2025年普通高等学校招生全国统一考试

上海数学试卷

（考试时间120分钟，满分150分）

一、填空题（本大题共12题，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分，共54分。考生应在答题纸的相应位置直接填写结果）

1．已知全集$U=\{x\mid 2\le x\le 5, x\in R\}$，集合$A=\{x\mid 2\le x<4, x\in \mathbf{R}\}$，则$\overline{A}=$________．

2．不等式$\dfrac{x-1}{x-3}<0$的解集为________．

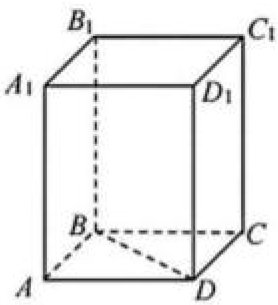
3．已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-3$，公差$d=2$，则该数列的前6项和为________．

4．在二项式$(2x-1)^5$的展开式中，x^3的系数为________．

5．函数$y=\cos x$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$上的值域为________．

6．已知随机变量X的分布为$\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$，则期望$E[X]=$________．

7．如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BD=4\sqrt{2}, DB_1=9$，则该正四棱柱的体积为________．

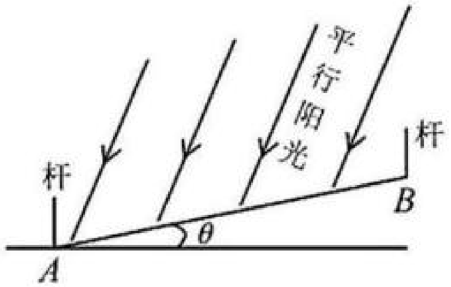


8．设$a,b>0, a+\dfrac{1}{b}=1$，则$b+\dfrac{1}{a}$的最小值为________．

9．4个家长和2个儿童去爬山，6个人需要排成一条队列，要求队列的头和尾均是家长，则不同的排列个数有________种．

10．已知复数z满足$z^2=(\overline{z})^2, |z|\le 1$，则$|z-2-3\mathrm{i}|$的最小值是________．

11．小申同学观察发现，生活中有些时候影子可以完全投射在斜面上．某斜面上有两根长为1米的垂直于水平面放置的杆子，与斜面的接触点分别为A、B，它们在阳光的照射下呈现出影子，阳光可视为平行光：其中一根杆子的影子在水平面上，长度为0.4米；另一根杆子的影子完全在斜面上，长度为0.45米．则斜面的底角$\theta=$________．（结果用角度制表示，精确到$0.01°$）



12．已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是平面内三个不同的单位向量．若 $f(\vec{a}\cdot\vec{b})+f(\vec{b}\cdot\vec{c})+f(\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 可的取值范围是_______．

二、选择题（本大题共 4 题，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分，共 18 分。每题有且仅有一个正确选项，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑。）

13．已知事件 A、B 相互独立，事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，事件 B 发生的概率为 $P(B)=\dfrac{1}{2}$，则事件 $A\cap B$ 发生的概率 $P(A\cap B)$ 为（　　）

A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．0

14．设 $a>0, s\in\mathbf{R}$．下列各项中，能推出 $a^s>a$ 的一项是（　　）

A．$a>1$，且 $s>0$　　B．$a>1$，且 $s<0$

C．$0<a<1$，且 $s>0$　　D．$0<a<1$，且 $s<0$

15．已知 $A(0,1), B(1,2)$，C 在 $\Gamma: x^2-y^2=1(x\geq 1, y\geq 0)$ 上，则 $\triangle ABC$ 的面积（　　）

A．有最大值，但没有最小值　　B．没有最大值，但有最小值

C．既有最大值，也有最小值　　D．既没有最大值，也没有最小值

16．设 $\lambda=[0,1]$，数列 $a_n=10n-9$，数列 $b_n=2^n$．设 $c_n=\lambda a_n+(1-\lambda)b_n$．若对任意 $\lambda\in[0,1]$，长为 a_n、b_n、c_n 的线段均能构成三角形，则满足条件的 n 有（　　）

A．1 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．无穷

三、解答题（本大题共 5 题，第 17-19 题每题 14 分，第 20-21 题每题 18 分，共 78 分。解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤。）

17．（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）2024 年东京奥运会，中国获得了男子 4×100 米混合泳接力金牌．以下是历届奥运会男子 4×100 米混合泳接力项目冠军成绩记录（单位：秒），数据按照升序排列．

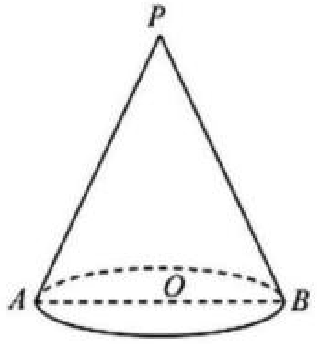
206.78	207.46	207.95	209.34	209.35
210.68	213.73	214.84	216.93	216.93

（1）求这组数据的极差与中位数；

（2）从这 10 个数据中任选 3 个，求恰有 2 个数据在 211 以上的概率；

（3）若比赛成绩 y 关于年份 x 的回归方程为 $y=-0.311x+\hat{b}$，年份 x 的平均数为 2006，预测 2028 年冠军队的成绩（精确到 0.01 秒）.

18.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）如图，P 是圆锥的顶点，O 是底面圆心，AB 是底面直径，且 $AB=2$.



（1）若直线 PA 与圆锥底面的所成角为 $\frac{\pi}{3}$，求圆锥的侧面积；

（2）已知 Q 是母线 PA 的中点，点 C、D 在底面圆周上，且弧 AC 的长为 $\frac{\pi}{3}$，$CD \parallel AB$．设点 M 在线段 OC 上，证明：直线 $QM \parallel$ 平面 PBD.

19.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）已知 $f(x)=x^2-(m+2)x+m\ln x, m\in\mathbf{R}$.

（1）若 $f(1)=0$，求不等式 $f(x)\le x^2-1$ 的解集；

（2）若函数 $y=f(x)$ 满足在 $(0,+\infty)$ 上存在极大值，求 m 的取值范围；

20.（第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1(a>\sqrt{5})$，$M(0,m)(m>0)$，$A$ 是 Γ 的右顶点.

（1）若 Γ 的焦点 $(2,0)$，求离心率 e；

（2）若 $a=4$，且 Γ 上存在一点 P，满足 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$，求 m；

（3）已知 AM 的中垂线 l 的斜率为 2，l 与 Γ 交于 C、D 两点，$\angle CMD$ 为钝角，求 a 的取值范围.

21.（第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．对于正实数 a，定义集合 $M_a=\{x\mid f(x+a)=f(x)\}$.

（1）若 $f(x)=\sin x$，判断 $\frac{\pi}{3}$ 是否是 M_π 中的元素，请说明理由；

（2）若 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$，$M_a\neq\varnothing$，求 a 的取值范围；

（3）若 $y=f(x)$ 是偶函数，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=1-x$，且对任意 $a\in(0,2)$，均有 $M_a\subseteq M_2$．写出 $y=f(x)$，$x\in(1,2)$ 解析式，并证明：对任意实数 c，函数 $y=f(x)-c$ 在 $[-3,3]$ 上至多有 9 个零点．