

# 2007 年云南高考理科数学真题及答案

## 注意事项:

1. 本试题卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 4 页, 总分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上.
3. 选择题的每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试题卷上.
4. 非选择题必须使用 0.5 毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写, 字体工整, 笔迹清楚.
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答. 超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效; 在草稿纸、本试题卷上答题无效.
6. 考试结束, 将本试题卷和答题卡一并交回.

## 第 I 卷 (选择题)

本卷共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

### 参考公式:

如果事件  $A, B$  互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件  $A, B$  相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ , 那么

$n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中  $R$  表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

## 一、选择题

1.  $\sin 210^\circ = ( \quad )$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

2. 函数  $y = |\sin x|$  的一个单调增区间是 ( )

- A.  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$     B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$     C.  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$     D.  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

3. 设复数  $z$  满足  $\frac{1+2i}{z} = i$ , 则  $z = ( \quad )$

- A.  $-2+i$       B.  $-2-i$       C.  $2-i$       D.  $2+i$

4. 下列四个数中最大的是 ( )
- A.  $(\ln 2)^2$       B.  $\ln(\ln 2)$       C.  $\ln \sqrt{2}$       D.  $\ln 2$
5. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $D$  是  $AB$  边上一点, 若  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$ , 则  $\lambda =$  ( )
- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$
6. 不等式  $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$  的解集是 ( )
- A.  $(-2, 1)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$       D.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
7. 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱长与底面边长相等, 则  $AB_1$  与侧面  $ACC_1A_1$  所成角的正弦值等于 ( )
- A.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知曲线  $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x$  的一条切线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 则切点的横坐标为 ( )
- A. 3      B. 2      C. 1      D.  $\frac{1}{2}$
9. 把函数  $y = e^x$  的图像按向量  $\mathbf{a} = (2, 3)$  平移, 得到  $y = f(x)$  的图像, 则  $f(x) =$  ( )
- A.  $e^{x-3} + 2$       B.  $e^{x+3} - 2$       C.  $e^{x-2} + 3$       D.  $e^{x+2} - 3$
10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ( )
- A. 40 种      B. 60 种      C. 100 种      D. 120 种
11. 设  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  的左、右焦点, 若双曲线上存在点  $A$ , 使  $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$  且  $|AF_1| = 3|AF_2|$ , 则双曲线的离心率为 ( )
- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$       D.  $\sqrt{5}$
12. 设  $F$  为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点,  $A, B, C$  为该抛物线上三点, 若  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$ , 则  $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$  ( )
- A. 9      B. 6      C. 4      D. 3

第 II 卷 (非选择题)  
本卷共 10 题, 共 90 分

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.  $(1+2x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_。(用数字作答)

14. 在某项测量中，测量结果  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)(\sigma > 0)$ . 若  $\xi$  在  $(0,1)$  内取值的概率为 0.4，则  $\xi$  在  $(0,2)$  内取值的概率为\_\_\_\_\_.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

16. 已知数列的通项  $a_n = -5n + 2$ ，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中，已知内角  $A = \frac{\pi}{3}$ ，边  $BC = 2\sqrt{3}$ . 设内角  $B = x$ ，周长为  $y$ .

(1) 求函数  $y = f(x)$  的解析式和定义域；

(2) 求  $y$  的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件  $A$ ：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率  $P(A) = 0.96$ .

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率  $p$ ；

(2) 若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件， $\xi$  表示取出的 2 件产品中二等品的件数，

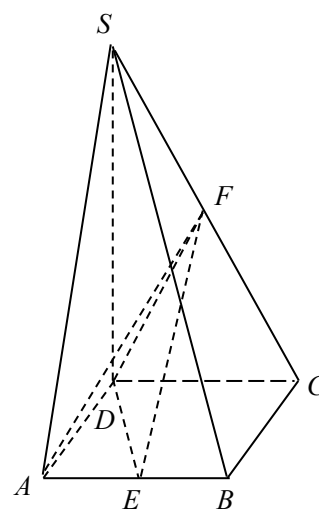
求  $\xi$  的分布列.

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥  $S-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形，侧棱  $SD \perp$  底面  $ABCD$ ， $E, F$  分别为  $AB, SC$  的中点.

(1) 证明  $EF \parallel$  平面  $SAD$ ；

(2) 设  $SD = 2DC$ ，求二面角  $A-EF-D$  的大小.



20. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，以  $O$  为圆心的圆与直线  $x - \sqrt{3}y = 4$  相切.

- (1) 求圆  $O$  的方程;
- (2) 圆  $O$  与  $x$  轴相交于  $A, B$  两点, 圆内的动点  $P$  使  $|PA|, |PO|, |PB|$  成等比数列, 求  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_n = \frac{3 - a_{n-1}}{2}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = a_n \sqrt{3 - 2a_n}$ , 证明  $b_n < b_{n+1}$ , 其中  $n$  为正整数.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - x$ .

- (1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $M(t, f(t))$  处的切线方程;
- (2) 设  $a > 0$ , 如果过点  $(a, b)$  可作曲线  $y = f(x)$  的三条切线, 证明:  $-a < b < f(a)$ .

### 参考答案

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右侧所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

#### 一、选择题

1. D    2. C    3. C    4. D    5. A    6. C  
7. A    8. A    9. C    10. B    11. B    12. B

#### 二、填空题

13. -42    14. 0.8    15.  $2 + 4\sqrt{2}$     16.  $-\frac{5}{2}$

#### 三、解答题

17. 解: (1)  $\triangle ABC$  的内角和  $A + B + C = \pi$ , 由  $A = \frac{\pi}{3}$ ,  $B > 0$ ,  $C > 0$  得

$$0 < B < \frac{2\pi}{3}.$$

应用正弦定理, 知

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 4 \sin x,$$

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4 \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right).$$

因为  $y = AB + BC + AC$ ,

$$\text{所以 } y = 4 \sin x + 4 \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) + 2\sqrt{3} \left( 0 < x < \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } y &= 4 \left( \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) + 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3} \left( \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

所以, 当  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{3}$  时,  $y$  取得最大值  $6\sqrt{3}$ .

18. 解: (1) 记  $A_0$  表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”,

$A_1$  表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”.

则  $A_0, A_1$  互斥, 且  $A = A_0 + A_1$ , 故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 + A_1) \\ &= P(A_0) + P(A_1) \\ &= (1-p)^2 + C_2^1 p(1-p) \\ &= 1-p^2 \end{aligned}$$

于是  $0.96 = 1 - p^2$ .

解得  $p_1 = 0.2, p_2 = -0.2$  (舍去).

(2)  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2.

若该批产品共 100 件, 由 (1) 知其二等品有  $100 \times 0.2 = 20$  件, 故

$$P(\xi = 0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495}.$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_{80}^1 C_{20}^1}{C_{100}^2} = \frac{160}{495}.$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_{20}^2}{C_{100}^2} = \frac{19}{495}.$$

所以  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

19. 解法一:

(1) 作  $FG \parallel DC$  交  $SD$  于点  $G$ , 则  $G$  为  $SD$  的中点.

连结  $AG$ ,  $FG \parallel \frac{1}{2}CD$ , 又  $CD \parallel AB$ ,

故  $FG \parallel AE$ ,  $AEFG$  为平行四边形.

$EF \parallel AG$ , 又  $AG \subset$  平面  $SAD$ ,  $EF \not\subset$  平面  $SAD$ .

所以  $EF \parallel$  平面  $SAD$ .

(2) 不妨设  $DC = 2$ , 则  $SD = 4$ ,  $DG = 2$ ,  $\triangle ADG$  为等腰直角三角形.

取  $AG$  中点  $H$ , 连结  $DH$ , 则  $DH \perp AG$ .

又  $AB \perp$  平面  $SAD$ , 所以  $AB \perp DH$ , 而  $AB \cap AG = A$ , 所以  $DH \perp$  面  $AEF$ .

取  $EF$  中点  $M$ , 连结  $MH$ , 则  $HM \perp EF$ .

连结  $DM$ , 则  $DM \perp EF$ .

故  $\angle DMH$  为二面角  $A-EF-D$  的平面角

$$\tan \angle DMH = \frac{DH}{HM} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

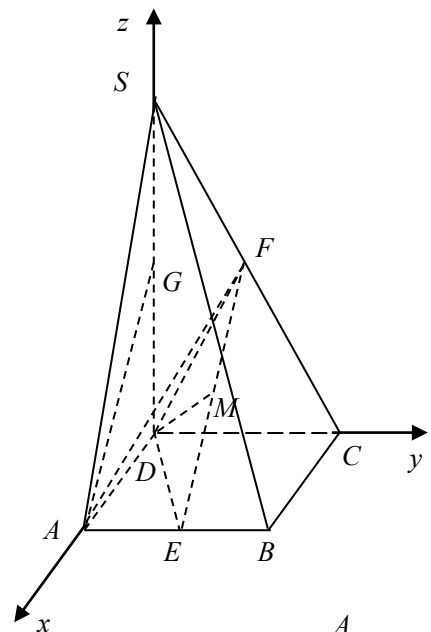
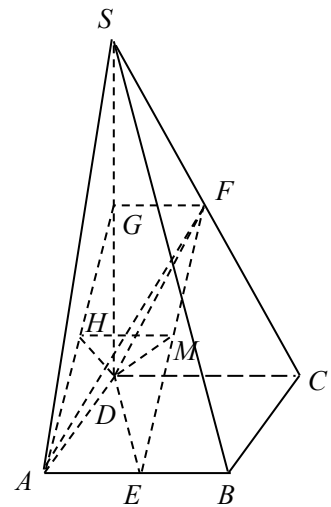
所以二面角  $A-EF-D$  的大小为  $\arctan \sqrt{2}$ .

解法二: (1) 如图, 建立空间直角坐标系  $D-xyz$ .

设  $A(a, 0, 0)$ ,  $S(0, 0, b)$ , 则  $B(a, a, 0)$ ,  $C(0, a, 0)$ ,

$$E\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-a, 0, \frac{b}{2}\right).$$



取  $SD$  的中点  $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$ , 则  $\overrightarrow{AG} = \left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$ .

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$ ,  $EF \parallel AG$ ,  $AG \subset$  平面  $SAD$ ,  $EF \not\subset$  平面  $SAD$ ,  
所以  $EF \parallel$  平面  $SAD$ .

(2) 不妨设  $A(1,0,0)$ , 则  $B(1,1,0)$ ,  $C(0,1,0)$ ,  $S(0,0,2)$ ,  $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ ,  $F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ .

$EF$  中点  $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{EF} = (-1,0,1)$ ,  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ,  $MD \perp EF$

又  $\overrightarrow{EA} = \left(0,-\frac{1}{2},0\right)$ ,  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ ,  $EA \perp EF$ ,

所以向量  $\overrightarrow{MD}$  和  $\overrightarrow{EA}$  的夹角等于二面角  $A-EF-D$  的平面角.

$$\cos \langle \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{EA} \rangle = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{EA}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角  $A-EF-D$  的大小为  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

20. 解: (1) 依题设, 圆  $O$  的半径  $r$  等于原点  $O$  到直线  $x - \sqrt{3}y = 4$  的距离,

$$\text{即 } r = \frac{4}{\sqrt{1+3}} = 2.$$

得圆  $O$  的方程为  $x^2 + y^2 = 4$ .

(2) 不妨设  $A(x_1,0)$ ,  $B(x_2,0)$ ,  $x_1 < x_2$ . 由  $x^2 = 4$  即得

$$A(-2,0), B(2,0).$$

设  $P(x, y)$ , 由  $|PA|, |PO|, |PB|$  成等比数列, 得

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

$$\text{即 } x^2 - y^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (-2-x, -y) \cdot (2-x, -y) \\ &= x^2 - 4 + y^2 \\ &= 2(y^2 - 1). \end{aligned}$$

由于点  $P$  在圆  $O$  内, 故  $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

由此得  $y^2 < 1$ .

所以  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围为  $[-2, 0)$ .

21. 解: (1) 由  $a_n = \frac{3-a_{n-1}}{2}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ ,

整理得  $1-a_n = -\frac{1}{2}(1-a_{n-1})$ .

又  $1-a_1 \neq 0$ , 所以  $\{1-a_n\}$  是首项为  $1-a_1$ , 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列, 得

$$a_n = 1 - (1-a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) 方法一:

由 (1) 可知  $0 < a_n < \frac{3}{2}$ , 故  $b_n > 0$ .

那么,  $b_{n+1}^2 - b_n^2$

$$\begin{aligned} &= a_{n+1}^2(3-2a_{n+1}) - a_n^2(3-2a_n) \\ &= \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2 \left(3-2 \times \frac{3-a_n}{2}\right) - a_n^2(3-2a_n) \\ &= \frac{9a_n}{4}(a_n-1)^2. \end{aligned}$$

又由 (1) 知  $a_n > 0$  且  $a_n \neq 1$ , 故  $b_{n+1}^2 - b_n^2 > 0$ ,

因此  $b_n < b_{n+1}$ ,  $n$  为正整数.

方法二:

由 (1) 可知  $0 < a_n < \frac{3}{2}$ ,  $a_n \neq 1$ ,

因为  $a_{n+1} = \frac{3-a_n}{2}$ ,

所以  $b_{n+1} = a_{n+1} \sqrt{3-2a_{n+1}} = \frac{(3-a_n)\sqrt{a_n}}{2}$ .

由  $a_n \neq 1$  可得  $a_n(3-2a_n) < \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^3$ ,

即  $a_n^2(3-2a_n) < \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2 \cdot a_n$

两边开平方得  $a_n \sqrt{3-2a_n} < \frac{3-a_n}{2} \cdot \sqrt{a_n}$ .

即  $b_n < b_{n+1}$ ,  $n$  为正整数.

22. 解: (1) 求函数  $f(x)$  的导数:  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .

曲线  $y = f(x)$  在点  $M(t, f(t))$  处的切线方程为:

$$y - f(t) = f'(t)(x - t),$$

即  $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ .

(2) 如果有一条切线过点  $(a, b)$ , 则存在  $t$ , 使

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3.$$

于是, 若过点  $(a, b)$  可作曲线  $y = f(x)$  的三条切线, 则方程

$$2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$$

有三个相异的实数根.

记  $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ ,

则  $g'(t) = 6t^2 - 6at$

$$= 6t(t - a).$$

当  $t$  变化时,  $g(t)$ ,  $g'(t)$  变化情况如下表:

$t$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, a)$	$a$	$(a, +\infty)$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	极大值 $a+b$	↘	极小值 $b-f(a)$	↗

由  $g(t)$  的单调性, 当极大值  $a+b < 0$  或极小值  $b-f(a) > 0$  时, 方程  $g(t) = 0$  最多有一个实数根;

当  $a+b = 0$  时, 解方程  $g(t) = 0$  得  $t = 0$ ,  $t = \frac{3a}{2}$ , 即方程  $g(t) = 0$  只有两个相异的实数根;

当  $b-f(a) = 0$  时, 解方程  $g(t) = 0$  得  $t = -\frac{a}{2}$ ,  $t = a$ , 即方程  $g(t) = 0$  只有两个相异的实数根.

综上，如果过  $(a, b)$  可作曲线  $y = f(x)$  三条切线，即  $g(t) = 0$  有三个相异的实数根，

$$\text{则} \begin{cases} a + b > 0, \\ b - f(a) < 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \quad -a < b < f(a).$$