# 2006年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至9页，共150分。考试时间120分钟。考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

**第Ⅰ卷（选择题　共40分）**

注意事项：

1. 答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试卷上。

一、 本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）　在复平面内，复数$\dfrac{1+i}{i}$对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）若$\vec{a}$与$\vec{b}-\vec{c}$都是非零向量，则“$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（3）在$1,2,3,4,5$这五个数字组成的没有重复数字的三位数中，各位数字之和为奇数的共有

（A）36个　　（B）24个

（C）18个　　（D）6个

（4）平面$\alpha$的斜线$AB$交$\alpha$于点$B$，过定点$A$的动直线$l$与$AB$垂直，且交$\alpha$于点$C$，则动点$C$的轨迹是

（A）一条直线　　（B）一个圆

（C）一个椭圆　　（D）双曲线的一支

（5）已知$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, x<1\\ \log_a x, x>1\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的减函数，那么$a$的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,\dfrac{1}{3})$

（C）$[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3})$　　（D）$[\dfrac{1}{7},1)$

（6）在下列四个函数中，满足性质：“对于区间$(1,2)$上的任意$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_2-x_1|$恒成立”的只有

（A）$f(x)=\dfrac{1}{x}$　　（B）$f(x)=|x|$

（C）$f(x)=2^x$　　（D）$f(x)=x^2$

（7）设 $f(n)=2+2^4+2^7+2^{10}+\cdots+2^{3n+10}(n\in N)$，则 $f(n)$ 等于

（A）$\frac{2}{7}(8^n-1)$　　　　（B）$\frac{2}{7}(8^{n+1}-1)$

（C）$\frac{2}{7}(8^{n+3}-1)$　　　　（D）$\frac{2}{7}(8^{n+4}-1)$

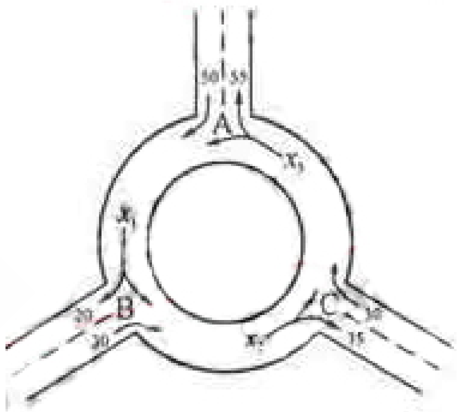
（8）下图为某三岔路口交通环岛的简化模型，在某高峰时段，单位时间进出路口 $A,B,C$ 的机动车辆数如图所示，图中 $x_1,x_2,x_3$ 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数（假设：单位时间内，在上述路段中，同一路段上驶入与驶出的车辆数相等），则 20，30；35，30；55，50

（A）$x_1>x_2>x_3$

（B）$x_1>x_3>x_2$

（C）$x_2>x_3>x_1$

（D）$x_3>x_2>x_1$




## 第Ⅱ卷（共 110 分）

注意事项：

1. 用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二、 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上。

（9）$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ 的值等于________.

（10）在 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x})^7$ 的展开式中，$x^2$ 的系数中________（用数字作答）.

（11）若三点 $A(2,2),B(a,0),C(0,b)(ab\neq 0)$ 共线，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值等于________.

（12）在 $\Delta ABC$ 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，则 $\angle B$ 的大小是________.

（13）已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\le 4\\ y\ge x\\ x\ge 1\end{cases}$，点 $O$ 为坐标原点，那么 $|PO|$ 的最小值等于______，最大值等于________.

（14）已知 $A,B,C$ 三点在球心为 $O$，半径为 $R$ 的球面上，$AC\perp BC$，且 $AB=R$，那么 $A,B$ 两点的球面距离为________，球心到平面 $ABC$ 的距离为

______________.

三、 解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本小题共 12 分）

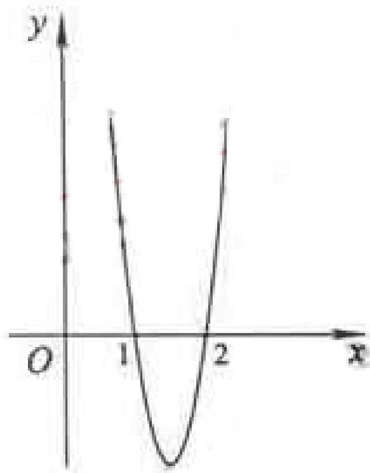
已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{\cos x}$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）设 $\alpha$ 是第四象限的角，且 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求 $f(\alpha)$ 的值.

（16）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 $x_0$ 处取得极大值 $5$，其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$，$(2,0)$，如图所示. 求：




（Ⅰ） $x_0$ 的值；

（Ⅱ） $a,b,c$ 的值.

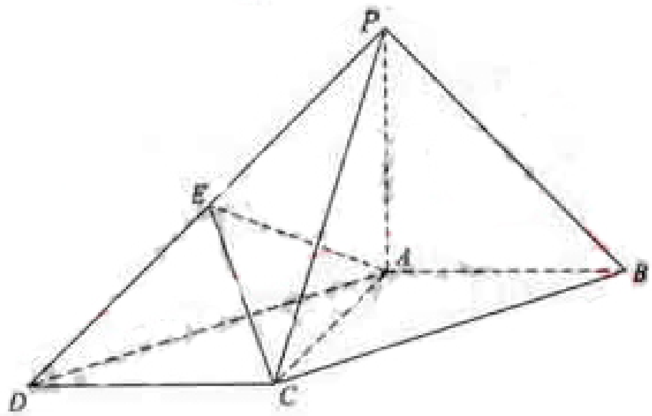
（17）（本小题共 14 分）

如图，在底面为平行四边表的四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB\perp AC$ ， $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=AB$，点 $E$ 是 $PD$ 的中点.

（Ⅰ）求证： $AC\perp PB$；

（Ⅱ）求证： $PB//$ 平面 $AEC$；

（Ⅲ）求二面角 $E-AC-B$ 的大小.




（18）（本小题共 13 分）

某公司招聘员工，指定三门考试课程，有两种考试方案.

方案一：考试三门课程，至少有两门及格为考试通过；

方案二：在三门课程中，随机选取两门，这两门都及格为考试通过.

假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 $a,b,c$，且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

（Ⅰ）分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率；

（Ⅱ）试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小.（说明理由）

（19）（本小题共 14 分）

已知点$M(-2,0),N(2,0)$，动点$P$满足条件$|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$. 记动点$P$的轨迹为$W$.

（Ⅰ）求$W$的方程；

（Ⅱ）若$A,B$是$W$上的不同两点，$O$是坐标原点，求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值.

（20）（本小题共 14 分）

在数列$\{a_n\}$中，若$a_1,a_2$是正整数，且$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|,n=3,4,5,\cdots$，则称$\{a_n\}$为“绝对差数列”.

（Ⅰ）举出一个前五项不为零的“绝对差数列”（只要求写出前十项）；

（Ⅱ）若“绝对差数列”$\{a_n\}$中，$a_{20}=3,a_{21}=0$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n=1,2,3,\cdots$，分别判断当$n\to\infty$时，$a_n$与$b_n$的极限是否存在，如果存在，求出其极限值；

（Ⅲ）证明：任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

## 2006年北京高考理科数学真题参考答案

**一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）**

（1）D　　（2）C　　（3）B　　（4）A

（5）C　　（6）A　　（7）D　　（8）C

**二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）**

（9）$-\dfrac{1}{2}$　　（10）－14

（1）$\dfrac{1}{2}$　　（12）$\dfrac{\pi}{3}$

（13）$\sqrt{2}$　$\sqrt{10}$　　（14）$\dfrac{1}{3}\pi R$　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）**

（15）（共 12 分）

解：（Ⅰ）由 cosx≠0 得 $x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k \in Z)$

故 $f$(x) 的定义域为 $\left\{x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

（Ⅱ）因为 $\tan a=-\dfrac{4}{3}$，且 a 是第四象限的角。

所以 $\sin a=-\dfrac{4}{5}$， $\cos a=\dfrac{3}{5}$

故 $f(a)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin(2a-\dfrac{\pi}{4})}{\cos a}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1-\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2a)}{\cos a}\\
&=\frac{1-\sin 2a+\cos 2a}{\cos a}\\
&=\frac{2\cos^2 a-2\sin a\cos a}{\cos a}\\
&=2(\cos a-\sin a)\\
&=\frac{14}{5}
\end{aligned}
$$

（16）（共 13 分）

**解法一：**

（Ⅰ）由图象可知，在（－∞，1）上 $f'(x)>0$，在（1，2）上 $f'(x)<0$，

在（2，＋∞）上 $f'(x)>0$

故 $f(x)$ 在（－∞，1)，(2，＋∞）上递增，在（1，2）上递减。

因此 $f(x)$ 在 $x$=1 处取得极大值，所以 $x_0=1$。

（Ⅱ） $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

由 $f'(1)=0, f'(2)=0, f(1)=5,$

得$\begin{cases}3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\\a+b+c=5\end{cases}$

解得 $a$=2，$b$= -9，$c$=12

**解法二：**

（Ⅰ）同解法一。

（Ⅱ）设 $f'(x)=m(x-1)(x-2)=mx^2-3mx+2m$

又 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

所以 $a=\frac{m}{3},b=-\frac{3}{2}m,c=2m,$

$f(x)=\frac{m}{3}x^3-\frac{3}{2}mx^2+2mx$

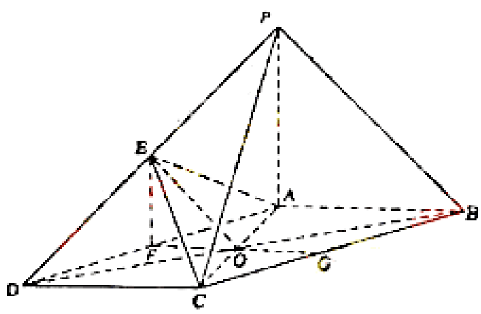
由 $f(1)=5$

即 $\frac{m}{3}-\frac{3}{2}m+2m=5$

得 m=6

所以 a=2，b= -9，c=12

（17）（共 14 分）




**解法一：**

（Ⅰ）∵PA⊥平面 ABCD

∴AB 是 PB 在平面 ABCD 上的射影

又∵AB⊥AC，AC⊂平面 ABCD，

∴AC⊥PB

（Ⅱ）连接 BD，与 AC 相交于 O，连接 EO。

∵ABCD 是平等四边形，

∴O 是 BD 的中点，

又 E 是 PD 的中点，

∴EO∥PB

又 PB⊄平面 AEC，EO⊂平面 AEC，

∴PB∥平面 AEC。

（III）取 BC 中点 G，连接 OG，则点 G 的坐标为$(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)$，$\overrightarrow{OG}=(0,\frac{b}{2},0)$

又 $\overrightarrow{0E}=(0,-\frac{b}{2},\frac{b}{2}),\overrightarrow{AC}=(a,0,0)$

$\therefore\overrightarrow{0E}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{0G}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

∴OE⊥AC，OG⊥AC

∴∠EOG 是二面角 E-AC-B 的平面角。

$\because\cos EOG=\cos<\overrightarrow{0E},\overrightarrow{0G}>=\frac{\overrightarrow{0E}\cdot\overrightarrow{0G}}{\left|\overrightarrow{0E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{0G}\right|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\angle EOG=135^\circ$

∴二面角 $E-AC-B$ 的大小为$135^\circ$

（18）（共 13 分）

解：记该应聘者对三门指定课程考试及格的事件分别为 A，B，C，

则 $P(A)=a,P(B)=b,P(C)=c$

（Ⅰ）应聘者用方案一考试通过的概率

$$\begin{aligned}p_1&=P(A\cdot B\cdot\overline{C})+P(\overline{A}\cdot B\cdot C)+P(A\cdot\overline{B}\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)\\&=ab(1-c)+bc(1-a)+ac(1-b)+abc\\&=ab+bc+ca-2abc\end{aligned}$$

应聘者用方案二考试通过的概率

$$\begin{aligned}p_2&=\frac{1}{3}P(A\cdot B)+\frac{1}{3}P(B\cdot C)+\frac{1}{3}P(A\cdot C)\\&=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

（Ⅱ）因为$a,b,c\in[0,1]$所以

$$p_1-p_2=\frac{2}{3}(ab+bc+ca)-2abc$$
$$=\frac{2}{3}\left[ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b)\right]\ge 0$$
故$p_1\ge p_2$

即采用第一种方案，该应聘者考试通过的概率较大。

（19）（共 14 分）

**解法一：**

（Ⅰ）由$|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$知动点 P 的轨迹是以 M，N 为焦点的双曲线的右支，实半轴长$a=\sqrt{2}$

又半焦距 c=2，故虚半轴长$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$

所以 W 的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,x\ge\sqrt{2}$

（Ⅱ）设 A，B 的坐标分别为（$x_1,y_1$），（$x_2,y_2$）

当$AB\perp x$轴时$,x_1=x_2,y_1=-y_2,$从而$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1^2-y_1^2=2$

当 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，与 W 的方程联立，消去 y 得：

$$(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$$

故$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2},x_1x_2=\frac{m^2+2}{k^2-1}$

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$$
\begin{aligned}
&= x_1x_2 + (kx_1+m)(kx_2+m) \\
&= (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2 \\
&= \frac{(1+k^2)(m^2+2)}{k^2-1} + \frac{2k^2m^2}{1-k^2} + m^2 \\
&= \frac{2k^2+2}{k^2-1} = 2 + \frac{4}{k^2-1}
\end{aligned}
$$

又因为 $x_1x_2 > 0$, 所以 $k^2-1>0$, 从而 $\overrightarrow{0A}\cdot\overrightarrow{0B} > 2$

综上，当 $AB \perp x$ 轴时, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 取得最小值 2。

**解法二：**

（Ⅰ）同解法一。

（Ⅱ）设 A，B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则

$x_i^2 - y_i^2 = (x_i+y_i)(x_i-y_i) = 2(i=1,2)$

令 $s_i = x_i + y_i, t_i = x_i - y_i$

则 $s_it_i = 2$, 且 $s_i > 0, t_i > 0(i=1,2)$，所以

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 \\
&= \frac{1}{4}(s_1+t_1)(s_2+t_2) + \frac{1}{4}(s_1-t_1)(s_2-t_2) \\
&= \frac{1}{2}s_1s_2 + \frac{1}{2}t_1t_2 \geq \sqrt{s_1s_2t_1t_2 = 2}
\end{aligned}
$$

当且仅当 $s_1s_2 = t_1t_2$, 即 $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$ 时，“=”成立

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值是 2。

（20）（共 14 分）

（Ⅰ）解：

$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 0, a_7 = 1, a_8 = 1, a_9 = 0, a_{10} = 1$

（答案不惟一）

（Ⅱ）解：因为绝对差数列$|a_n|$中，$a_{20}=3,a_{21}=0$，所以自第 20 项开始，该数列是

$a_{20}=3,a_{21}=0,a_{22}=3,a_{23}=3,a_{24}=0,a_{25}=3,a_{26}=3,a_{27}=0,\cdots$。

即自第 20 项开始，每三个相邻的项周期地取值 3，0，3，所以当$n\to\infty$时，$a_n$的极限不存在。

当$n\geq 20$时，$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$

（Ⅲ）证明：根据定义，数列$|a_n|$必在有限项后出现零项，证明如下：

假设$|a_n|$中没有零项，由于$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，所以对于任意的 n，都有$a_n\geq 1$，从而当

$a_{n-1}\geq a_{n-2}$时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leq a_{n-1}-1(n\geq 3)$；

当$a_{n-1}<a_{n-2}$时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leq a_{n-1}-1(n\geq 3)$

即$a_n$的值要么比$a_{n-1}$至少小 1，那么比$a_{n-2}$至少小 1。

令$c_n=\begin{cases}a_{2n-1}(a_{2n-1}>a_{2n}),\\ a_{2n}(a_{2n-1}<a_{2n}),\end{cases}n=1,2,3,\cdots,$

则$0<c_n\leq c_{n-1}-1(n=2,3,4,\cdots).$

由于 $c_1$是确定的正整数，这样减少下去，必然存在某项 $c_1$<0，这与 $c_n$>0（n=1, 2, 3, …）矛盾，从而$|a_n|$必有零项。

若第一次出现的零项为第 n 项，记$a_{n-1}=A(A\neq 0)$，则自第 n 项开始，每三个相邻的项周期地取值 0，A，A 即

$$\begin{cases}a_{n+3k}=0,\\ a_{n+3k+1}=A,k=0,1,2,3,\cdots,\\ a_{n+3k+2}=A\end{cases}$$

所以绝对差数列$|a_n|$中有无穷多个零的项。