

2005 年山东高考文科数学真题及答案

第 I 卷（共 60 分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，选择一个符合题目要求的选项。

1. $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 1$ ，公差 $d = 3$ 的等差数列，如果 $a_n = 2005$ ，则序号 n 等于（ ）

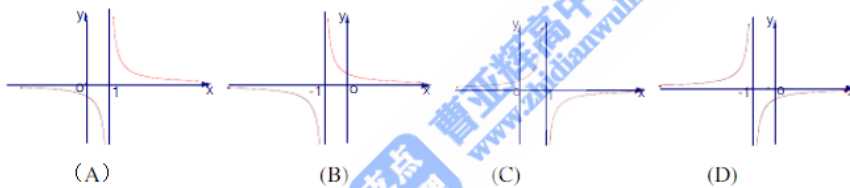
A. 667 B. 668 C. 669 D. 670

2. 下列大小关系正确的是（ ）

A. $0.4^3 < 3^{0.4} < \log_4 0.3$ B. $0.4^3 < \log_4 0.3 < 3^{0.4}$

C. $\log_4 0.3 < 0.4^3 < 3^{0.4}$ D. $\log_4 0.3 < 3^{0.4} < 0.4^3$

3. 函数 $y = \frac{1-x}{x} (x \neq 0)$ 的反函数的图象大致是（ ）



4. 已知函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{12}) \cos(x - \frac{\pi}{12})$ ，则下列判断正确的是（ ）

A. 此函数的最小正周期为 2π ，其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{12}, 0)$

B. 此函数的最小正周期为 π ，其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{12}, 0)$

C. 此函数的最小正周期为 2π ，其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$

D. 此函数的最小正周期为 π ，其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$

5. 下列函数中既是奇函数，又在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减的是（ ）

A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = -|x+1|$

C. $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ D. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

6. 如果 $(3x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^n$ 的展开式中各项系数之和为 128，则展开式中 $x^{\frac{1}{3}}$ 的系数是（ ）

- A. 7 B. -7 C. 21 D. -21

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0, \\ e^{x-1}, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(1) + f(a) = 2$, 则 a 的所有可能值为 ()

- A. 1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $1, \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知向量 a, b , 且 $\overrightarrow{AB} = a+2b, \overrightarrow{BC} = -5a+6b, \overrightarrow{CD} = 7a-2b$, 则一定共线的三点是 ()

- A. A、B、D B. A、B、C C. B、C、D D. A、C、D

9. 设地球半径为 R , 若甲地位于北纬 45° 东经 120° , 乙地位于南纬 75° 东经 120° , 则甲、乙两地的球面距离为 ()

- A. $\sqrt{3}R$ B. $\frac{\pi}{6}R$ C. $\frac{5\pi}{6}R$ D. $\frac{2\pi}{6}R$

10. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{11}{12}$

11. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subseteq B$ 是 $(A \cup B) \cup B = U$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 设直线 $l: 2x + y + 2 = 0$ 关于原点对称的直线为 l' . 若 l' 与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的交点为 $A,$

$B,$ 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 答案须填在题中横线上.

13. 某学校共有教师 490 人, 其中不到 40 岁的有 350 人, 40 岁及以上的有 140 人, 为了解普通话在该校教师中的推广普及情况, 用分层抽样的方法, 从全体教师中抽取一个容量为 70 人的样本进行普通话水平测试, 其中在不到 40 岁的教师中应抽取的人数是 .

14. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 右准线 l 与两条渐近线交于 P, Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e =$.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ 3x + 2y \leq 12, \\ 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$ 则使得目标函数 $z = 6x + 5y$ 的值最大的点 (x, y) 是 .

16. 已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不重合的平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m // n$.

② 若 $m, n \subset \alpha, m // \beta, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$.

③ 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m // n$, 则 $\alpha // \beta$.

④ m, n 是两条异面直线, 若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知向量 $\vec{m} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 和 $\vec{n} = (\sqrt{2} - \sin \theta, \cos \theta, \theta \in (\pi, 2\pi))$, 且 $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$,

求 $\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8})$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\frac{1}{7}$. 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取……取后不放入, 直到两人中有一人取到白球时即终止. 每个球在每一次被取出的机会是等可能的, 用 ξ 表示取球终止时所需要的取球次数.

- (I) 求袋中原有白球的个数;
- (II) 求取球 2 次终止的概率;
- (III) 求甲取到白球的概率.

19. (本小题满分 12 分)

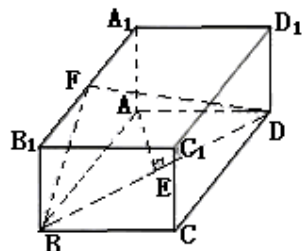
已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = mx^3 - 3(m+1)x^2 + nx + 1$ 的一个极值点, 其中 $m, n \in R, m < 0$.

- (I) 求 m 与 n 的关系表达式;
- (II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2, AA_1=1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 30° , AE 垂直 BD 于 E , F 为 A_1B_1 的中点,

- (I) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
- (II) 求平面 BDF 与平面 AA_1B_1B 所成二面角 (锐角) 的大小;



(III) 求点 A 到平面 BDF 的距离. 21. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 5$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} = 2S_n + n + 5$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(I) 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(II) 令 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的导数 $f'(1)$.

22. (本小题满分 14 分)

已知动圆过定点 $(\frac{p}{2}, 0)$, 且与直线 $x = -\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p > 0$.

(I) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(II) 设 A、B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为

α 和 β , 当 α 、 β 变化且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 时, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

参考答案

一、选择题

1. C 2. C 3. B 4. B 5. D 6. C 7. C 8. A 9. D 10. D 11. A 12. B

二、填空题

13. 50 14. $\sqrt{2}$ 15. (2, 3) 16. ③④

三、解答题:

17. 解法一: $\vec{m} + \vec{n} = (\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{2}, \cos\theta + \sin\theta)$,

$$\begin{aligned} |\vec{m} + \vec{n}| &= \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{2})^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)} \\ &= \sqrt{4 + 4\cos(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ &= 2\sqrt{1 + \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}. \end{aligned}$$

由已知 $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$, 得 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{25}$.

又 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) - 1$, 所以 $\cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) = \frac{16}{25}$.

$\because \pi < \theta < 2\pi, \therefore \frac{5\pi}{8} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8} < \frac{9\pi}{8}, \therefore \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) < 0$.

$\therefore \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) = -\frac{4}{5}$.

解法二: $|\vec{m} + \vec{n}|^2 = (\vec{m} + \vec{n})^2 = \vec{m}^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2$

$= |\vec{m}|^2 + |\vec{n}|^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n}$
 $= (\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta})^2 + (\sqrt{(\sqrt{2} - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta})^2 + 2[\cos \theta(\sqrt{2} - \sin \theta) + \sin \theta \cos \theta]$
 $= 4 + 2\sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta) = 4(1 + \cos(\theta + \frac{\pi}{4}))$
 $= 8\cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8})$.

由已知 $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$, 得 $|\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8})| = \frac{4}{5}$.

$\because \pi < \theta < 2\pi, \therefore \frac{5\pi}{8} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8} < \frac{9\pi}{8}, \therefore \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) < 0$.

$\therefore \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}) = -\frac{4}{5}$.

$$\frac{1}{7} = \frac{C_n^2}{C_7^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{7 \times 6}{2}} = \frac{n(n-1)}{7 \times 6}$$

18. 解: (I) 设袋中原有 n 个白球, 由题意知:

所以 $n(n-1) = 6$, 解得 $n = 3$ (舍去 $n = -2$), 即袋中原的 3 个白球.

(II) 记“取球 2 次终止”的事件为 A ,

则 $P(A) = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$.

(III) 记“甲取到白球”的事件为 B .

“第 i 次取出的球是白球”的事件为 $A_i, i=1, 2, 3, 4, 5$,

因为甲先取, 所以甲只有可能在第 1 次, 第 3 次和第 5 次取球,

$\therefore P(B) = P(A_1 + A_3 + A_5)$,

因为事件 A_1, A_3, A_5 两两互斥,

$\therefore P(B) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{7} + \frac{4 \times 3 \times 3}{7 \times 6 \times 5} + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} \\
 &= \frac{3}{7} + \frac{6}{35} + \frac{1}{35} = \frac{22}{35}.
 \end{aligned}$$

19. (I) 解: $f'(x) = 3mx^2 - 6(m+1)x + n$, 因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 所以 $f'(1) = 0$, 即 $3m - 6(m+1) + n = 0$, 所以 $n = 3m + 6$.

(II) 解: 由 (I) 知, $f'(x) = 3mx^2 - 6(m+1)x + 3m + 6 = 3m(x-1)[x - (1 + \frac{2}{m})]$.

1° 当 $m < 0$ 时, 有 $1 > 1 + \frac{2}{m}$, 当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty, 1 + \frac{2}{m})$	$1 + \frac{2}{m}$	$(1 + \frac{2}{m}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

由上表知, 当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 + \frac{2}{m})$ 单调递减, 在 $(1 + \frac{2}{m}, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

2° 当 $m > 0$ 时, 有 $1 < 1 + \frac{2}{m}$, 当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 1 + \frac{2}{m})$	$1 + \frac{2}{m}$	$(1 + \frac{2}{m}, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由上表知, 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, 在 $(1, 1 + \frac{2}{m})$ 单调递减,

在 $(1 + \frac{2}{m}, +\infty)$ 单调递增.

20. 解法一: 在长方体 ABCD—A1B1C1D1 中, 以 AB 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, AA1

所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系如图.

由已知 $AB=2$, $AA_1=1$, 可得 $A(0, 0, 0)$,

$B(2, 0, 0)$, $F(1, 0, 1)$

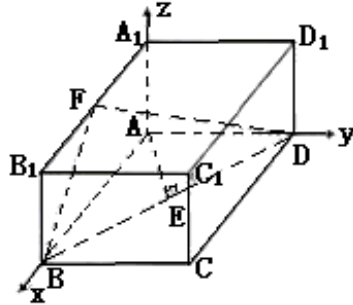
又 $AD \perp$ 平面 AA_1B_1B ,

从而 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角即为 $\angle DBA=30^\circ$,

又 $AB=2$, $AE \perp BD$, $AE=1$, $AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

从而易得 $E(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), D(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

(I) $\therefore \vec{AE} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \vec{BF} = (-1, 0, 1)$



$$\therefore \cos \langle \vec{AE}, \vec{BF} \rangle = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{BF}}{|\vec{AE}| |\vec{BF}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

即异面直线 AE 、 BF 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

(II) 易知平面 AA_1B 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 BDF 的一个法向量.

$$\vec{BD} = (-2, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0).$$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{BF} \\ \vec{n} \perp \vec{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ \sqrt{3}x = y \end{cases},$$

$$\text{取 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1), \therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

即平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角 (锐角) 大小为 $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

(III) 点 A 到平面 BDF 的距离, 即 \vec{AB} 在平面 BDF 的法向量 \vec{n} 上的投影的绝对值.

$$\text{所以距离 } d = |\vec{AB}| \cdot \cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = |\vec{AB}| \cdot \frac{\vec{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

所以点 A 到平面 BDF 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法二：(I) 连结 B_1D_1 ，过 F 作 B_1D_1 的垂线，垂足为 K，

$\because BB_1$ 与两底面 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ 都垂直，

$$\left. \begin{array}{l} FK \perp BB_1 \\ FK \perp B_1D_1 \\ \therefore B_1D_1 \cap BB_1 = B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow FK \perp \text{平面} BDD_1B_1,$$

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp BB_1 \\ AE \perp BD \\ \text{又 } BB_1 \cap BD = B \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp \text{平面} BDD_1B_1,$$

因此 $FK \parallel AE$ 。

$\therefore \angle BFK$ 为异面直线 BF 与 AE 所成的角。

连结 BK，由 $FK \perp$ 面 BDD_1B_1 得 $FK \perp BK$ ，

从而 $\triangle BKF$ 为 Rt \triangle ，

在 Rt $\triangle B_1KF$ 和 Rt $\triangle B_1D_1A_1$ 中，由 $\frac{FK}{B_1F} = \frac{A_1D_1}{B_1D_1}$ 得

$$FK = \frac{A_1D_1 \cdot B_1F}{B_1D_1} = \frac{AD \cdot \frac{1}{2} AB}{BD} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} \times 1}{\sqrt{2^2 + (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } BF = \sqrt{2}, \quad \therefore \cos \angle BFK = \frac{FK}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore \text{异面直线 BF 与 AE 所成的角为 } \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(II) 由于 $DA \perp$ 面 AA_1B_1 ，由 A 作 BF 的垂线 AG，垂足为 G，连结 DG，由三垂线定理知 $BG \perp DG$ ，

$\therefore \angle AGD$ 即为平面 BDF 与平面 AA_1B_1 所成二面角的平面角 且 $\angle DAG = 90^\circ$ ，

在平面 AA_1B_1 中，延长 BF 与 AA_1 交于点 S，

$$\because F \text{ 为 } A_1B_1 \text{ 的中点, } A_1F \parallel \frac{1}{2} AB,$$

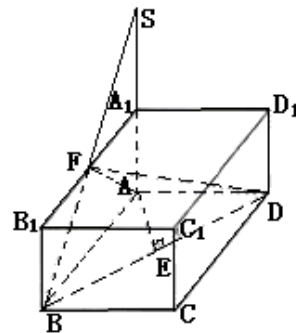
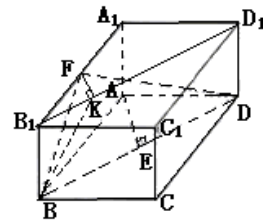
$\therefore A_1, F$ 分别为 SA、SB 的中点，

即 $SA = 2A_1A = 2AB$ ，

\therefore Rt $\triangle BAS$ 为等腰直角三角形，

垂足 G 点实为斜边 SB 的中点 F，即 F、G 重合。

$$\text{易得 } AG = AF = \frac{1}{2} SB = \sqrt{2}, \quad \text{在 Rt}\triangle BAS \text{ 中, } AD = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$



$$\therefore \tan \angle AGD = \frac{AD}{AG} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \therefore \angle AGD = \arctan \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

即平面 BDF 与平面 AA₁B 所成二面角（锐角）的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{6}}{3}$.

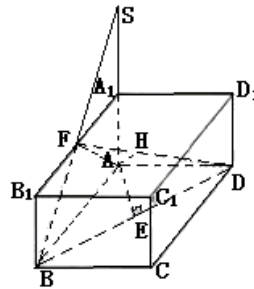
(III) 由 (II) 知平面 AFD 是平面 BDF 与平面 AA₁B 所成二面角的平面角所在的平面，
 \therefore 面 AFD \perp 面 BDF。

在 Rt \triangle ADF 中，由 A 作 AH \perp DF 于 H，则 AH 即为点 A 到平面 BDF 的距离。

由 AH \cdot DF = AD \cdot AF，得

$$AH = \frac{AD \cdot AF}{DF} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{2}{3}\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

所以点 A 到平面 BDF 的距离为 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ 。



21.

解：(I) 由已知 $S_{n+1} = 2S_n + n + 5$, $\therefore n \geq 2$ 时, $S_n = 2S_{n-1} + n + 4$,

两式相减，得 $S_{n+1} - S_n = 2(S_n - S_{n-1}) + 1$,

即 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 从而 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$.

当 $n=1$ 时, $S_2 = 2S_1 + 1 + 5$, $\therefore a_1 + a_2 = 2a_1 + 6$ 又 $a_1 = 5, \therefore a_2 = 11$,

从而 $a_2 + 1 = 2(a_1 + 1)$. 故总有 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1), n \in N^*$.

又 $\because a_1 = 5, \therefore a_n + 1 \neq 0$,

$$\frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2.$$

即 $\{a_n + 1\}$ 是以 $a_1 + 1 = 6$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

(II) 由 (I) 知 $a_1 = 3 \times 2^n - 1. \therefore f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$$\therefore f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

从而 $f'(1) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$

$$= (3 \times 2 - 1) + 2(3 \times 2^2 - 1) + \dots + n(3 \times 2^n - 1)$$

$$\begin{aligned}
&= 3(2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \times 2^n) - (1 + 2 + \dots + n) \\
&= 3[n \times 2^{n+1} - (2 + \dots + 2^n)] - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 3[n \times 2^{n+1} - 2^{n-1} + 2] - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 3(n-1) \cdot 2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} + 6.
\end{aligned}$$

22.

解：(I) 如图，设 M 为动圆圆心， $(\frac{p}{2}, 0)$ 记为 F，

过点 M 作直线 $x = -\frac{p}{2}$ 的垂线，垂足为 N。

由题意知： $|MF| = |MN|$ ，

即动点 M 到定点 F 与定直线 $x = -\frac{p}{2}$ 的距离相等，

由抛物线定义知：点 M 的轨迹为抛物线，其中 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 为焦点， $x = -\frac{p}{2}$ 为准线。

所以轨迹方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$ 。

(II) 如图，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由题意得 $x_1 x_2 \neq 0$

又直线 OA, OB 的倾斜角 α, β 满足 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ，故 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ 。

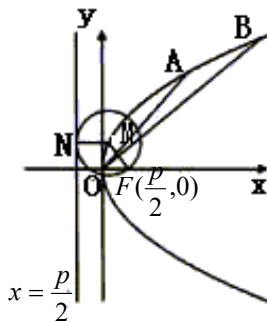
所以直线 AB 的斜率存在，否则，OA, OB 直线的倾斜角之和为 π

从而设 AB 方程为 $y = kx + b$ 。

显然 $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$ 。将 $y = kx + b$ 与 $y^2 = 2px$ 联立消去 x，

$$\text{得 } ky^2 - 2px + 2pb = 0. \text{ 由韦达定理知 } y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}, y_1 \cdot y_2 = \frac{2pb}{k}. \quad (*)$$

由 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ，得



$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}}{1 - \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}} = \frac{\frac{2p}{y_1} + \frac{2p}{y_2}}{1 - \frac{2p}{y_1} \cdot \frac{2p}{y_2}} = \frac{2p(y_1 + y_2)}{y_1 y_2 - 4p^2}$$

将 (*) 式代入上式整理化简, 得: $b = 2p + 2pk$.

此时, 直线 AB 的方程可表示为:

$$y = kx + 2p + 2pk,$$

$$\text{即 } k(x + 2p) - (y - 2p) = 0.$$

所以, 直线 AB 恒过定点 $(-2p, 2p)$.