\begin{aligned} x_1 - f(x) &= x_1 - [x + F(x)] \\ &= x_1 - x + a(x_1 - x)(x - x_2) \\ &= (x_1 - x)[1 + a(x - x_2)] \end{aligned}$$

因为  $0 < x < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$

所以  $x_1 - x > 0, 1 + a(x - x_2) = 1 + ax - ax_2 > 1 - ax_2 > 0$ .

得  $x_1 - f(x) > 0$ .

由此得  $f(x) < x_1$ .

(II) 依题意知

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

因为  $x_1, x_2$  是方程  $f(x) - x = 0$  的根, 即  $x_1, x_2$  是方程  $ax^2 + (b-1)x + c = 0$  的根.

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b-1}{a},$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{a(x_1 + x_2) - 1}{2a} = \frac{ax_1 + ax_2 - 1}{2a}$$

因为  $ax_2 < 1$ , 所以  $x_0 < \frac{ax_1}{2a} = \frac{x_1}{2}$ .

(25) 本小题主要考查轨迹的思想, 求最小值的方法, 考查综合运用知识建立曲线方程的能力. 满分 12 分.

解法一: 设圆的圆心为  $P(a, b)$ , 半径为  $r$ , 则点  $P$  到  $x$  轴,  $y$  轴的距离分别为  $|b|$ ,  $|a|$ .

由题设知圆  $P$  截  $x$  轴所得劣弧对的圆心角为  $90^\circ$ , 知圆  $P$  截  $x$  轴所得的弦长为  $\sqrt{2}r$ , 故  $r^2 = 2b^2$ ,

又圆  $P$  截  $y$  轴所得的弦长为 2, 所以有

$$r^2 = a^2 + 1.$$

从而得  $2b^2 - a^2 = 1$ .

又点  $P(a, b)$  到直线  $x - 2y = 0$  的距离为

$$d = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}},$$

所以  $5d^2 = |a - 2b|^2$

$$= a^2 + 4b^2 - 4ab$$

$$\geq a^2 + 4b^2 - 2(a^2 + b^2)$$

$$= 2b^2 - a^2 = 1,$$

当且仅当  $a = b$  时上式等号成立, 此时  $5d^2 = 1$ , 从而  $d$  取得最小值.

由此有

$$\begin{cases} a = b, \\ 2b^2 - a^2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

由于  $r^2 = 2b^2$  知  $r = \sqrt{2}$ .

于是, 所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2, \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2.$$

解法二:同解法一, 得  $d = \frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$$\therefore a-2b = \pm\sqrt{5}d$$

$$\text{得 } a^2 = 4b^2 \pm 4\sqrt{5}bd + 5d^2 \quad \text{①}$$

将  $a^2=2b^2-1$  代入①式, 整理得

$$2b^2 \pm 4\sqrt{5}db + 5d^2 + 1 = 0 \quad \text{②}$$

把它看作  $b$  的二次方程, 由于方程有实根, 故判别式非负, 即

$$\Delta = 8(5d^2 - 1) \geq 0,$$

$$\text{得 } 5d^2 \geq 1.$$

$$\therefore 5d^2 \text{ 有最小值 } 1, \text{ 从而 } d \text{ 有最小值 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

将其代入②式得  $2b^2 \pm 4b + 2 = 0$ . 解得  $b = \pm 1$ .

将  $b = \pm 1$  代入  $r^2 = 2b^2$ , 得  $r^2 = 2$ . 由  $r^2 = a^2 + 1$  得  $a = \pm 1$ .

综上  $a = \pm 1, b = \pm 1, r^2 = 2$ .

由  $|a-2b|=1$  知  $a, b$  同号.

于是, 所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2, \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2.$$