

2001 年河南高考数学真题及答案

说明：本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长， l 表示斜高或母线长
台体的体积公式

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积， h 表示高。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 不等式 $\frac{x-1}{x-3} > 0$ 的解集为

A. $\{x \mid x < 1\}$

B. $\{x \mid x > 3\}$

C. $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x \mid 1 < x < 3\}$

2. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为 $\sqrt{3}$ ，则这个圆锥的全面积是

A. 3π

B. $3\sqrt{3}\pi$

C. 6π

D. 9π

3. 极坐标方程 $\rho^2 \cos 2\theta = 1$ 所表示的曲线是

A. 两条相交直线

B. 圆

C. 椭圆

D. 双曲线

4. 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x) = \log_{2^a}(x+1)$ 满足 $f(x) > 0$ ，则 a 的取值范围是

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

5. 已知复数 $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ ，则 $\arg \frac{1}{z}$ 是

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{11\pi}{6}$

6. 函数 $y = 2^{-x} + 1$ ($x > 0$) 的反函数是

- A. $y = 1 + \log_2 \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, 2)$ B. $y = -1 + \log_2 \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, 2)$
 C. $y = 1 + \log_2 \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, 2)$ D. $y = -1 + \log_2 \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, 2]$

7. 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, $\sin \beta + \cos \beta = b$, 则

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $ab < 1$ D. $ab > 2$

8. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = \sqrt{2} BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为

A. 60° B. 90° C. 45° D. 120°

9. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题

- ①若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
 ②若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
 ③若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;
 ④若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减

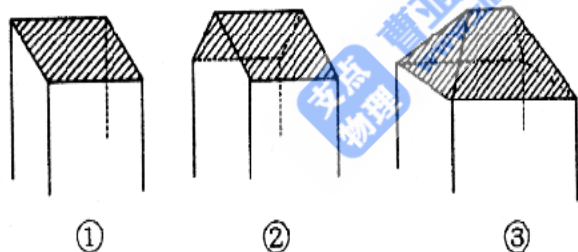
其中, 正确的命题是

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

10. 对于抛物线 $y^2 = 4x$ 上任意一点 Q , 点 $P(a, 0)$ 都满足 $|PQ| \geq |a|$, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[0, 2]$ D. $(0, 2)$

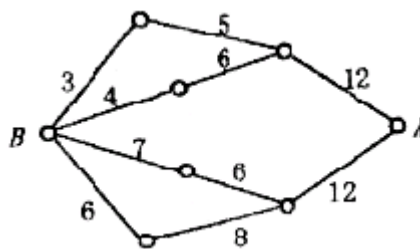
11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ①单向倾斜; ②双向倾斜; ③四向倾斜
 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 .



若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α , 则

- A. $P_3 > P_2 > P_1$ B. $P_3 > P_2 = P_1$
 C. $P_3 = P_2 > P_1$ D. $P_3 = P_2 = P_1$

12. 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为



- A. 26 B. 24 C. 20 D. 19

第II卷(非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共4小题, 每小题4分, 共16分. 把答案填在题中横线上)

13. 已知甲、乙两组各有8人, 现从每组抽取4人进行计算机知识竞赛, 比赛人员的组成共有_____种可能(用数字作答)。

14. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1 \perp PF_2$,

则点 P 到 x 轴的距离为_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q =$ _____.

16. 圆周上有 $2n$ 个等分点 ($n > 1$), 以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

求函数 $y = (\sin x + \cos x)^2 + 2 \cos^2 x$ 的最小正周期.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列前三项为 $a, 4, 3a$, 前 n 项的和为 S_n , $S_k = 2550$.

(I) 求 a 及 k 的值;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} \right)$

19. (本小题满分 12 分)

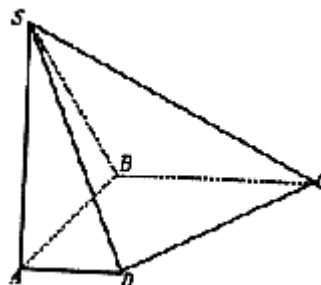
如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中,

$\angle ABC = 90^\circ$, $SA \perp$ 面 $ABCD$,

$SA = AB = BC = 1$, $AD = \frac{1}{2}$.

(I) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(II) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



20. (本小题满分 12 分)

设计一幅宣传画, 要求画面面积为 4840 cm^2 , 画面的宽与高的比为 λ ($\lambda < 1$), 画面的上、下各留 8 cm 空白, 左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸, 能使宣传画所用纸张面积最小? 如果要求 $\lambda \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$, 那么 λ 为何值时, 能使宣传画所用纸张面积最小?

21. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E , 过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A, B 两点, 点 C 在右准线 l 上, 且 $BC \parallel x$ 轴. 求证直线 AC 经过线段 EF 的中点.

22. (本小题满分 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称. 对任意 $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(1) = a > 0$.

(I) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$;

(II) 证明 $f(x)$ 是周期函数;

(III) 记 $a_n = f\left(2n + \frac{1}{2n}\right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty}(\ln a_n)$.

参考答案

一、选择题

1. C 2. A 3. D 4. A 5. B 6. A 7. B 8. B 9. C 10. B 11. D 12. D

二、填空题

13. 4900 14. $\frac{16}{5}$ 15. 1 16. $2n(n-1)$

三、解答题

$$\begin{aligned}
 17. \text{解: } y &= (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x \\
 &= 1 + \sin 2x + 2\cos^2 x \\
 &= \sin 2x + \cos 2x + 2 \\
 &= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2
 \end{aligned}$$

5分
8分

所以最小正周期 $T = \pi$. 10分

18. 解: (I) 设该等差数列为 $\{a_n\}$,

则 $a_1 = a$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3a$, $S_k = 2550$.

由已知有 $a+3a=2 \times 4$, 解得首项 $a_1 = a = 2$,

公差 $d = a_2 - a_1 = 2$. 2分

$$\text{代入公式 } S_k = k \cdot a_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d \text{ 得 } k \cdot 2 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2 = 2550$$

$$\therefore k^2 + k - 2550 = 0$$

解得 $k=50$, $k=-51$ (舍去)

$\therefore a=2$, $k=50$. 6分

(II) 由 $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ 得 $S_n = n(n+1)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

9分

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

12分

19. 解: (I) 直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$\begin{aligned}
 M_{\text{底面}} &= \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB \\
 &= \frac{1+0.5}{2} \times 1 = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

2分

\therefore 四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是

$$V = \frac{1}{3} \times SA \times M_{\text{底面}} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad 4 \text{ 分}$$

(II) 延长 BA 、 CD 相交于点 E ，连结 SE ，则 SE 是所求二面角的棱

6 分

$\because AD \parallel BC, BC = 2AD$

$\therefore EA = AB = SA, \therefore SE \perp SB$

$\because SA \perp$ 面 $ABCD$ ，得面 $SEB \perp$ 面 EBC ， EB 是交线。

又 $BC \perp EB, \therefore BC \perp$ 面 SEB ，故 SB 是 SC 在面 SEB 上的射影，

$\therefore CS \perp SE$ ，

所以 $\angle BSC$ 是所求二面角的平面角

10 分

$$\therefore SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}, BC = 1, BC \perp SB$$

$$\therefore \tan \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

即所求二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12 分

20. 解：设画面高为 x cm，宽为 λx cm，则 $\lambda x^2 = 4840$

1 分

设纸张面积为 S ，则有

$$S = (x + 16)(\lambda x + 10) = \lambda x^2 + (16\lambda + 10)x + 160, \quad 3 \text{ 分}$$

将 $x = \frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式得

$$S = 5000 + 44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda} + \frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad 5 \text{ 分}$$

当 $8\sqrt{\lambda} = \frac{5}{\sqrt{\lambda}}$ ，即 $\lambda = \frac{5}{8}$ ($\frac{5}{8} < 1$) 时， S 取得最小值，

此时，高： $x = \sqrt{\frac{4840}{\lambda}} = 88$ cm，

$$\text{宽：} \lambda x = \frac{5}{8} \times 88 = 55 \text{ cm} \quad 8 \text{ 分}$$

如果 $\lambda \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$ ，可设 $\frac{2}{3} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \frac{3}{4}$ ，则由 S 的表达式得

$$\begin{aligned} S(\lambda_1) - S(\lambda_2) &= 44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda_1} + \frac{5}{\sqrt{\lambda_1}} - 8\sqrt{\lambda_2} - \frac{5}{\sqrt{\lambda_2}}\right) \\ &= 44\sqrt{10}(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})\left(8 - \frac{5}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right) \end{aligned} \quad 10 \text{ 分}$$

由于 $\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \geq \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ ，故 $8 - \frac{5}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} > 0$

因此 $S(\lambda_1) - S(\lambda_2) < 0$,

所以 $S(\lambda)$ 在区间 $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ 内单调递增.

从而, 对于 $\lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, $S(\lambda)$ 取得最小值

答: 画面高为 88 cm、宽为 55 cm 时, 所用纸张面积最小; 如果要求 $\lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, 所用纸张面积最小.

12

分

21. 证明: 依设, 得椭圆的半焦距 $c = 1$, 右焦点为 $F(1, 0)$, 右准线方程为 $x = 2$, 点 E 的坐标为 $(2, 0)$, EF 的中点为 $N(\frac{3}{2}, 0)$ 3分

若 AB 垂直于 x 轴, 则 $A(1, y_1)$, $B(1, -y_1)$, $C(2, -y_1)$,

$\therefore AC$ 中点为 $N(\frac{3}{2}, 0)$, 即 AC 过 EF 中点 N .

若 AB 不垂直于 x 轴, 由直线 AB 过点 F , 且由 $BC \parallel x$ 轴知点 B 不在 x 轴上, 故直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$, $k \neq 0$.

记 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 则 $C(2, y_2)$ 且 x_1, x_2 满足二次方程

$$\frac{x^2}{2} + k^2(x-1)^2 = 1$$

即 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2(k^2 - 1) = 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2(k^2 - 1)}{1 + 2k^2} \quad 10分$$

又 $x_1^2 = 2 - 2y_1^2 < 2$, 得 $x_1 - \frac{3}{2} \neq 0$,

故直线 AN, CN 的斜率分别为

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1 - \frac{3}{2}} = \frac{2k(x_1 - 1)}{2x_1 - 3} \quad k_2 = \frac{y_2}{2 - \frac{3}{2}} = 2k(x_2 - 1)$$

$$\therefore k_1 - k_2 = 2k \cdot \frac{(x_1 - 1) - (x_2 - 1)(2x_1 - 3)}{2x_1 - 3}$$

$$\begin{aligned} & \because (x_1 - 1) - (x_2 - 1)(2x_1 - 3) \\ & = 3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + 2k^2} [12k^2 - 4(k^2 - 1) - 4(1 + 2k^2)] = 0$$

$\therefore k_1 - k_2 = 0$, 即 $k_1 = k_2$, 故 A, C, N 三点共线.

所以, 直线 AC 经过线段 EF 的中点 N . 14分

22. (I) 解: 因为对 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$,

所以

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, x \in [0,1]$$

$$\therefore f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = [f\left(\frac{1}{2}\right)]^2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = [f\left(\frac{1}{4}\right)]^2$$

$$f(1) = a > 0,$$

3 分

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}, f\left(\frac{1}{4}\right) = a^{\frac{1}{4}}$$

6 分

(II) 证明: 依题设 $y = f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称,

故 $f(x) = f(1 + 1 - x)$,

即 $f(x) = f(2 - x), x \in \mathbb{R}$

又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$,

$\therefore f(-x) = f(2 - x), x \in \mathbb{R}$,

将上式中 $-x$ 以 x 代换, 得 $f(x) = f(x + 2), x \in \mathbb{R}$

这表明 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的周期函数, 且 2 是它的一个周期.

10 分

(III) 解: 由(I)知 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = f\left[\frac{1}{2n} + (n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right]$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left[(n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right] = \dots$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) = [f\left(\frac{1}{2n}\right)]^n$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2n}\right) = a^{\frac{1}{2n}}$$

12 分

$\therefore f(x)$ 的一个周期是 2

$$\therefore f\left(2n + \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right), \text{ 因此 } a_n = a^{\frac{1}{2n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \ln a\right) = 0$$

14 分