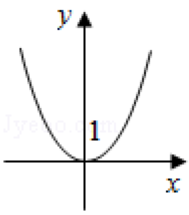
1998年宁夏高考理科数学真题及答案

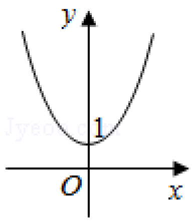
一、选择题（共15小题，每小题4分，满分60分）

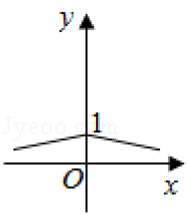
1.（4分）sin330°等于（　　）

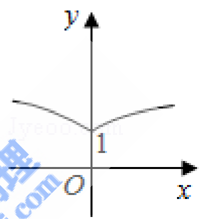
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.（4分）函数 $y=a^{|x|}$（$a>1$）的图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

3.（4分）曲线的极坐标方程ρ＝4cosθ化为直角坐标方程为（　　）

A.（x+2）^{2}+y^2＝4　　B.（x－2）^{2}+y^2＝4

C.（x+4）^{2}+y^2＝16　　D.（x－4）^{2}+y^2＝16

4.（4分）两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是（　　）

A. $A_1A_2+B_1B_2=0$　　B. $A_1A_2-B_1B_2=0$

C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　D. $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

5.（4分）函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（$x\neq0$）的反函数 $f^{-1}(x)$＝（　　）

A. x（$x\neq0$）　　B. $\frac{1}{x}$（$x\neq0$）　　C. $-x$（$x\neq0$）　　D. $-\frac{1}{x}$（$x\neq0$）

6.（4分）若点 P（sinα－cosα，tanα）在第一象限，则在[0，2π）内α的取值范围是（　　）

A. $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$ *　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2})$　　　　D. $(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$

7.（4 分）已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍，那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为（　　）

A．120°　　B．150°　　C．180°　　D．240°

8.（4 分）复数 $-i$ 的一个立方根是 i，它的另外两个立方根是（　　）

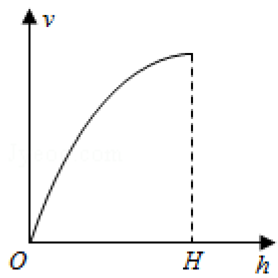
A．$\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$　　C．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

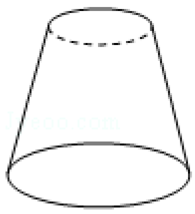
9.（4 分）如果棱台的两底面积分别是 S，S'，中截面的面积是 S_0，那么（　　）

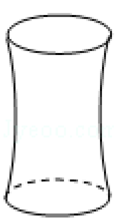
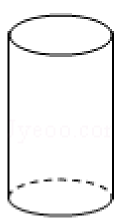
A．$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$　　B．$S_0=\sqrt{S'S}$　　C．$2S_0=S+S'$

D．$S_0^2=2S'S$

10.（4 分）向高为 H 的水瓶中注水，注满为止．如果注水量 V 与水深 h 的函数关系如图，那么水瓶的形状是图中的（　　）



A. 　　B. 

C. 　　D. 

11.（4 分）3 名医生和 6 名护士被分配到 3 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士．不同的分配方法共有（　　）

A．90 种　　B．180 种　　C．270 种　　D．540 种

12．（4 分）椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点为 F_1 和 F_2，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上，那么$|PF_1|$是$|PF_2|$的（　　）

A．7 倍　　B．5 倍　　C．4 倍　　D．3 倍

13．（4 分）球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的$\frac{1}{6}$，经过这 3 个点的小圆的周长为 4π，那么这个球的半径为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

14．（4 分）一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角是（　　）

A．$\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B．$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C．$\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　D．$\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

15．（4 分）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>1$，且前 n 项和 S_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$，那么 a_1 的取值范围是（　　）

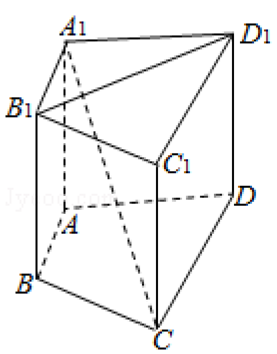
A．（1，+∞）　　B．（1，4）　　C．（1，2）　　D．（1，$\sqrt{2}$）

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

16．（5 分）已知圆 C 过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的一个顶点和一个焦点，且圆心在此双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是________．

17．（5 分）$(x+2)^{10}(x^2-1)$的展开式中 x^{10} 的系数为________（用数字作答）．

18．（5 分）如图，在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，当底面四边形 $ABCD$ 满足条件________时，有 $A_1C\perp B_1D_1$．（注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形．）



19．（5 分）关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$（$x\in R$），有下列命题：

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍；

②$y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

③$y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}，0\right)$ 对称；

④$y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称．

其中正确的命题的序号是_______．（把你认为正确的命题序号都填上）

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

20．（10 分）在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，设 $a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$．求 $\sin B$ 的值．以下公式供解题时参考：

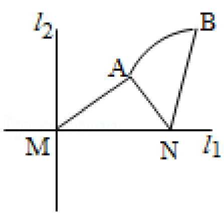
$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$，

$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$，

$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$，

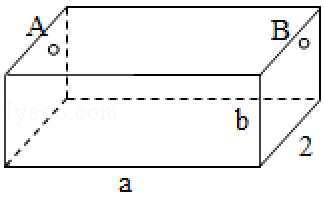
$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$．

21．（12 分）如图，直线 l_1 和 l_2 相交于点 M，$l_1\perp l_2$，点 $N\in l_1$．以 A，B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等．若△AMN 为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且 $|BN|=6$．建立适当的坐标系，求曲线段 C 的方程．



22．（12 分）如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱，

污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出．设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米．已知流出的水中该杂质的质量分数与 a，b 的乘积 ab 成反比．现有制箱材料 60 平方米．问当 a,b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（A、B 孔的面积忽略不计）．

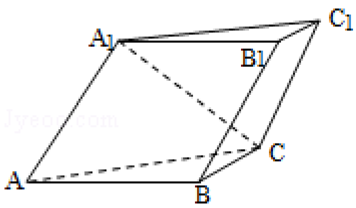


23．（12 分）已知如图，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直，$\angle ABC=90°$，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且 $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$．

（1）求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；

（2）求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；

（3）求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离．



24．（12 分）设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$，将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 t、s 单位长度后得曲线 C_1．

（1）写出曲线 C_1 的方程；

（2）证明曲线 C 与 C_1 关于点 A（$\frac{t}{2}$，$\frac{s}{2}$）对称；

（3）如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点，证明 $s=\frac{t^3}{4}-t$ 且 $t\neq 0$．

25．（12 分）已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$．

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})$（其中 $a>0$，且 $a\neq 1$），记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．试比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论．

1998 年全国统一高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

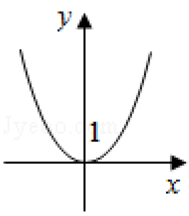
1.（4 分）sin330° 等于（　　）

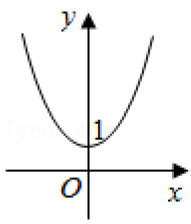
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

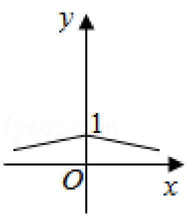
【解答】解：∵ $\sin 330^\circ=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

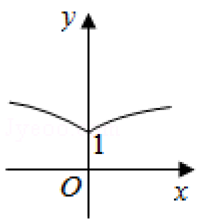
故选：B.

2.（4 分）函数 $y=a^{|x|}$（$a>1$）的图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【解答】解：法一：由题设知 $y=\begin{cases}a^x, & x\geq 0\\ (\frac{1}{a})^x, & x<0\end{cases}$，

又 $a>1$．由指数函数图象易知答案为 B.

法二：因 $y=a^{|x|}$是偶函数，又 $a>1$．

所以 $a^{|x|}\geqslant 1$，排除 AC．当 $x\geqslant 0$，$y=a^x$，由指数函数图象知选 B.

故选：B.

3.（4 分）曲线的极坐标方程 $\rho=4\cos\theta$ 化为直角坐标方程为（　　）

A.（x+2）^{2}+y^2＝4　　B.（x－2）^{2}+y^2＝4

C.（x+4）^{2}+y^2＝16　　D.（x－4）^{2}+y^2＝16

【解答】解：将原极坐标方程 $\rho=4\cos\theta$，化为：

$\rho^2=4\rho\cos\theta$，

化成直角坐标方程为：$x^2+y^2-4x=0$，

即 $y^2+(x-2)^2=4$.

故选：B.

4.（4 分）两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是（　　）

A．$A_1A_2+B_1B_2=0$　　B．$A_1A_2-B_1B_2=0$

C．$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　D．$\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

【解答】解：直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 的方向向量为（$-B_1$，A_1），直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的方向向量为（$-B_2$，A_2），

两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直，就是两条直线的方向向量的数量积为 0，

即：（$-B_1$，A_1）（$-B_2$，A_2）$=0$ 可得 $A_1A_2+B_1B_2=0$

故选：A.

5.（4 分）函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（$x\neq0$）的反函数 $f^{-1}(x)=$（　　）

A．x（$x\neq0$）　　B．$\frac{1}{x}$（$x\neq0$）　　C．$-x$（$x\neq0$）　　D．$-\frac{1}{x}$（$x\neq0$）

【解答】由 $y=\frac{1}{x}$得 $x=\frac{1}{y}$且 $y\neq0$，所以反函数 $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$且 $x\neq0$　故选则 B

6.（4 分）若点 P（$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\tan\alpha$）在第一象限，则在$[0，2\pi)$内 α 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$*　　B．$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

C．$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$　　D．$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4},\pi)$

【解答】解：∵ $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha>0\\ \tan\alpha>0\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5\pi}{4}\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}或\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ⇒

$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

故选：B.

7.（4 分）已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍，那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为（　　）

A．120°　　　　B．150°　　　　C．180°　　　　D．240°

【解答】解：圆锥的全面积是底面积的 3 倍，那么母线和底面半径的比为 2，

设圆锥底面半径为 1，则圆锥母线长为 2，圆锥的侧面展开图扇形的弧长是圆锥底面周长为 2π，

该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角：π，即 180°

故选：C.

8.（4 分）复数 $-i$ 的一个立方根是 i，它的另外两个立方根是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$　　　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$　　　　C．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　　　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

【解答】解：$\because -i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$，其立方根是 $\cos\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}$，$k\in 0$，1，2，

即 i，$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，

故选：D.

9.（4 分）如果棱台的两底面积分别是 S，S'，中截面的面积是 S_0，那么（　　）

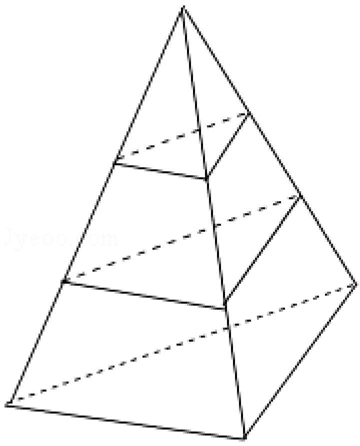
A．$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$　　　　B．$S_0=\sqrt{S'S}$　　　　C．$2S_0=S+S'$　　　　D．$S_0^2=2S'S$

【解答】解：不妨设棱台为三棱台，设棱台的高为 $2r$，上部三棱锥的高为 a，

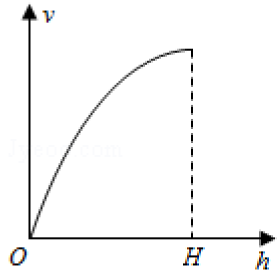
根据相似比的性质可得：$\begin{cases}(\frac{a}{a+2r})^2=\frac{S'}{S}\\(\frac{a}{a+r})^2=\frac{S'}{S_0}\end{cases}$，可得：$\begin{cases}\frac{a+2r}{a}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}}\\\frac{a+r}{a}=\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S'}}\end{cases}$

消去 r，可得 $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$

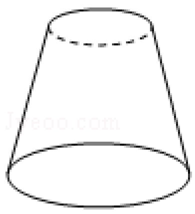
故选：A.

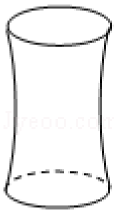


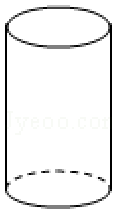
10．（4 分）向高为 H 的水瓶中注水，注满为止．如果注水量 V 与水深 h 的函数关系如图，那么水瓶的形状是图中的（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【解答】解：如果水瓶形状是圆柱，$V=\pi r^2h$，r 不变，V 是 h 的正比例函数，

其图象应该是过原点的直线，与已知图象不符．故 D 错；

由已知函数图可以看出，随着高度 h 的增加 V 也增加，但随 h 变大，

每单位高度的增加，体积 V 的增加量变小，图象上升趋势变缓，

其原因只能是瓶子平行底的截面的半径由底到顶逐渐变小．故 A、C 错．

故选：B．

11．（4 分）3 名医生和 6 名护士被分配到 3 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名

护士．不同的分配方法共有（　　）

A．90 种　　B．180 种　　C．270 种　　D．540 种

【解答】解：三所学校依次选医生、护士，不同的分配方法共有：$C_3^1C_6^2C_2^1C_4^2=540$ 种．

故选：D．

12．（4 分）椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1 和 F_2，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上，那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的（　　）

A．7 倍　　B．5 倍　　C．4 倍　　D．3 倍

【解答】解：由题设知 F_1（﹣3，0），F_2（3，0），

如图，设 P 点的坐标是（x，y），线段 PF_1 的中点坐标为（$\frac{x-3}{2}$，$\frac{y}{2}$）

∵线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上，

∴ $\frac{x-3}{2}=0$

∴$x=3$

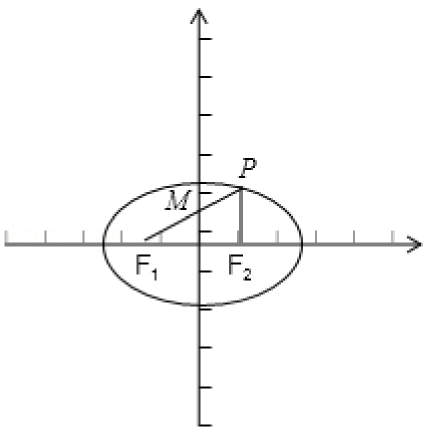
将 P（3，y）代入椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$，得到 $y^2=\frac{3}{4}$．

∴$|PF_1|=\sqrt{36+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{147}}{2}$，

$|PF_2|=\sqrt{0+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

∴ $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{\frac{\sqrt{147}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=7$．

故选：A．



13.（4 分）球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的$\frac{1}{6}$，经过这 3 个点的小圆的周长为 4π，那么这个球的半径为（　　）

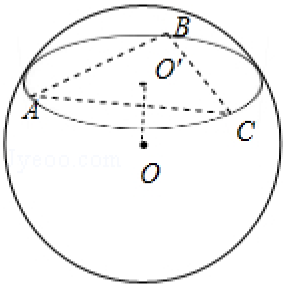
A．4$\sqrt{3}$　　B．2$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

【解答】解法一：过 O 作 $OO'\perp$平面 ABC，O' 是垂足，

则 O' 是△ABC 的中心，则 $O'A=r=2$，又因为∠$AOC=\theta=\frac{\pi}{3}$，

$OA=OC$ 知 $OA=AC<2O'A$．其次，OA 是 Rt△$OO'A$ 的斜边，

故 $OA>O'A$．所以 $O'A<OA<2O'A$．因为 $OA=R$，所以 $2<R<$



4．

因此，排除 A、C、D，得 B．

解法二：在正三角形 ABC 中，应用正弦定理，得 $AB=2r\sin60°=2\sqrt{3}$．

因为∠$AOB=\theta=\frac{\pi}{3}$，所以侧面 AOB 是正三角形，得球半径 $R=OA=AB=2\sqrt{3}$．

解法三：因为正三角形 ABC 的外径 $r=2$，故高 $AD=\frac{3}{2}r=3$，D 是 BC 的中点．

在△OBC 中，$BO=CO=R$，∠$BOC=\frac{\pi}{3}$，所以 $BC=BO=R$，$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}R$．

在 Rt△ABD 中，$AB=BC=R$，所以由 $AB^2=BD^2+AD^2$，得 $R^2=\frac{1}{4}R^2+9$，所以 $R=2\sqrt{3}$.

故选：B.

14.（4 分）一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角是（　　）

A. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　B. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　C. $\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　D. $\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【解答】解：设 Rt△ABC 中，$C=\frac{\pi}{2}$，则 A 与 B 互余且 A 为最小内角.

又由已知得 $\sin^2B=\sin A$，即 $\cos^2A=\sin A$，$1-\sin^2A=\sin A$，

解得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sin A=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍）.

故选：B.

15.（4 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>1$，且前 n 项和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}$，那么 a_1 的取值范围是（　　）

A.（1，+∞）　B.（1，4）　C.（1，2）　D.（1，$\sqrt{2}$）

【解答】解：由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{a_1}$，

∴$a_1^2=1-q$，

∵$a_1>1$，$|q|<1$，∴$1<a_1^2<2$，

∴ $1<a_1<\sqrt{2}$.

故选：D.

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

16.（5 分）已知圆 C 过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，且圆心在此双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是__$\frac{16}{3}$__.

【解答】解：由双曲线的几何性质易知圆 C 过双曲线同一支上的顶点和焦点，

所以圆 C 的圆心的横坐标为 4.

故圆心坐标为（4，±$\frac{4\sqrt{7}}{3}$）.

∴它到中心（0，0）的距离为 $d=\sqrt{16+\frac{112}{9}}=\frac{16}{3}$.

故答案为：$\frac{16}{3}$.

17.（5 分）$(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x^{10} 的系数为__179__（用数字作答）.

【解答】解：$(x+2)^{10}(x^2-1)=x^2(x+2)^{10}-(x+2)^{10}$

∴$(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x^{10} 的系数是 $(x+2)^{10}$ 展开式的 x^8 的系数－x^{10} 的系数

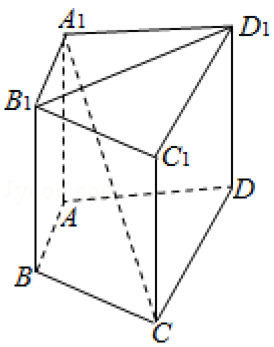
∵$(x+2)^{10}$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}x^{10-r}2^{r}=2^{r}C_{10}^{r}x^{10-r}$

∴令 $r=0$，2 分别得 x^{10}，x^8 的系数为 1，180

故展开式中 x^{10} 的系数为 180－1＝179，

故答案为 179

18.（5 分）如图，在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，当底面四边形 $ABCD$ 满足条件__$AC\perp BD$__时，有 $A_1C\perp B_1D_1$.（注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形.）



【解答】解：∵四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 是直棱柱，

∴$B_1D_1\perp A_1A$，若 $A_1C\perp B_1D_1$

则 $B_1D_1\perp$平面 A_1AC_1C

∴$B_1D_1\perp AC$，

又由 $B_1D_1// BD$，

则有 $BD\perp AC$，

反之，由 $BD\perp AC$ 亦可得到 $A_1C\perp B_1D_1$

故答案为：$BD\perp AC$.

19．（5 分）关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$（$x\in R$），有下列命题：

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是π的整数倍；

② $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}，0\right)$ 对称；

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称．

其中正确的命题的序号是 ②．（把你认为正确的命题序号都填上）

【解答】解：函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T=\pi$，

由相邻两个零点的横坐标间的距离是 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$ 知①错．

利用诱导公式得 $f(x)=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=4\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，知②正确．

由于曲线 $f(x)$ 与 x 轴的每个交点都是它的对称中心，

将 $x=\frac{\pi}{6}$ 代入得 $f(x)=4\sin\frac{2\pi}{3}\neq 0$，

因此点（$\frac{\pi}{6}$，0）不是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，

故命题③错误．

曲线 $f(x)$ 的对称轴必经过图象的最高点或最低点，且与 y 轴平行，而 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时 $y=0$，点

（$-\frac{\pi}{6}$，0）不是最高点也不是最低点，

故直线 $x=-\frac{\pi}{6}$不是图象的对称轴，因此命题④不正确.

故答案为：②

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

20．（10 分）在△ABC中，a，b，c分别是角 A，B，C的对边，设 $a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$．求 $\sin B$的值．以下公式供解题时参考：

$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$，

$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$，

$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$，

$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$．

【解答】解：由正弦定理和已知条件 $a+c=2b$ 得 $\sin A+\sin C=2\sin B$.

由和差化积公式得 $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin B$.

由 $A+B+C=\pi$ 得 $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

又 $A-C=\frac{\pi}{3}$得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin B$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

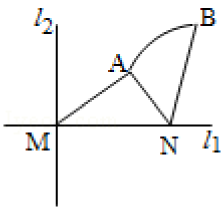
因为 $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

从而 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{\sqrt{39}}{8}$.

21．（12 分）如图，直线 l_1 和 l_2 相交于点 M，$l_1\perp l_2$，点 $N\in l_1$．以 A，B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等．若△AMN 为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且 $|BN|=6$．建立适当的坐标系，求曲线段 C 的方程．



【解答】解：法一：如图建立坐标系，

以 l_1 为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴，点 O 为坐标原点．

依题意知：曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛物线的一段，其中 A，B 分别为 C 的端点．

设曲线段 C 的方程为

$y^2=2px$（$p>0$），（$x_A\leqslant x\leqslant x_B$，$y>0$），

其中 x_A，x_B 分别为 A，B 的横坐标，$p=|MN|$．

所以 M（$-\frac{p}{2}$，0），N（$\frac{p}{2}$，0）．

由 $|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$ 得

$(x_A+\frac{p}{2})^2+2px_A=17$，①

$(x_A-\frac{p}{2})^2+2px_A=9$．②

由①，②两式联立解得 $x_A=\frac{4}{p}$．再将其代入①式并由 $p>0$ 解得 $\begin{cases}p=4\\x_A=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=2\\x_A=2\end{cases}$.

因为△AMN 是锐角三角形，所以 $\frac{p}{2}>x_A$，故舍去 $\begin{cases}p=2\\x_A=2\end{cases}$

所以 $p=4$，$x_A=1$．

由点 B 在曲线段 C 上，得 $x_B=|BN|-\frac{p}{2}=4$．

综上得曲线段 C 的方程为

$y^2=8x$（$1\leqslant x\leqslant 4$，$y>0$）．

解法二：如图建立坐标系，

分别以 l_1、l_2 为 x、y 轴，M 为坐标原点．

作 $AE\perp l_1$，$AD\perp l_2$，$BF\perp l_2$，垂足分别为 E、D、F．

设 A（x_A，y_A）、B（x_B，y_B）、N（x_N，0）．

依题意有

$x_A=|ME|=|DA|=|AN|=3$，

$y_A=|DM|=\sqrt{|AM|^2-|DA|^2}=2\sqrt{2}$，

由于△AMN 为锐角三角形，故有

$x_N=|ME|+|EN|$

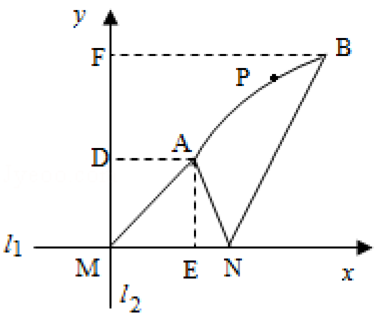
$=|ME|+\sqrt{|AN|^2-|AE|^2}=4$

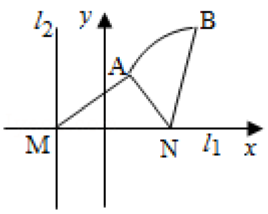
$x_B=|BF|=|BN|=6$．

设点 P（x，y）是曲线段 C 上任一点，则由题意知 P 属于集合

$\{(x,y)\mid(x-x_N)^2+y^2=x^2,\ x_A\leqslant x\leqslant x_B,\ y>0\}$．

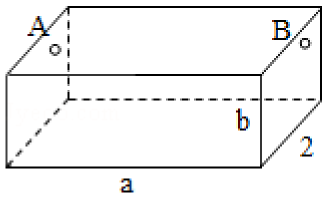
故曲线段 C 的方程为 $y^2=8(x-2)$（$3\leqslant x\leqslant 6$，$y>0$）．





22．（12 分）如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱，

污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出．设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米．已知流出的水中该杂质的质量分数与 a，b 的乘积 ab 成反比．现有制箱材料 60 平方米．问当 a,b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（A、B 孔的面积忽略不计）．



【解答】解法一：设 y 为流出的水中杂质的质量分数，

则 $y=\frac{k}{ab}$，其中 $k>0$ 为比例系数．依题意，即所求的 a，b 值使 y 值最小．

根据题设，有 $4b+2ab+2a=60$（$a>0$，$b>0$），

得 $b=\frac{30-a}{2+a}$（$0<a<30$）．①

于是 $y=\frac{k}{ab}$

$$=\frac{k}{\frac{30a-a^2}{2+a}}=\frac{k}{-a+32-\frac{64}{a+2}}=\frac{k}{34-(a+2+\frac{64}{a+2})}$$

$$\geq\frac{k}{34-2\sqrt{(a+2)\cdot\frac{64}{a+2}}}=\frac{k}{18},$$

当 $a+2=\frac{64}{a+2}$时取等号，y 达到最小值．

这时 $a=6$，$a=-10$（舍去）．

将 $a=6$ 代入①式得 $b=3$．

故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小．

解法二：依题意，即所求的 a，b 的值使 ab 最大．

由题设知 $4b+2ab+2a=60$（$a>0$，$b>0$），

即 $a+2b+ab=30$（$a>0$，$b>0$）．

因为 $a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$，

所以 $2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab\leqslant30$，

当且仅当 $a=2b$ 时，上式取等号．

由 $a>0$，$b>0$，解得 $0<ab\leqslant18$．

即当 $a=2b$ 时，ab 取得最大值，其最大值为 18．

所以 $2b^2=18$．解得 $b=3$，$a=6$．

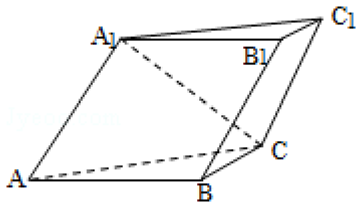
故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小．

23．（12 分）已知如图，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直，$\angle ABC=90°$，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且 $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$．

（1）求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；

（2）求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；

（3）求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离．



【解答】（1）解：如图作 $A_1D\perp AC$，垂足为 D，由面 $A_1ACC_1\perp$ 面 ABC，得 $A_1D\perp$ 面 ABC，

所以 $\angle A_1AD$ 为 A_1A 与面 ABC 所成的角．

因为 $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$，

所以 $\angle A_1AD=45°$ 为所求．

（2）解：作 $DE\perp AB$，垂足为 E，连 A_1E，则由 $A_1D\perp$ 面 ABC，得 $A_1E\perp AB$．

所以 $\angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角．

由已知，$AB\perp BC$，得 $ED\parallel BC$．

又 D 是 AC 的中点，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，

所以 $DE=1$，$AD=A_1D=\sqrt{3}$，$\tan\angle A_1ED=\frac{A_1D}{DE}=\sqrt{3}$．

故 $\angle A_1ED=60°$ 为所求．

（3）解法一：由点 C 作平面 A_1ABB_1 的垂线，垂足为 H，

则 CH 的长是 C 到平面 A_1ABB_1 的距离.

连接 HB，由于 $AB\perp BC$，得 $AB\perp HB$.

又 $A_1E\perp AB$，知 $HB/\!/A_1E$，且 $BC/\!/ED$，

所以 $\angle HBC=\angle A_1ED=60°$

所以 $CH=BC\sin60°=\sqrt{3}$ 为所求.

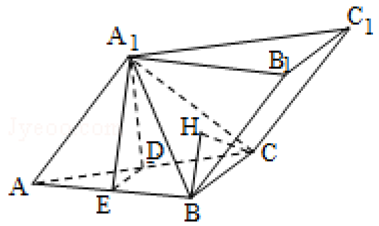
解法二：连接 A_1B.

根据定义，点 C 到面 A_1ABB_1 的距离，即为三棱锥 $C-A_1AB$ 的高 h.

由 $V_{锥C-A_1AB}=V_{锥A_1-ABC}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B}h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}A_1D$，

即 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}h=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

所以 $h=\sqrt{3}$ 为所求.



24．（12 分）设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$，将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 t、s 单位长度后得曲线 C_1.

（1）写出曲线 C_1 的方程；

（2）证明曲线 C 与 C_1 关于点 A（$\frac{t}{2}$，$\frac{s}{2}$）对称；

（3）如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点，证明 $s=\frac{t^3}{4}-t$ 且 $t\neq0$.

【解答】（1）解：曲线 C_1 的方程为 $y=(x-t)^3-(x-t)+s$.

（2）证明：在曲线 C 上任取一点 B_1（x_1，y_1）．设 B_2（x_2，y_2）是 B_1 关于点 A 的对称点，

则有 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{t}{2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{s}{2}$，所以 $x_1=t-x_2$，$y_1=s-y_2$.

代入曲线 C 的方程，得 x_2 和 y_2 满足方程：

$s-y_2=(t-x_2)^3-(t-x_2)$，即 $y_2=(x_2-t)^3-(x_2-t)+s$，可知点 B_2（x_2，y_2）在

曲线 C_1 上．

反过来，同样可以证明，在曲线 C_1 上的点关于点 A 的对称点在曲线 C 上．

因此，曲线 C 与 C_1 关于点 A 对称．

（3）证明：因为曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点，所以，方程组 $\begin{cases}y=x^3-x\\y=(x-t)^3-(x-t)+s\end{cases}$ 有且仅有一组解．

消去 y，整理得 $3tx^2-3t^2x+(t^3-t-s)=0$，这个关于 x 的一元二次方程有且仅有一个根．

所以 $t\neq0$ 并且其根的判别式 $\triangle=9t^4-12t(t^3-t-s)=0$，即 $\begin{cases}t\neq0\\t(t^3-4t-4s)=0.\end{cases}$

所以 $s=\frac{t^3}{4}-t$ 且 $t\neq0$．

25．（12 分）已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$．

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})$（其中 $a>0$，且 $a\neq1$），记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．试比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论．

【解答】解：（1）设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由题意得 $\begin{cases}b_1=1\\10b_1+\frac{10(10-1)}{2}d=145.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b_1=1\\d=3.\end{cases}$

所以 $b_n=3_n-2$．

（2）由 $b_n=3_n-2$，知

$S_n=\log_a(1+1)+\log_a(1+\frac{1}{4})++\log_a(1+\frac{1}{3n-2})$

$=\log_a[(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3n-2})]$，$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}=\log_a\sqrt[3]{3n+1}$．

因此要比较 S_n 与 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小，可先比较（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）（1 $+\frac{1}{3n-2}$）与 $\sqrt[3]{3n+1}$ 的大小.

取 $n=1$ 有（1+1）$>\sqrt[3]{3\cdot 1+1}$，

取 $n=2$ 有（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）$>\sqrt[3]{3\cdot 2+1}$，

由此推测（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）（1 $+\frac{1}{3n-2}$）$>\sqrt[3]{3n+1}$. ①

若①式成立，则由对数函数性质可断定：

当 $a>1$ 时，$S_n>\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

当 $0<a<1$ 时，$S_n<\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

下面用数学归纳法证明①式.

（ⅰ）当 $n=1$ 时已验证①式成立.

（ⅱ）假设当 $n=k$（$k\geqslant 1$）时，①式成立，即

（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）（1 $+\frac{1}{3k-2}$）$>\sqrt[3]{3k+1}$.

那么，当 $n=k+1$ 时，

（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）（1 $+\frac{1}{3k-2}$）（1 $+\frac{1}{3(k+1)-2}$）$>\sqrt[3]{3k+1}$（1 $+\frac{1}{3k+1}$）

$=\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}$（$3k+2$）.

因为 $[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)]^3-[\sqrt[3]{3k+4}]^3=\frac{(3k+2)^3-(3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2}=\frac{9k+4}{(3k+1)^2}>0$，

所以 $\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}$（$3k+2$）$>\sqrt[3]{3k+4}=\sqrt[3]{3(k+1)+1}$.

因而（1+1）（1 $+\frac{1}{4}$）（1 $+\frac{1}{3k-2}$）（1 $+\frac{1}{3k+1}$）$>\sqrt[3]{3(k+1)+1}$.

这就是说①式当 $n=k+1$ 时也成立.

由（ⅰ），（ⅱ）知①式对任何正整数 n 都成立.

由此证得：

当 $a>1$ 时，$S_n>\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

当 $0<a<1$ 时，$S_n<\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.