

## 2002 年湖南高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 9 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

### 第 I 卷(选择题共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  的圆心到直线  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  的距离是
- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C. 1                      D.  $\sqrt{3}$
2. 复数  $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$  的值是
- A.  $-i$                       B.  $i$                       C.  $-1$                       D. 1
3. 不等式  $(1+x)(1-|x|) > 0$  的解集是
- A.  $\{x | 0 \leq x < 1\}$                       B.  $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
- C.  $\{x | -1 < x < 1\}$                       D.  $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
4. 在  $(0, 2\pi)$  内, 使  $\sin x > \cos x$  成立的  $x$  的取值范围是
- A.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$                       B.  $(\frac{\pi}{4}, \pi)$
- C.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$                       D.  $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
5. 设集合  $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$ ,  $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$ , 则
- A.  $M = N$                       B.  $M \subset N$                       C.  $M \supset N$                       D.  $M \cap N = \emptyset$
6. 点  $P(1,0)$  到曲线  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$  (其中参数  $t \in R$ ) 上的点的最短距离为
- A. 0                      B. 1                      C.  $\sqrt{2}$                       D. 2

7. 一个圆锥和一个半球有公共底面，如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等，那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是

- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{3}{5}$

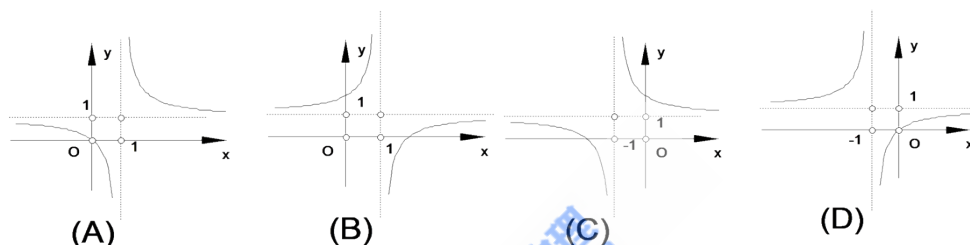
8. 正六棱柱  $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  的底面边长为 1，侧棱长为  $\sqrt{2}$ ，则这个棱柱侧面对角线  $E_1D$  与  $BC_1$  所成的角是

- A.  $90^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $30^\circ$

9. 函数  $y = x^2 + bx + c$  ( $c \in [0, +\infty)$ ) 是单调函数的充要条件是

- A.  $b \geq 0$                       B.  $b \leq 0$                       C.  $b > 0$                       D.  $b < 0$

10. 函数  $y = 1 - \frac{1}{x-1}$  的图象是



11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有

- A. 8 种                      B. 12 种                      C. 16 种                      D. 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》：“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7.3%”，如果“十·五”期间（2001 年—2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为

- A. 115000 亿元                      B. 120000 亿元                      C. 127000 亿元                      D. 135000 亿元

### 第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线。

13. 函数  $y = a^x$  在  $[0,1]$  上的最大值与最小值这为 3，则  $a =$  \_\_\_\_\_

14. 椭圆  $5x^2 + ky^2 = 5$  的一个焦点是  $(0,2)$ ，那么  $k =$  \_\_\_\_\_

15.  $(x^2 + 1)(x - 2)^7$  展开式中  $x^3$  的系数是 \_\_\_\_\_

16. 已知  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，那么  $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) =$  \_\_\_\_\_

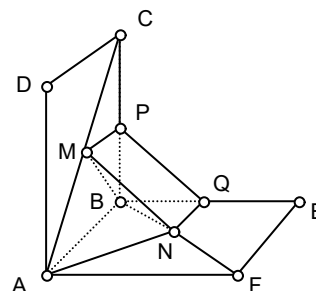
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知  $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 求  $\sin \alpha$ 、 $\operatorname{tg} \alpha$  的值.

18. 如图, 正方形  $ABCD$ 、 $ABEF$  的边长都是 1, 而且平面  $ABCD$ 、 $ABEF$  互相垂直. 点  $M$  在  $AC$  上移动, 点  $N$  在  $BF$  上移动, 若  $CM = BN = a$

( $0 < a < \sqrt{2}$ )

- (1) 求  $MN$  的长;
- (2)  $a$  为何值时,  $MN$  的长最小;
- (3) 当  $MN$  的长最小时, 求面  $MNA$  与面  $MNB$  所成二面角  $\alpha$  的大小.



19. 设点  $P$  到点  $(-1,0)$ 、 $(1,0)$  距离之差为  $2m$ , 到  $x$ 、 $y$  轴的

距离之比为 2, 求  $m$  的取值范围.

20. 某城市 2001 年末汽车保有量为 30 万辆, 预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%, 并且每年新增汽车数量相同. 为保护城市环境, 要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆, 那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

21. 设  $a$  为实数, 函数  $f(x) = x^2 + |x - a| + 1$ ,  $x \in R$

(1) 讨论  $f(x)$  的奇偶性;

(2) 求  $f(x)$  的最小值.

22. 设数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 当  $a_1 = 2$  时, 求  $a_2, a_3, a_4$  并由此猜测  $a_n$  的一个通项公式;

(II) 当  $a_1 \geq 3$  时, 证明对所有的  $n \geq 1$ , 有

(i)  $a_n \geq n + 2$

(ii)  $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{2}$

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	C	B	B	C	B	A	B	B	C

二、填空题

(13) 2      (14) 1      (15) 1008      (16)  $\frac{7}{2}$

三、解答题

(17) 解：由  $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$ ，得

$$4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 0$$

$$2\cos^2 \alpha(2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1) = 0$$

$$\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$2\cos^2 \alpha(2\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1) = 0 \quad \therefore \sin \alpha + 1 \neq 0, \cos^2 \alpha \neq 0$$

$$\therefore 2\sin \alpha - 1 = 0, \text{ 即 } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(18) 解 (I) 作  $MP \parallel AB$  交  $BC$  于点  $P$ ， $NQ \parallel AB$  交  $BE$  于点  $Q$ ，连结  $PQ$ ，依题意可得  $MP \parallel NQ$ ，且  $MP = NQ$ ，即  $MNQP$  是平行四边形。

$$\therefore MN = PQ$$

由已知  $CM = BN = a$ ， $CB = AB = BE = 1$

$$\therefore AC = BF = \sqrt{2}, CP = BQ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\begin{aligned}
 MN = PQ &= \sqrt{(1-CP)^2 + BQ^2} = \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \quad (0 < a < \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

(II) 由 (I)

$$MN = \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

所以, 当  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时,  $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

即当  $M$ 、 $N$  分别为  $AC$ 、 $BF$  的中点时,  $MN$  的长最小, 最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(III) 取  $MN$  的中点  $G$ , 连结  $AG$ 、 $BG$ ,

$\because AM = AN, BM = BN$ ,  $G$  为  $MN$  的中点

$\therefore AG \perp MN, BG \perp MN$ , 即  $\angle AGB$  即为二面角的平面角  $\alpha$

又  $AG = BG = \frac{\sqrt{6}}{4}$ , 所以, 由余弦定理有

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

故所求二面角为  $\alpha = \pi - \arccos \frac{1}{3}$

(19) 解: 设点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 依题设得  $\frac{|y|}{|x|} = 2$ , 即  $y = \pm 2x$ ,  $x \neq 0$

因此, 点  $P(x, y)$ 、 $M(-1, 0)$ 、 $N(1, 0)$  三点不共线, 得

$$\left| |PM| - |PN| \right| < |MN| = 2$$

$$\because \left| |PM| - |PN| \right| = 2|m| > 0$$

$$\therefore 0 < |m| < 1$$

因此, 点  $P$  在以  $M$ 、 $N$  为焦点, 实轴长为  $2|m|$  的双曲线上, 故

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{1-m^2} = 1$$

将  $y = \pm 2x$  代入  $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{1-m^2} = 1$ ，并解得

$$x^2 = \frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}, \text{ 因 } 1-m^2 > 0$$

所以  $1-5m^2 > 0$

$$\text{解得 } 0 < |m| < \frac{\sqrt{5}}{5}$$

即  $m$  的取值范围为  $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}}{5})$

(20) 解：设 2001 年末汽车保有量为  $b_1$  万辆，以后各年末汽车保有量依次为  $b_2$  万辆， $b_3$  万辆， $\dots$ ，每年新增汽车  $x$  万辆，则

$$b_1 = 30, \quad b_2 = b_1 \times 0.94 + x$$

对于  $n > 1$ ，有

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n \times 0.94 + x \\ &= b_{n-1} \times 0.94^2 + (1+0.94)x \\ &\dots \end{aligned}$$

所以  $b_{n+1} = b_1 \times 0.94^n + x(1 + 0.94 + 0.94^2 + \dots + 0.94^n)$

$$\begin{aligned} &= b_1 \times 0.94^n + \frac{1-0.94^n}{0.06}x \\ &= \frac{x}{0.06} + (30 - \frac{x}{0.06}) \times 0.94^n \end{aligned}$$

当  $30 - \frac{x}{0.06} \geq 0$ ，即  $x \leq 1.8$  时

$$b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_1 = 30.$$

当  $30 - \frac{x}{0.06} < 0$ ，即  $x > 1.8$  时

数列  $\{b_n\}$  逐项增加，可以任意靠近  $\frac{x}{0.06}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\frac{x}{0.06} + (30 - \frac{x}{0.06}) \times 0.94^{n-1}] = \frac{x}{0.06}$$

因此，如果要求汽车保有量不超过 60 万辆，即

$$b_n \leq 60 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{则 } \frac{x}{0.06} \leq 60, \text{ 即 } x \leq 3.6 \text{ 万辆}$$

综上，每年新增汽车不应超过 3.6 万辆。

$$(21) \text{ 解: (I) 当 } a = 0 \text{ 时, 函数 } f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$$

此时， $f(x)$  为偶函数

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } f(a) = a^2 + 1, \quad f(-a) = a^2 + 2|a| + 1,$$

$$f(a) \neq f(-a), \quad f(a) \neq -f(-a)$$

此时  $f(x)$  既不是奇函数，也不是偶函数

$$(II) \text{ (i) 当 } x \leq a \text{ 时, } f(x) = x^2 - x + a + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{3}{4}$$

当  $a \leq \frac{1}{2}$ ，则函数  $f(x)$  在  $(-\infty, a]$  上单调递减，从而函数  $f(x)$  在  $(-\infty, a]$  上的最小值为

$$f(a) = a^2 + 1.$$

若  $a > \frac{1}{2}$ ，则函数  $f(x)$  在  $(-\infty, a]$  上的最小值为  $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + a$ ，且  $f(\frac{1}{2}) \leq f(a)$ 。

$$(ii) \text{ 当 } x \geq a \text{ 时, 函数 } f(x) = x^2 + x - a + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - a + \frac{3}{4}$$

若  $a \leq -\frac{1}{2}$ ，则函数  $f(x)$  在  $(-\infty, a]$  上的最小值为  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - a$ ，且  $f(-\frac{1}{2}) \leq f(a)$

若  $a > -\frac{1}{2}$ ，则函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调递增，从而函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的最小值为

$$f(a) = a^2 + 1.$$

综上，当  $a \leq -\frac{1}{2}$  时，函数  $f(x)$  的最小值为  $\frac{3}{4} - a$

当  $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$  时，函数  $f(x)$  的最小值为  $a^2 + 1$

当  $a > \frac{1}{2}$  时，函数  $f(x)$  的最小值为  $\frac{3}{4} + a$ 。

$$(22) \text{ 解 (I) 由 } a_1 = 2, \text{ 得 } a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = 3$$

$$\text{由 } a_2 = 3, \text{ 得 } a_3 = a_2^2 - 2a_2 + 1 = 4$$

$$\text{由 } a_3 = 4, \text{ 得 } a_4 = a_3^2 - 3a_3 + 1 = 5$$

由此猜想  $a_n$  的一个通项公式:  $a_n = n + 1$  ( $n \geq 1$ )

(II) (i) 用数学归纳法证明:

①当  $n = 1$  时,  $a_1 \geq 3 = 1 + 2$ , 不等式成立.

②假设当  $n = k$  时不等式成立, 即  $a_k \geq k + 2$ , 那么

$$a_{k+1} = a_k(a_k - k) + 1 \geq (k + 2)(k + 2 - k) + 1 = 2k + 5 \geq k + 3.$$

也就是说, 当  $n = k + 1$  时,  $a_{k+1} \geq (k + 1) + 2$

据①和②, 对于所有  $n \geq 1$ , 有  $a_n \geq n + 2$ .

(ii) 由  $a_{n+1} = a_n(a_n - n) + 1$  及 (i), 对  $k \geq 2$ , 有

$$a_k = a_{k-1}(a_{k-1} - k + 1) + 1$$

$$\geq a_{k-1}(k - 1 + 2 - k + 1) + 1 = 2a_{k-1} + 1$$

.....

$$a_k \geq 2^{k-1}a_1 + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k-1}(a_1 + 1) - 1$$

$$\text{于是 } \frac{1}{1 + a_k} \leq \frac{1}{1 + a_1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} \leq \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1 + a_1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{2}{1 + a_1} \leq \frac{2}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$