

## 2021年普通高等学校招生全国统一考试（甲卷）

### 文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $N = \{x | 2x > 7\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{7, 9\}$                       B.  $\{5, 7, 9\}$                       C.  $\{3, 5, 7, 9\}$                       D.  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

【答案】 B

【解析】

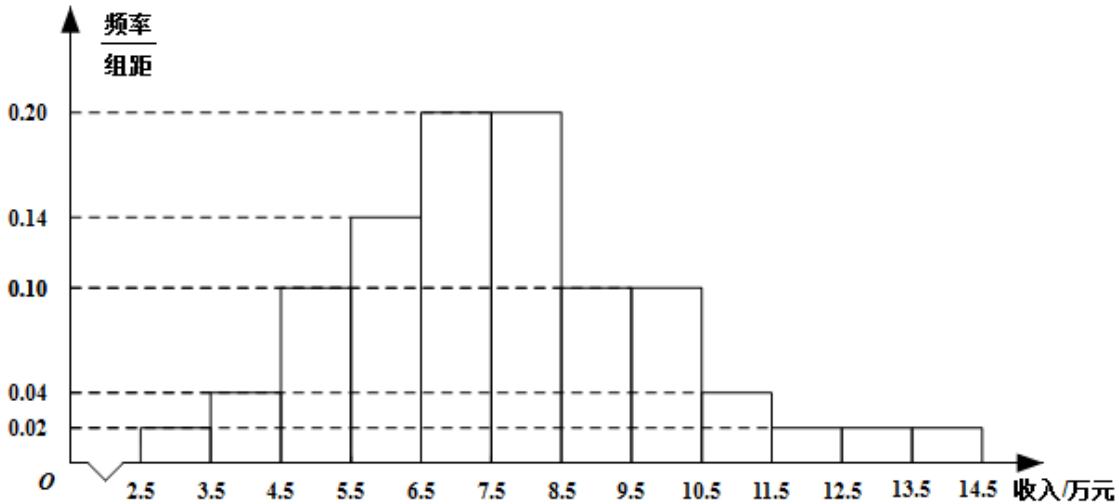
【分析】 求出集合  $N$  后可求  $M \cap N$ .

【详解】  $N = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ , 故  $M \cap N = \{5, 7, 9\}$ ,

故选： B.

2.

为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（ ）

- A. 该地农户家庭年收入低于4.5万元的农户比率估计为6%
- B. 该地农户家庭年收入不低于10.5万元的农户比率估计为10%
- C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过6.5万元
- D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于4.5万元至8.5万元之间

【答案】C

【解析】

【分析】根据直方图的意义直接计算相应范围内的频率，即可判定ABD,以各组的中间值作为代表乘以相应的频率，然后求和即得到样本的平均数的估计值，也就是总体平均值的估计值，计算后即可判定C.

【详解】因为频率直方图中的组距为1，所以各组的直方图的高度等于频率.样本频率直方图中的频率即可作为总体的相应比率的估计值.

该地农户家庭年收入低于4.5万元的农户的比率估计值为  $0.02 + 0.04 = 0.06 = 6%$  ,故A正确;

该地农户家庭年收入不低于10.5万元的农户比率估计值为  $0.04 + 0.02 \times 3 = 0.10 = 10%$  ,故B正确;

该地农户家庭年收入介于4.5万元至8.5万元之间的比例估计值为

$0.10 + 0.14 + 0.20 \times 2 = 0.64 = 64% > 50%$  ,故D正确;

该地农户家庭年收入的平均值的估计值为

$3 \times 0.02 + 4 \times 0.04 + 5 \times 0.10 + 6 \times 0.14 + 7 \times 0.20 + 8 \times 0.20 + 9 \times 0.10 + 10 \times 0.10 + 11 \times 0.04 + 12 \times 0.02 + 13 \times 0.02 + 14 \times 0.02 = 7.68$  (万元), 超

过6.5万元，故C错误.

综上，给出结论中不正确的是C.

故选：C.

【点睛】本题考查利用样本频率直方图估计总体频率和平均值，属基础题，样本的频率可作为总体的频率的估计值，样本的平均值的估计值是各组的中间值乘以其相应频率然后求和所得值，可以作为总体的平均值的估计值.注意各组的频率等于  $\frac{\text{频率}}{\text{组距}} \times \text{组距}$ .

3. 已知  $(1-i)^2 z = 3+2i$ ，则  $z =$  ( )

- A.  $-1-\frac{3}{2}i$                       B.  $-1+\frac{3}{2}i$                       C.  $-\frac{3}{2}+i$                       D.  $-\frac{3}{2}-i$

【答案】B

【解析】

【分析】由已知得  $z = \frac{3+2i}{-2i}$ ，根据复数除法运算法则，即可求解.

【详解】 $(1-i)^2 z = -2iz = 3+2i$ ，

$$z = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i) \cdot i}{-2i \cdot i} = \frac{-2+3i}{2} = -1 + \frac{3}{2}i.$$

故选：B.

4. 下列函数中是增函数的为 ( )

- A.  $f(x) = -x$                       B.  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$                       C.  $f(x) = x^2$                       D.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于A， $f(x) = -x$ 为 $R$ 上的减函数，不合题意，舍.

对于B， $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 $R$ 上的减函数，不合题意，舍.

对于C， $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数，不合题意，舍.

对于D， $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 $R$ 上的增函数，符合题意，

故选：D.

5. 点(3,0)到双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线的距离为( )

- A.  $\frac{9}{5}$                       B.  $\frac{8}{5}$                       C.  $\frac{6}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先确定渐近线方程，然后利用点到直线距离公式求得点到一条渐近线的距离即可.

【详解】由题意可知，双曲线的渐近线方程为： $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$ ，即 $3x \pm 4y = 0$ ，

结合对称性，不妨考虑点(3,0)到直线 $3x + 4y = 0$ 的距离： $d = \frac{9+0}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5}$ .

故选：A.

6.

青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 $L$ 和小数记录表的数据 $V$ 的满足 $L = 5 + \lg V$ . 已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9，则其视力的小数记录法的数据为( ) ( $\sqrt[10]{10} \approx 1.259$ )

- A. 1.5                      B. 1.2                      C. 0.8                      D. 0.6

【答案】C

【解析】

【分析】根据 $L, V$ 关系，当 $L = 4.9$ 时，求出 $\lg V$ ，再用指数表示 $V$ ，即可求解.

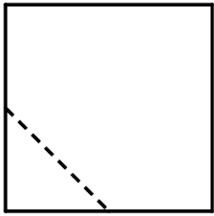
【详解】由 $L = 5 + \lg V$ ，当 $L = 4.9$ 时， $\lg V = -0.1$ ，

则 $V = 10^{-0.1} = 10^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.8$ .

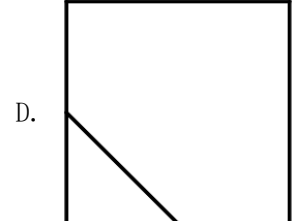
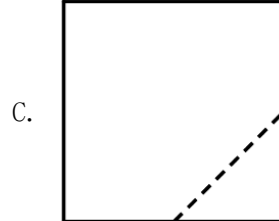
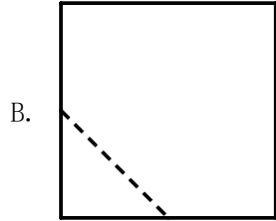
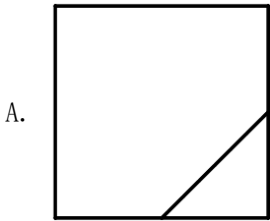
故选：C.

7.

在一个正方体中，过顶点 $A$ 的三条棱的中点分别为 $E, F, G$ . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是( )



正视图

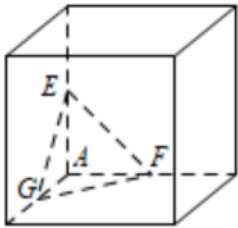


【答案】D

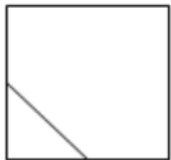
【解析】

【分析】根据题意及题目所给的正视图还原出几何体的直观图，结合直观图进行判断.

【详解】由题意及正视图可得几何体的直观图，如图所示，



所以其侧视图为



故选：D

8. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $B = 120^\circ$ ， $AC = \sqrt{19}$ ， $AB = 2$ ，则  $BC = ( )$

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{5}$

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】利用余弦定理得到关于  $BC$  长度的方程，解方程即可求得边长.

【详解】设  $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ ，

结合余弦定理： $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  可得： $19 = a^2 + 4 - 2 \times a \times \cos 120^\circ$ ，

即： $a^2 + 2a - 15 = 0$ ，解得： $a = 3$  ( $a = -5$  舍去)，

故  $BC = 3$ 。

故选：D。

**【点睛】** 利用余弦定理及其推论解三角形的类型：

(1) 已知三角形的三条边求三个角；

(2) 已知三角形的两边及其夹角求第三边及两角；

(3) 已知三角形的两边与其中一边的对角，解三角形。

9. 记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_2 = 4$ ， $S_4 = 6$ ，则  $S_6 =$  ( )

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

**【答案】** A

**【解析】**

**【分析】** 根据题目条件可得  $S_2$ ， $S_4 - S_2$ ， $S_6 - S_4$  成等比数列，从而求出  $S_6 - S_4 = 1$ ，进一步求出答案.

**【详解】**  $\because S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，

$\therefore S_2$ ， $S_4 - S_2$ ， $S_6 - S_4$  成等比数列

$\therefore S_2 = 4$ ， $S_4 - S_2 = 6 - 4 = 2$

$\therefore S_6 - S_4 = 1$ ，

$\therefore S_6 = 1 + S_4 = 1 + 6 = 7$ 。

故选：A。

10. 将3个1和2个0随机排成一行，则2个0不相邻的概率为 ( )

A. 0.3

B. 0.5

C. 0.6

D. 0.8

**【答案】** C

**【解析】**

**【分析】** 利用古典概型的概率公式可求概率.

**【详解】** 解：将3个1和2个0随机排成一行，可以是：

00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100，

共10种排法，

其中2个0不相邻的排列方法为:

01011,01101,01110,10101,10110,11010,

共6种方法,

故2个0不相邻的概率为 $\frac{6}{10}=0.6$ ,

故选: C.

11. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 则 $\tan \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{15}}{15}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由二倍角公式可得 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$ , 再结合已知可求得 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , 利用同角三角函数的基本关系即可求解.

【详解】 $\because \tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha},$$

$$\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos \alpha \neq 0, \therefore \frac{2\sin \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{1}{2 - \sin \alpha}, \text{ 解得 } \sin \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

故选: A.

【点睛】关键点睛: 本题考查三角函数的化简问题, 解题的关键是利用二倍角公式化简求出 $\sin \alpha$ .

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$ . 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ , 则 $f\left(\frac{5}{3}\right) =$  ( )

- A.  $-\frac{5}{3}$                       B.  $-\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{5}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意利用函数的奇偶性和函数的递推关系即可求得 $f\left(\frac{5}{3}\right)$ 的值.

【详解】由题意可得： $f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right)$ ,

而  $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ ,

故  $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$ .

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题主要考查了函数的奇偶性和函数的递推关系式，灵活利用所给的条件进行转化是解决本题的关键.

## 二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ , 则  $|\vec{b}| =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据题目条件，利用  $\vec{a} - \vec{b}$  模的平方可以得出答案

【详解】 $\because |\vec{a} - \vec{b}| = 5$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + |\vec{b}|^2 - 2 = 25$$

$$\therefore |\vec{b}| = 3\sqrt{2}.$$

故答案为： $3\sqrt{2}$ .

14. 已知一个圆锥的底面半径为6，其体积为  $30\pi$  则该圆锥的侧面积为\_\_\_\_\_.

【答案】  $39\pi$

【解析】

【分析】利用体积公式求出圆锥的高，进一步求出母线长，最终利用侧面积公式求出答案.

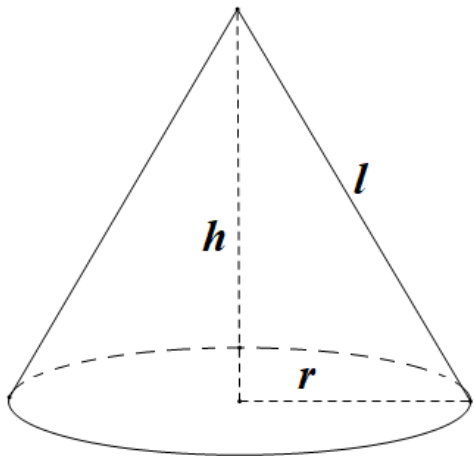
$$\text{【详解】} \because V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 30\pi$$

$$\therefore h = \frac{5}{2}$$

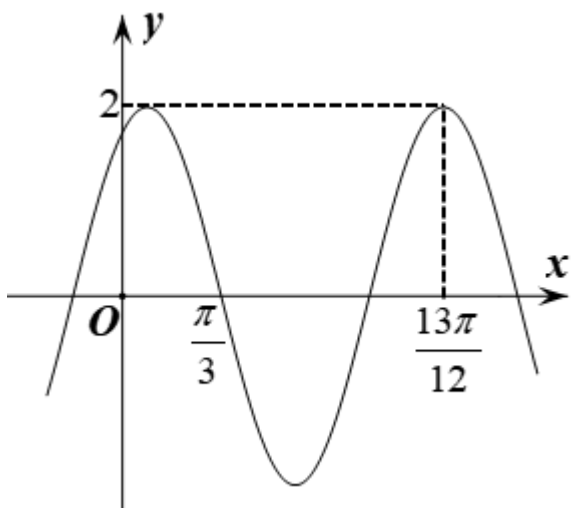
$$\therefore l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore S_{\text{侧}} = \pi r l = \pi \times 6 \times \frac{13}{2} = 39\pi.$$

故答案为： $39\pi$ 。



15. 已知函数  $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$  的部分图像如图所示，则  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_.



【答案】  $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 首先确定函数的解析式，然后求解  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  的值即可。

【详解】 由题意可得：  $\frac{3}{4}T = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$ ， $\therefore T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

当  $x = \frac{13\pi}{12}$  时，  $\omega x + \varphi = 2 \times \frac{13\pi}{12} + \varphi = 2k\pi, \therefore \varphi = 2k\pi - \frac{13}{6}\pi (k \in Z)$ ，

令  $k = 1$  可得：  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，

据此有：  $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ 。

故答案为:  $-\sqrt{3}$ .

**【点睛】** 已知  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的部分图象求其解析式时,  $A$  比较容易看图得出, 困难的是求待定系数  $\omega$  和  $\varphi$ , 常用如下两种方法:

(1) 由  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  即可求出  $\omega$ ; 确定  $\varphi$  时, 若能求出离原点最近的右侧图象上升(或下降)的“零点”横坐标  $x_0$ , 则令

$\omega x_0 + \varphi = 0$  (或  $\omega x_0 + \varphi = \pi$ ), 即可求出  $\varphi$ .

(2) 代入点的坐标, 利用一些已知点(最高点、最低点或“零点”)坐标代入解析式, 再结合图形解出  $\omega$  和  $\varphi$ , 若对  $A, \omega$  的符号或对  $\varphi$  的范围有要求, 则可用诱导公式变换使其符合要求.

16. 已知  $F_1, F_2$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  的两个焦点,  $P, Q$  为  $C$  上关于坐标原点对称的两点, 且

$|PQ| = |F_1F_2|$ , 则四边形  $PF_1QF_2$  的面积为\_\_\_\_\_.

**【答案】** 8

**【解析】**

**【分析】** 根据已知可得  $PF_1 \perp PF_2$ , 设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ , 利用勾股定理结合  $m + n = 8$ , 求出  $mn$ , 四边形  $PF_1QF_2$  面积等于  $mn$ , 即可求解.

**【详解】** 因为  $P, Q$  为  $C$  上关于坐标原点对称的两点,

且  $|PQ| = |F_1F_2|$ , 所以四边形  $PF_1QF_2$  为矩形,

设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ , 则  $m + n = 8, m^2 + n^2 = 48$ ,

所以  $64 = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 = 48 + 2mn$ ,

$mn = 8$ , 即四边形  $PF_1QF_2$  面积等于 8.

故答案为: 8.

**三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.**

**(一)必考题: 共60分.**

17.

甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了200件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2) 能否有99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附: 
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

**【答案】** (1) 75%; 60%;

(2) 能.

**【解析】**

**【分析】** 根据给出公式计算即可

**【详解】** (1) 甲机床生产的产品中的一级品的频率为  $\frac{150}{200} = 75\%$ ,

乙机床生产的产品中的一级品的频率为  $\frac{120}{200} = 60\%$ .

(2) 
$$K^2 = \frac{400(150 \times 80 - 120 \times 50)^2}{270 \times 130 \times 200 \times 200} = \frac{400}{39} > 10 > 6.635,$$

故能有99%的把握认为甲机床的产品与乙机床的产品质量有差异.

18.

记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_n > 0, a_2 = 3a_1$ , 且数列  $\{\sqrt{S_n}\}$  是等差数列, 证明:  $\{a_n\}$  是等差数列.

**【答案】** 证明见解析.

**【解析】**

【分析】先根据  $\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}$  求出数列  $\{\sqrt{S_n}\}$  的公差  $d$ ，进一步写出  $\{\sqrt{S_n}\}$  的通项，从而求出  $\{a_n\}$  的通项公式，最终得证.

【详解】 $\because$  数列  $\{\sqrt{S_n}\}$  是等差数列，设公差为  $d = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_2 + a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$

$$\therefore \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1}, \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore S_n = a_1 n^2, \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = a_1 n^2 - a_1 (n-1)^2 = 2a_1 n - a_1$$

当  $n=1$  时,  $2a_1 \times 1 - a_1 = a_1$ , 满足  $a_n = 2a_1 n - a_1$ ,

$\therefore \{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2a_1 n - a_1, \quad (n \in \mathbf{N}^*)$

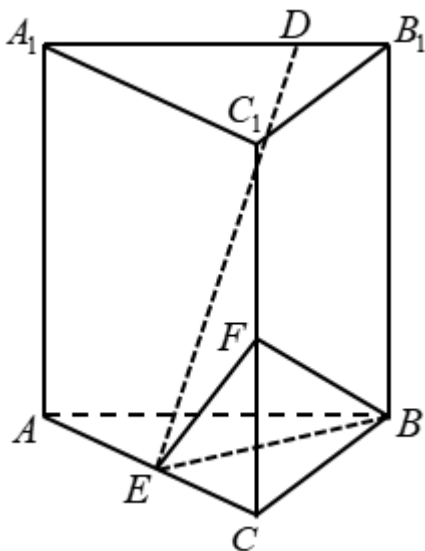
$$\therefore a_n - a_{n-1} = (2a_1 n - a_1) - [2a_1(n-1) - a_1] = 2a_1$$

$\therefore \{a_n\}$  是等差数列.

【点睛】在利用  $a_n = S_n - S_{n-1}$  求通项公式时一定要讨论  $n=1$  的特殊情况.

19.

已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中，侧面  $AA_1B_1B$  为正方形， $AB = BC = 2$ ， $E, F$  分别为  $AC$  和  $CC_1$  的中点， $BF \perp A_1B_1$ .



(1) 求三棱锥  $F - EBC$  的体积;

(2) 已知  $D$  为棱  $A_1B_1$  上的点，证明： $BF \perp DE$ .

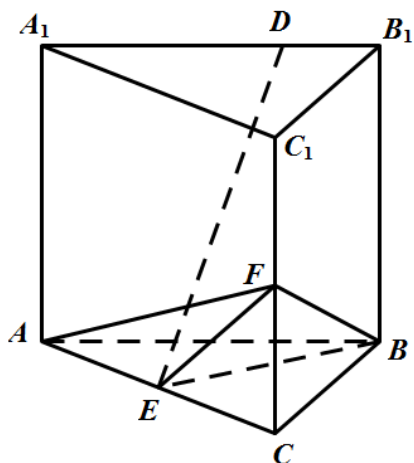
【答案】(1)  $\frac{1}{3}$ ; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 首先求得  $AC$  的长度, 然后利用体积公式可得三棱锥的体积;

(2) 将所给的几何体进行补形, 从而把线线垂直的问题转化为证明线面垂直, 然后再由线面垂直可得题中的结论.

【详解】(1) 如图所示, 连结  $AF$ ,



由题意可得:  $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ ,

由于  $AB \perp BB_1$ ,  $BC \perp AB$ ,  $BB_1 \cap BC = B$ , 故  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ,

而  $BF \subset$  平面  $BCC_1B_1$ , 故  $AB \perp BF$ ,

从而有  $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{4+5} = 3$ ,

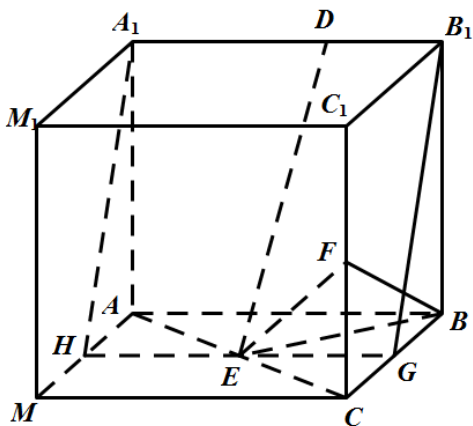
从而  $AC = \sqrt{AF^2 - CF^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ ,

则  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ,  $\therefore AB \perp BC$ ,  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形,

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 1, \quad V_{F-EBC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCE} \times CF = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

(2) 由(1)的结论可将几何体补形为一个棱长为2的正方体  $ABCM - A_1B_1C_1M_1$ , 如图所示, 取棱  $AM, BC$  的

中点  $H, G$ , 连结  $A_1H, HG, GB_1$ ,



正方形  $BCC_1B_1$  中,  $G, F$  为 midpoint, 则  $BF \perp B_1G$ ,

又  $BF \perp A_1B_1, A_1B_1 \cap B_1G = B_1$ ,

故  $BF \perp$  平面  $A_1B_1GH$ , 而  $DE \subset$  平面  $A_1B_1GH$ ,

从而  $BF \perp DE$ .

**【点睛】** 求三棱锥的体积时要注意三棱锥的每个面都可以作为底面, 例如三棱锥的三条侧棱两两垂直, 我们就选择其中的一个侧面作为底面, 另一条侧棱作为高来求体积. 对于空间中垂直关系 (线线、线面、面面) 的证明经常进行等价转化.

20. 设函数  $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $y = f(x)$  的图象与  $x$  轴没有公共点, 求  $a$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $f(x)$  的减区间为  $(0, \frac{1}{a})$ , 增区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ; (2)  $a > \frac{1}{e}$ .

**【解析】**

**【分析】** (1) 求出函数的导数, 讨论其符号后可得函数的单调性.

(2) 根据  $f(1) > 0$  及 (1) 的单调性可得  $f(x)_{\min} > 0$ , 从而可求  $a$  的取值范围.

**【详解】** (1) 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$\text{又 } f'(x) = \frac{(2ax+3)(ax-1)}{x},$$

因为  $a > 0, x > 0$ , 故  $2ax+3 > 0$ ,

当  $0 < x < \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$ ;

所以  $f(x)$  的减区间为  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ , 增区间为  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ .

(2) 因为  $f(1) = a^2 + a + 1 > 0$  且  $y = f(x)$  的图与  $x$  轴没有公共点,

所以  $y = f(x)$  的图象在  $x$  轴的上方,

由 (1) 中函数的单调性可得  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = 3 - 3\ln\frac{1}{a} = 3 + 3\ln a$ ,

故  $3 + 3\ln a > 0$  即  $a > \frac{1}{e}$ .

**【点睛】** 方法点睛: 不等式的恒成立问题, 往往可转化为函数的最值的符号来讨论, 也可以参变分离后转化不含参数的函数的最值问题, 转化中注意等价转化.

21. 抛物线  $C$  的顶点为坐标原点  $O$ . 焦点在  $x$  轴上, 直线  $l: x = 1$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 且  $OP \perp OQ$ . 已知点  $M(2, 0)$ , 且  $\odot M$  与  $l$  相切.

(1) 求  $C, \odot M$  的方程;

(2) 设  $A_1, A_2, A_3$  是  $C$  上的三个点, 直线  $A_1A_2, A_1A_3$  均与  $\odot M$  相切. 判断直线  $A_2A_3$  与  $\odot M$  的位置关系, 并说明理由.

**【答案】** (1) 抛物线  $C: y^2 = x$ ,  $\odot M$  方程为  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ; (2) 相切, 理由见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据已知抛物线与  $x = 1$  相交, 可得出抛物线开口向右, 设出标准方程, 再利用对称性设出  $P, Q$  坐标, 由  $OP \perp OQ$ , 即可求出  $p$ ; 由圆  $M$  与直线  $x = 1$  相切, 求出半径, 即可得出结论;

(2) 先考虑  $A_1A_2$  斜率不存在, 根据对称性, 即可得出结论; 若  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  斜率存在, 由  $A_1, A_2, A_3$  三点在抛物线上, 将直线  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  斜率分别用纵坐标表示, 再由  $A_1A_2, A_1A_3$  与圆  $M$  相切, 得出  $y_2 + y_3, y_2 \cdot y_3$  与  $y_1$  的关系, 最后求出  $M$  点到直线  $A_2A_3$  的距离, 即可得出结论.

**【详解】** (1) 依题意设抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0), P(1, y_0), Q(1, -y_0)$ ,

$\because OP \perp OQ, \therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 1 - y_0^2 = 1 - 2p = 0, \therefore 2p = 1$ ,

所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = x$ ,

$M(0,2), \odot M$  与  $x=1$  相切, 所以半径为1,

所以  $\odot M$  的方程为  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ;

(2) 设  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

若  $A_1A_2$  斜率不存在, 则  $A_1A_2$  方程为  $x=1$  或  $x=3$ ,

若  $A_1A_2$  方程为  $x=1$ , 根据对称性不妨设  $A_1(1,1)$ ,

则过  $A_1$  与圆  $M$  相切的另一条直线方程为  $y=1$ ,

此时该直线与抛物线只有一个交点, 即不存在  $A_3$ , 不合题意;

若  $A_1A_2$  方程为  $x=3$ , 根据对称性不妨设  $A_1(3, \sqrt{3}), A_2(3, -\sqrt{3})$ ,

则过  $A_1$  与圆  $M$  相切的直线  $A_1A_3$  为  $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$ ,

又  $k_{A_1A_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{1}{y_1 + y_3} = \frac{1}{\sqrt{3} + y_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y_3 = 0$ ,

$x_3 = 0, A_3(0,0)$ , 此时直线  $A_1A_3, A_2A_3$  关于  $x$  轴对称,

所以直线  $A_2A_3$  与圆  $M$  相切;

若直线  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  斜率均存在,

则  $k_{A_1A_2} = \frac{1}{y_1 + y_2}, k_{A_1A_3} = \frac{1}{y_1 + y_3}, k_{A_2A_3} = \frac{1}{y_2 + y_3}$ ,

所以直线  $A_1A_2$  方程为  $y - y_1 = \frac{1}{y_1 + y_2}(x - x_1)$ ,

整理得  $x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$ ,

同理直线  $A_1A_3$  的方程为  $x - (y_1 + y_3)y + y_1y_3 = 0$ ,

直线  $A_2A_3$  的方程为  $x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0$ ,

$\therefore A_1A_2$  与圆  $M$  相切,  $\therefore \frac{|2 + y_1y_2|}{\sqrt{1 + (y_1 + y_2)^2}} = 1$

整理得  $(y_1^2 - 1)y_2^2 + 2y_1y_2 + 3 - y_1^2 = 0$ ,

$A_1A_3$ 与圆  $M$  相切, 同理  $(y_1^2 - 1)y_3^2 + 2y_1y_3 + 3 - y_1^2 = 0$

所以  $y_2, y_3$  为方程  $(y_1^2 - 1)y^2 + 2y_1y + 3 - y_1^2 = 0$  的两根,

$$y_2 + y_3 = -\frac{2y_1}{y_1^2 - 1}, y_2 \cdot y_3 = \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1},$$

$M$  到直线  $A_2A_3$  的距离为:

$$\begin{aligned} \frac{|2 + y_2y_3|}{\sqrt{1 + (y_2 + y_3)^2}} &= \frac{|2 + \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1}|}{\sqrt{1 + (-\frac{2y_1}{y_1^2 - 1})^2}} \\ &= \frac{|y_1^2 + 1|}{\sqrt{(y_1^2 - 1)^2 + 4y_1^2}} = \frac{y_1^2 + 1}{y_1^2 + 1} = 1, \end{aligned}$$

所以直线  $A_2A_3$  与圆  $M$  相切;

综上若直线  $A_1A_2, A_1A_3$  与圆  $M$  相切, 则直线  $A_2A_3$  与圆  $M$  相切.

**【点睛】** 关键点点睛: (1) 过抛物线上的两点直线斜率只需用其纵坐标 (或横坐标) 表示, 将问题转化为只与纵坐标 (或横坐标) 有关; (2) 要充分利用  $A_1A_2, A_1A_3$  的对称性, 抽象出  $y_2 + y_3, y_2 \cdot y_3$  与  $y_1$  关系, 把  $y_2, y_3$  的关系转化为用  $y_1$  表示.

**(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.**

#### [选修4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为

$$\rho = 2\sqrt{2} \cos \theta.$$

(1) 将  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点  $A$  的直角坐标为  $(1, 0)$ ,  $M$  为  $C$  上的动点, 点  $P$  满足  $\overline{AP} = \sqrt{2} \overline{AM}$ , 写出  $P$  的轨迹  $C_1$  的参数方程,

并判断  $C$  与  $C_1$  是否有公共点.

**【答案】** (1)  $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ ; (2)  $P$  的轨迹  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数),

$C$  与  $C_1$  没有公共点.

**【解析】**

【分析】(1) 将曲线C的极坐标方程化为  $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho \cos \theta$ ，将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  代入可得：

(2) 设  $P(x, y)$ ，设  $M(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$ ，根据向量关系即可求得P的轨迹  $C_1$  的参数方程，求出两圆圆心距，和半径之差比较可得.

【详解】(1) 由曲线C的极坐标方程  $\rho = 2\sqrt{2} \cos \theta$  可得  $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho \cos \theta$ ，

将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  代入可得  $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x$ ，即  $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ ，

即曲线C的直角坐标方程为  $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ ；

(2) 设  $P(x, y)$ ，设  $M(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$

$$\because \overrightarrow{AP} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM},$$

$$\therefore (x-1, y) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \theta - 1, \sqrt{2} \sin \theta) = (2 + 2 \cos \theta - \sqrt{2}, 2 \sin \theta),$$

$$\text{则} \begin{cases} x-1 = 2 + 2 \cos \theta - \sqrt{2} \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases},$$

故P的轨迹  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数)

$\because$  曲线C的圆心为  $(\sqrt{2}, 0)$ ，半径为  $\sqrt{2}$ ，曲线  $C_1$  的圆心为  $(3 - \sqrt{2}, 0)$ ，半径为2，

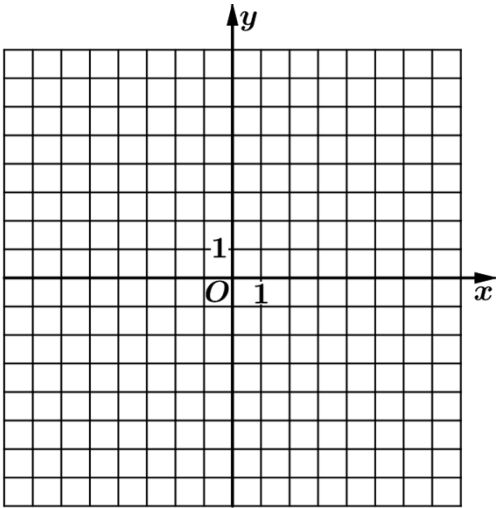
则圆心距为  $3 - 2\sqrt{2}$ ， $\because 3 - 2\sqrt{2} < 2 - \sqrt{2}$ ， $\therefore$  两圆内含，

故曲线C与  $C_1$  没有公共点.

【点睛】关键点睛：本题考查参数方程的求解，解题的关键是设出  $M$  的参数坐标，利用向量关系求解.

#### [选修4-5：不等式选讲]

23. 已知函数  $f(x) = |x - 2|, g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$ .



(1) 画出  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图像;

(2) 若  $f(x+a) \geq g(x)$ , 求  $a$  的取值范围.

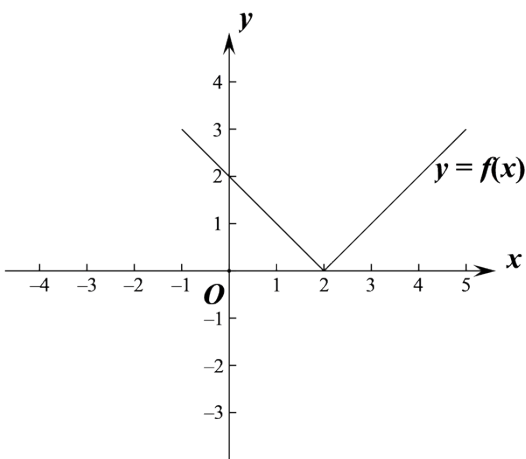
**【答案】** (1) 图像见解析; (2)  $a \geq \frac{11}{2}$

**【解析】**

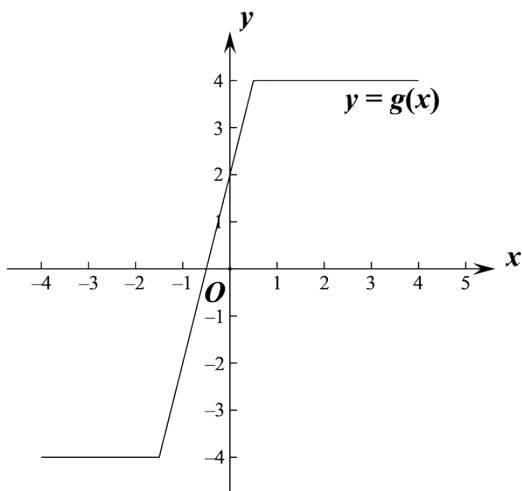
**【分析】** (1) 分段去绝对值即可画出图像;

(2) 根据函数图像数形结合可得需将  $y = f(x)$  向左平移可满足同角, 求得  $y = f(x+a)$  过  $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$  时  $a$  的值可求.

**【详解】** (1) 可得  $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$ , 画出图像如下:



$$g(x) = |2x+3| - |2x-1| = \begin{cases} -4, & x < -\frac{3}{2} \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 画出函数图像如下:}$$



(2)  $f(x+a) = |x+a-2|$ ,

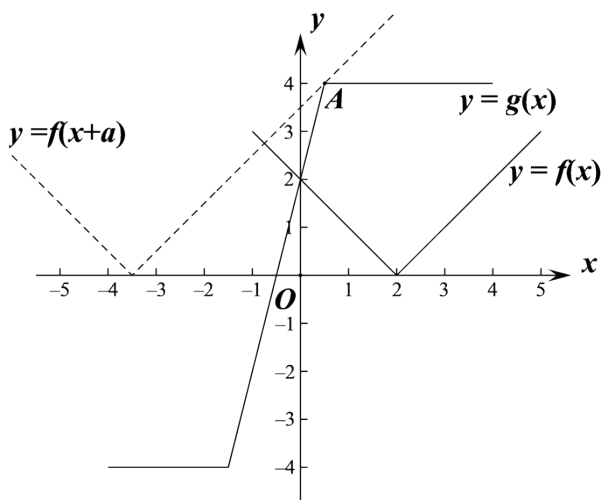
如图，在同一个坐标系里画出  $f(x), g(x)$  图像，

$y = f(x+a)$  是  $y = f(x)$  平移了  $|a|$  个单位得到，

则要使  $f(x+a) \geq g(x)$ ，需将  $y = f(x)$  向左平移，即  $a > 0$ ，

当  $y = f(x+a)$  过  $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$  时， $|\frac{1}{2} + a - 2| = 4$ ，解得  $a = \frac{11}{2}$  或  $-\frac{5}{2}$ （舍去），

则数形结合可得需至少将  $y = f(x)$  向左平移  $\frac{11}{2}$  个单位， $\therefore a \geq \frac{11}{2}$ 。



**【点睛】** 关键点睛： 本题考查绝对值不等式的恒成立问题， 解题的关键是根据函数图像数形结合求解.