2008 年普通高等学校统一考试（浙江卷）

数学(文科)试题

第 I 卷 （共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知集合 $A=\{x\mid x>0\}, B=\{x\mid -1\le x\le 2\}$, 则 $A\cup B=$

(A) $\{x\mid x\ge -1\}$　　(B) $\{x\mid x\le 2\}$

(C) $\{x\mid 0<x\le 2\}$　　(D) $\{x\mid -1\le x\le 2\}$

答案：A

解析：本小题主要考查集合运算。由 $A\cup B=\{x\mid x\ge -1\}$.

(2) 函数 $y=(\sin x+\cos x)^2+1$ 的最小正周期是

（A） $\frac{\pi}{2}$　　（B） π　　（C） $\frac{3\pi}{2}$　　（D） 2π

答案：B

解析：本小题主要考查正弦函数周期的求解。原函数可化为：$y=\sin 2x+2$，故其周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

(3) 已知 a, b 都是实数，那么“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

答案：D

解析：本小题主要考查充要条件相关知识。依题“a>b”既不能推出“a>b”；反之，由“a>b”也不能推出“$a^2>b^2$”。故“$a^2>b^2$”是“a>b”的既不充分也不必要条件。

（4）已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_2=2, a_5=\frac{1}{4}$, 则公比 q=

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) -2　　(C) 2　　(D) $\dfrac{1}{2}$

答案：D

解析：本小题主要考查等比数列通项的性质。由 $a_5=\dfrac{1}{4}=a_2\cdot q^3=2\cdot q^3$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$.

(5) 已知 $a\ge 0, b\ge 0$, 且 $a+b=2$, 则

(A) $ab\le\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab\ge\dfrac{1}{2}$　　(C) $a^2+b^2\ge 2$　　(D) $a^2+b^2\le 3$

答案：C

解析：本小题主要考查不等式的重要不等式知识的运用。由 $a\ge 0, b\ge 0$, 且 $a+b=2$，$\therefore$ $4=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\le 2(a^2+b^2)$，$\therefore$ $a^2+b^2\ge 2$。

(6) 在(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)的展开式中，含 x^4 的项的系数是

（A）-15　　（B）85　　（C）-120　　（D）274

答案：A

解析：本小题主要考查二项式定理展开式具体项系数问题。本题可通过选括号（即 5 个括号中 4 个提供 x，其余 1 个提供常数）的思路来完成。故含 x^4 的项的系数为 $(-1)+(-2)+(-3)+(-4)+(-5)=-15$.

（7）在同一平面直角坐标系中，函数 $y=\cos(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2})(x\in[0,2\pi])$ 的图象和直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数是

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

答案：C

解析：本小题主要考查三角函数图像的性质问题。原函数可化为：$y=\cos(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2})(x\in[0,2\pi])$ $=\sin\dfrac{x}{2}, x\in[0,2\pi]$. 作出原函数图像，截取 $x\in[0,2\pi]$ 部分，其与直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数是 2 个.

（8）若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点到一条准线的距离之比为 3：2，则双曲线的离心率是

（A）3　　　　（B）5　　　　（C）$\sqrt{3}$　　　　（D）$\sqrt{5}$

答案：D

解析：本小题主要考查双曲线的性质及离心率问题。依题不妨取双曲线的右准线 $x=\frac{a^2}{c}$，则左焦点 F_1 到右准线的距离为 $\frac{a^2}{c}+c=\frac{a^2+c^2}{c}$，左焦点 F_1 到右准线的距离为 $c-\frac{a^2}{c}=\frac{c^2-a^2}{c}$，依题 $\frac{\frac{c^2+a^2}{c}}{\frac{c^2-a^2}{c}}=\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}=\frac{3}{2}$, 即 $\frac{c^2}{a^2}=5$，$\therefore$ 双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}.$

（9）对两条不相交的空间直线 a 与 b, 必存在平面 α, 使得

（A）$a\subset\alpha,b\subset\alpha$　　　　（B）$a\subset\alpha,b\parallel\alpha$

（C）$a\perp\alpha,b\perp\alpha$　　　　(D) $a\subset\alpha,b\perp\alpha$

答案：B

解析：本小题主要考查立体几何中线面关系问题。$\because$ 两条不相交的空间直线 a 和 b，$\therefore$ 存在平面 α，使得 $a\subset\alpha,b/\!/\alpha$ 。

(10) 若 $a\geq 0,b\geq 0,$ 且当 $\begin{cases}x\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x+y\leq 1\end{cases}$ 时, 恒有 $ax+by\leq 1$, 则以 a, b 为坐标的点 $P(a, b)$ 所形成的平面区域的面积是

(A) $\frac{1}{2}$　　　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　　　(C) 1　　　　(D) $\frac{\pi}{2}$

答案：C

解析：本小题主要考查线性规划的相关知识。由 $ax+by\leq 1$ 恒成立知，当 $x=0$ 时，$by\leq 1$ 恒成立，$\therefore 0\leq b\leq 1$；同理 $0\leq a\leq 1$，$\therefore$ 以 a ,b 为坐标点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域是一个正方形，所以面积为 1.

第II卷(共100分)

二、填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分。

（11）已知函数$f(x)=x^2+|x-2|$,则$f(1)=$________.

答案：2

解析：本小题主要考查知函数解析式，求函数值问题。代入求解即可。

(12)若$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{3}{5}$,则$\cos 2\theta=$________.

答案：$-\frac{7}{25}$

解析：本小题主要考查诱导公式及二倍角公式的应用。由$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{3}{5}$可知，$\cos\theta=\frac{3}{5}$；而$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\frac{3}{5})^2-1=-\frac{7}{25}$。

(13)已知F_1、F_2为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A$、$B$两点

若$|F_2A|+|F_2B|=12$，则$|AB|=$______________。

答案：8

解析：本小题主要考查椭圆的第一定义的应用。依题直线AB过椭圆的 左焦点F_1,在$\triangle F_2AB$中，

$|F_2A|+|F_2B|+|AB|=4a=20$，又$|F_2A|+|F_2B|=12$，$\therefore |AB|=8$.

（14）在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c。若$(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$,则$\cos A=$__________.

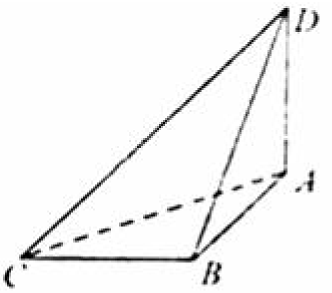
答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：本小题主要考查三角形中正弦定理的应用。依题由正弦定理得：

$(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cdot\cos A=\sin A\cdot\cos C$,即$\sqrt{3}\sin B\cdot\cos A=\sin(A+C)=\sin B$,$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(15)如图，已知球O的面上四点A、B、C、D，$DA\perp$平面ABC。

$AB\perp BC$，$DA=AB=BC=\sqrt{3}$，则球 O 的体积等于_________。



答案： $\dfrac{9\pi}{2}$

解析：本小题主要考查球的内接几何体体积计算问题。其关键是找出球心，从而确定球的半径。由题意，三角形 DAC,三角形 DBC 都是直角三角形，且有公共斜边。所以 DC 边的中点就是球心（到 D、A、C、B 四点距离相等），所以球的半径就是线段 DC 长度的一半。

（16）已知 a 是平面内的单位向量，若向量 b 满足 $b\cdot(a-b)=0$, 则 $|b|$ 的取值范围是____________.

答案：$[0,1]$

解析：本小题主要考查向量的数量积及向量模的相关运算问题。依题 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即

$\vec{b}\cdot\vec{a}-|\vec{b}|^2=0$，$\therefore|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|^2$ 且 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.，又 $\vec{a}$ 为单位向量，$\therefore|\vec{a}|=1$，

$\therefore|\vec{b}|=\cos\theta,\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}].\therefore|\vec{b}|\in[0,1].$

（17）用 1，2，3，4，5，6 组成六位数（没有重复数字），要求任何相邻两个数字的奇偶性不同，且 1 和 2 相邻。这样的六位数的个数是____________（用数字作答）

答案：40

解析：：本小题主要考查排列组合知识。依题先排除 1 和 2 的剩余 4 个元素有 $2A_2^2\cdot A_2^2=8$ 种方案，再向这排好的 4 个元素中插入 1 和 2 捆绑的整体，有 A_5^1 种插法，$\therefore$ 不同的安排方案共有 $2A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_5^1=40$ 种。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 72 分。解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤。

（18）（本题 14 分）

已知数列 $\{x_n\}$ 的首项 $x_1=3$，通项 $x_n=2^n p+np\left(n\in N^*,p,q\text{为常数}\right)$，且成等差数列。求：

（Ⅰ）p,q 的值；

（Ⅱ）数列 $\{x_n\}$ 前 n 项和 S_n 的公式。

答案：本题主要考查等差数列和等比数列的基本知识，考查运算及推理能力。满分 14 分。

（Ⅰ）解：由 $x_1=3,$ 得

$2p+q=3,$

又 $x_4=2^4p+4q, x_5=2^5p+5q,$ 且 $x_1+x_3=2x_4,$ 得 Ⅱ

$3+2^5p+5q=2^5p+8q,$

解得

$p=1, q=1$

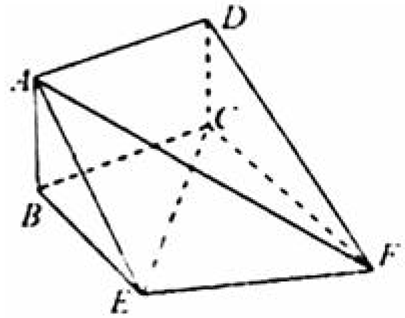
（Ⅱ）解：

$$S_n=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)$$
$$=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}.$$

（19）（本题 14 分）一个袋中装有大小相同的黑球、白球和红球，已知袋中共有 10 个球，从中任意摸出 1 个球，得到黑球的概率是 $\frac{2}{5}$；从中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{7}{9}$. 求：

（Ⅰ）从中任意摸出 2 个球，得到的数是黑球的概率；

（Ⅱ）袋中白球的个数。



答案：. 本题主要考查排列组合、概率等基础知识，同时考查逻辑思维能力和数学应用能力。满分 14 分。

（Ⅰ）解：由题意知，袋中黑球的个数为 $10\times\frac{2}{5}=4.$

记“从袋中任意摸出两个球，得到的都是黑球”为事件 A，则

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}.$$

（Ⅱ）解：记“从袋中任意摸出两个球，至少得到一个白球”为事件 B。

设袋中白球的个数为 x，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{n-1}^2}{C_n^2}=\frac{7}{9},$$

得到　$x=5$

（20）（本题 14 分）如图，矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直，$\angle BCF=\angle CEF=90°$，$AD=\sqrt{3}, EF=2.$

（Ⅰ）求证：$AE//$平面 DCF;

（Ⅱ）当 AB 的长为何值时，二面角 A-EF-C 的大小为 60°？

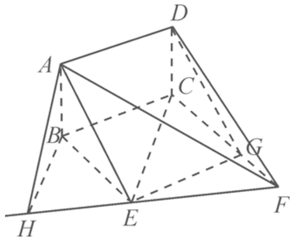
答案：$\boxed{\text{空间本题主要考查空间线面关系向量的概念与运算等基础知识}}$，同时考查空间想象能力和推理运算能力。满分 14 分。

方法一：

（Ⅰ）证明：过点 E 作 $EG\perp CF$ 并 CF 于 G，连结 DG，可得四边形 $BCGE$ 为矩形。又 $ABCD$ 为矩形，

所以 $AD\perp // EG$, 从而四边形 $ADGE$ 为平行四边形，故 $AE// DG$。

因为 $AE\not\subset$ 平面 DCF，$DG\subset$ 平面 DCF，所以 $AE//$ 平面 DCF。



（Ⅱ）解：过点 B 作 $BH\perp EF$ 交 FE 的延长线于 H，连结 AH。

由平面 $ABCD\perp$ 平面 $BEFG$，$AB\perp BC$，得

$AB\perp$ 平面 $BEFC$，

从而 $AH\perp EF$，

所以$\angle AHB$ 为二面角 A-EF-C 的平面角。

在 Rt$\triangle EFG$ 中，因为 $EG=AD=\sqrt{3}, EF=2$, 所以 $\angle CFE=60^\circ, FG=1.$

又因为 $CE\perp EF$，所以 $CF=4$，

从而 $BE=CG=3$。

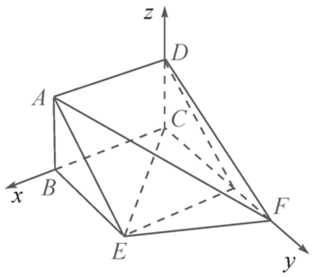
于是 $BH=BE\cdot\sin\angle BEH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

因为 $AB=BH\cdot\tan\angle AHB$,

所以当 AB 为 $\dfrac{9}{2}$ 时，二面角 A-EF-G 的大小为 60°.

方法二：

如图，以点 C 为坐标原点，以 CB、CF 和 CD 分别作为 x 轴、y 轴和 z 轴，建立空间直角坐标系 C-xyz.



设 $AB=a, BE=b, CF=c$,

则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,a), B(\sqrt{3},0,0),$

$E(\sqrt{3},b,0), F(0,c,0).$

（Ⅰ）证明：$\overrightarrow{AE}=(0,b,-a), \overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{BE}=(0,b,0),$

所以 $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AE}=0, \overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{BE}=0,$ 从而 $CB\perp AE, CB\perp BE,$

所以 $CB\perp$ 平面 ABE。

因为 $GB\perp$ 平面 DCF，所以平面 $ABE//$ 平面 DCF

故 $AE//$ 平面 DCF

（II）解：因为 $\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3}, c-b, 0), \overrightarrow{CE}=(\sqrt{3}, b, 0)$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CE}=0.\left|\overrightarrow{EF}\right|=2$，从而

$$\begin{cases}-3+b(c-b)=0,\\ \sqrt{3+(c-b)^2}=2.\end{cases}$$

解得 $b=3$，$c=4$.

所以 $E(\sqrt{3},3,0).\ F(0,4,0)$.

设 $n=(1,y,z)$ 与平面 AEF 垂直，

则　　$\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，

解得　　$n=(1,\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{a})$.

又因为 $BA\perp$ 平面 $BEFC$，$\overrightarrow{BA}=(0,0,a)$，

所以 $\left|\cos<n,\overrightarrow{BA}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot n\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot|n|}=\dfrac{3\sqrt{3}a}{a\sqrt{4a^2+27}}=\dfrac{1}{2}$，

得到　$a=\dfrac{9}{2}$.

所以当 AB 为 $\dfrac{9}{2}$ 时，二面角 $A-EFC$ 的大小为 60°　.

（21）（本题 15 分）已知 a 是实数，函数 $f(x)=x^2\left(x-a\right)$.

（Ⅰ）若 $f'(1)=3$, 求 a 的值及曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间[0，2]上的最大值。

答案：本题主要考查基本性质、导数的应用等基础知识，以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。

（I）解：$f'(x)=3x^2-2ax$.

因为 $f'(\mathrm{I})=3-2a=3$，

所以　　$a=0$．

又当$a=0$时，$f(\mathrm{I})=1, f'(\mathrm{I})=3$，

所以曲线$y=f(x)$在$(1,f(\mathrm{I}))$处的切线方程为　　$3x-y-2=0$.

（II）解：令$f'(x)=0$，解得$x_1=0, x_2=\dfrac{2a}{3}$.

当$\dfrac{2a}{3}\le 0$，即$a\leqslant 0$时，$f(x)$在[0，2]上单调递增，从而

$f_{\max}=f(2)=8-4a$.

当$\dfrac{2a}{3}\ge 2$时，即$a\geqslant 3$时，$f(x)$在[0，2]上单调递减，从而

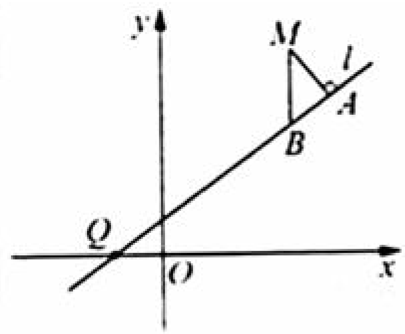
$f_{\max}=f(0)=0$.

当$0<\dfrac{2a}{3}<2$，即$0<a<3$，$f(x)$在$\left[0,\dfrac{2a}{3}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{2a}{3},2\right]$上单调递增，从

而　　$f_{\max}=\begin{cases}8-4a, 0<a\le 2.\\ 0, \quad 2<a<3.\end{cases}$

综上所述，$f_{\max}=\begin{cases}8-4a, & a\le 2.\\ 0, & a>2.\end{cases}$

（22）（本题15分）已知曲线C是到点$P(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8})$和到直线$y=-\dfrac{5}{8}$距离相等的点的轨迹，$l$是过点$Q$（-1，0）的直线，$M$是$C$上（不在$l$上）的动点；$A$、$B$在$l$上，$MA\perp l, MB\perp x$轴（如图）。



（Ⅰ）求曲线C的方程；

（Ⅱ）求出直线l的方程，使得$\dfrac{|QB|^2}{|QA|}$为常数。

答案：本题主要考查求曲线轨迹方程，两条直线的位置关系等基础知识，考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力。满分 15 分。

（I）解：设 $N(x,y)$ 为 C 上的点，则

$$|NP|=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\mathrm{y}-\frac{3}{8})^2}.$$

N 到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 的距离为 $\left|y+\frac{5}{8}\right|$.

由题设得 $\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\mathrm{y}-\frac{3}{8})^2}=\left|y+\frac{5}{8}\right|$.

化简，得曲线 C 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x^2+x)$.

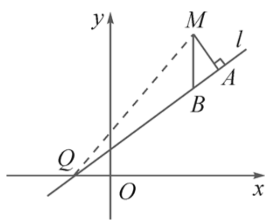
（II）解法一：

设 $M(x,\frac{x^2+x}{2})$，直线 l：$y=kx+k$，则 $B(x,kx+k)$，从而

$$\left|QB\right|=\sqrt{1+k^2}\left|x+1\right|.$$

在 Rt△QMA 中，因为

$$\left|QM\right|=(x+1)^2(1+\frac{x^2}{4}),$$



$$\left|MA\right|=\frac{(x+1)^2(k-\frac{x}{2})^2}{1+k^2}.$$

所以 $\left|QA\right|^2=\left|QM\right|^2-\left|AM\right|^2=\frac{(x+1)^2}{4(1+k^2)}(kx+2)^2$

$$\left|QA\right|=\frac{\left|x+1\right|\cdot\left|kx+2\right|}{2\sqrt{1+k^2}},$$

$$\frac{\left|QB\right|^2}{\left|QA\right|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{\left|k\right|}\cdot\left|\frac{x+1}{x+\frac{2}{k}}\right|$$

当 $k=2$ 时，$\frac{\left|QB\right|^2}{\left|QA\right|}=5\sqrt{5}$

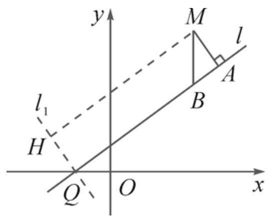
从而所求直线 l 方程为 $2x-y+2=0$

解法二：

设$M(x,\dfrac{x^2+\pi}{2})$，直线直线 l： $y=kx+k$ ，则 $B(x,kx+k)$ ，从而

$$|QB|=\sqrt{1+k^2}\,|x+1|$$

过$(-1,0)$垂直于 l 的直线 l_1： $y=-\dfrac{1}{k}(x+1)$，



因为$|QA|=|MH|$，所以

$$|QA|=\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}},$$

$$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\cdot\left|\frac{x+1}{x+\frac{2}{k}}\right|,$$

当 $k=2$ 时，$\dfrac{|QB|^2}{|QA|}=5\sqrt{5}$，

从而所求直线 l 方程为$2x-y+2=0$