

2013年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的.

1. （5分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$ ， $B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$ ，则（ ）

- A. $A\cap B=\emptyset$ B. $A\cup B=\mathbb{R}$ C. $B\subseteq A$ D. $A\subseteq B$

【考点】1D：并集及其运算；73：一元二次不等式及其应用.

【专题】59：不等式的解法及应用；5J：集合.

【分析】根据一元二次不等式的解法，求出集合A，再根据的定义求出 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

【解答】解： $\because$ 集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}=\{x|x>2\text{或}x<0\}$ ，

$\therefore A\cap B=\{x|2<x<\sqrt{5}\text{或}-\sqrt{5}<x<0\}$ ， $A\cup B=\mathbb{R}$ ，

故选：B.

【点评】本题考查一元二次不等式的解法，以及并集的定义，属于基础题.

2. （5分）若复数z满足 $(3-4i)z=|4+3i|$ ，则z的虚部为（ ）

- A. -4 B. $-\frac{4}{5}$ C. 4 D. $\frac{4}{5}$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】由题意可得

$z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}$ ，再利用两个复数代数形式的乘除法法则化简为

$\frac{3+4i}{5}$ ，由此可得z的虚部.

【解答】解： $\because$ 复数z满足 $(3-4i)z=|4+3i|$ ， $\therefore z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{25}=\frac{3+4i}{5}$ ，
i，

故 z 的虚部等于 $\frac{4}{5}$,

故选: D.

【点评】 本题主要考查复数的基本概念, 两个复数代数形式的乘除法法则的应用, 属于基础题.

3. (5分) 为了解某地区中小学生的视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大. 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ()

- A. 简单的随机抽样 B. 按性别分层抽样
C. 按学段分层抽样 D. 系统抽样

【考点】 B3: 分层抽样方法.

【专题】 21: 阅读型.

【分析】 若总体由差异明显的几部分组成时, 经常采用分层抽样的方法进行抽样.

【解答】 解: 我们常用的抽样方法有: 简单随机抽样、分层抽样和系统抽样, 而事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大.

了解某地区中小学生的视力情况, 按学段分层抽样, 这种方式具有代表性, 比较合理.

故选: C.

【点评】 本小题考查抽样方法, 主要考查抽样方法, 属基本题.

4. (5分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由离心率和 abc 的关系可得 $b^2=4a^2$ ，而渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$ ，代入可得答案.

【解答】解：由双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)，

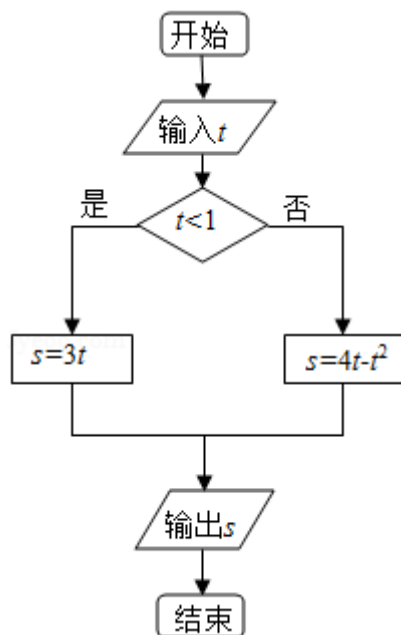
则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，即 $4b^2=a^2$ ，

故渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$ ，

故选：D.

【点评】本题考查双曲线的简单性质，涉及的渐近线方程，属基础题.

5. (5分) 执行程序框图，如果输入的 $t\in[-1, 3]$ ，则输出的 s 属于 ()



- A. $[-3, 4]$ B. $[-5, 2]$ C. $[-4, 3]$ D. $[-2, 5]$

【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；EF：程序框图.

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图.

【分析】本题考查的知识点是程序框图，分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是计算一个分段函数的函数
值，由条件为 $t < 1$ 我们可得，分段函数的分类标准，由分支结构中是否两条
分支上对应的语句行，我们易得函数的解析式.

【解答】解：由判断框中的条件为 $t < 1$ ，可得：

函数分为两段，即 $t < 1$ 与 $t \geq 1$ ，

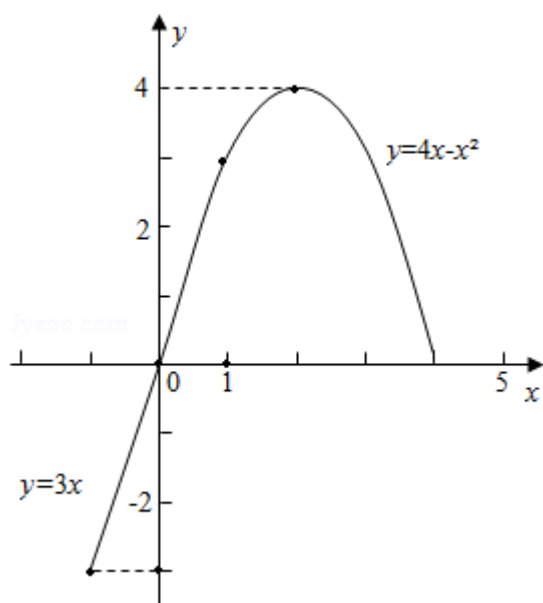
又由满足条件时函数的解析式为： $s = 3t$ ；

不满足条件时，即 $t \geq 1$ 时，函数的解析式为： $s = 4t - t^2$

故分段函数的解析式为： $s = \begin{cases} 3t, & t < 1 \\ 4t - t^2, & t \geq 1 \end{cases}$ ，

如果输入的 $t \in [-1, 3]$ ，画出此分段函数在 $t \in [-1, 3]$ 时的图象，
则输出的 s 属于 $[-3, 4]$.

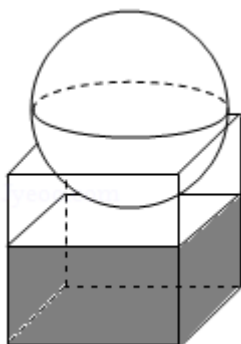
故选：A.



【点评】要求条件结构对应的函数解析式，要分如下几个步骤：①分析流程图
的结构，分析条件结构是如何嵌套的，以确定函数所分的段数；②根据判断
框中的条件，设置分类标准；③根据判断框的“是”与“否”分支对应的操作，
分析函数各段的解析式；④对前面的分类进行总结，写出分段函数的解析式
.

6. （5分）如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高8cm，将

一个球放在容器口，再向容器注水，当球面恰好接触水面时测得水深为6cm，如不计容器的厚度，则球的体积为（ ）



- A. $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$ B. $\frac{866\pi}{3} \text{ cm}^3$ C. $\frac{1372\pi}{3} \text{ cm}^3$ D. $\frac{2048\pi}{3} \text{ cm}^3$

【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】设正方体上底面所在平面截球得小圆M，可得圆心M为正方体上底面正方形的中心. 设球的半径为R，根据题意得球心到上底面的距离等于（R - 2）cm，而圆M的半径为4，由球的截面圆性质建立关于R的方程并解出R=5，用球的体积公式即可算出该球的体积.

【解答】解：设正方体上底面所在平面截球得小圆M，

则圆心M为正方体上底面正方形的中心. 如图.

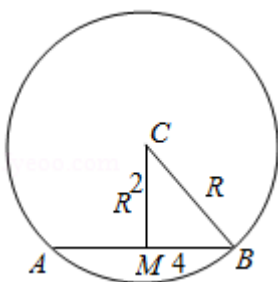
设球的半径为R，根据题意得球心到上底面的距离等于（R - 2）cm，

而圆M的半径为4，由球的截面圆性质，得 $R^2 = (R - 2)^2 + 4^2$ ，

解出R=5，

∴根据球的体积公式，该球的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 5^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$.

故选：A.



【点评】本题给出球与正方体相切的问题，求球的体积，着重考查了正方体的性质、球的截面圆性质和球的体积公式等知识，属于中档题.

7. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_{m-1} = -2$ ， $S_m = 0$ ， $S_{m+1} = 3$ ，则 $m =$ ()
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】由 a_n 与 S_n 的关系可求得 a_{m+1} 与 a_m ，进而得到公差 d ，由前 n 项和公式及 $S_m = 0$ 可求得 a_1 ，再由通项公式及 $a_m = 2$ 可得 m 值.

【解答】解： $a_m = S_m - S_{m-1} = 2$ ， $a_{m+1} = S_{m+1} - S_m = 3$ ，

所以公差 $d = a_{m+1} - a_m = 1$ ，

$$S_m = \frac{m(a_1 + a_m)}{2} = 0,$$

$m - 1 > 0$ ， $m > 1$ ，因此 m 不能为0，

得 $a_1 = -2$ ，

所以 $a_m = -2 + (m - 1) \cdot 1 = 2$ ，解得 $m = 5$ ，

另解：等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，即有数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 成等差数列，

则 $\frac{S_{m-1}}{m-1}$ ， $\frac{S_m}{m}$ ， $\frac{S_{m+1}}{m+1}$ 成等差数列，

可得 $2 \cdot \frac{S_m}{m} = \frac{S_{m-1}}{m-1} + \frac{S_{m+1}}{m+1}$ ，

$$\text{即有 } 0 = \frac{-2}{m-1} + \frac{3}{m+1},$$

解得 $m = 5$.

又一解：由等差数列的求和公式可得 $\frac{1}{2}(m-1)(a_1 + a_{m-1}) = -2$ ，

$$\frac{1}{2}m(a_1 + a_m) = 0, \quad \frac{1}{2}(m+1)(a_1 + a_{m+1}) = 3,$$

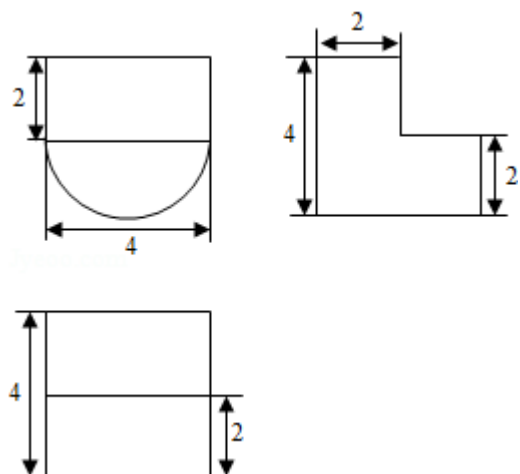
$$\text{可得 } a_1 = -a_m, \quad -2a_m + a_{m+1} + a_{m+1} = \frac{6}{m+1} + \frac{-4}{m-1} = 0,$$

解得 $m = 5$.

故选：C.

【点评】 本题考查等差数列的通项公式、前 n 项和公式及通项 a_n 与 S_n 的关系，考查学生的计算能力.

8. (5分) 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 ()



A. $16+8\pi$

B. $8+8\pi$

C. $16+16\pi$

D. $8+16\pi$

【考点】 L!: 由三视图求面积、体积.

【专题】 16: 压轴题; 27: 图表型.

【分析】 三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合物，依据三视图的数据，得出组合体长、宽、高，即可求出几何体的体积.

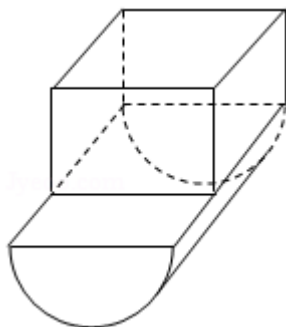
【解答】 解：三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的组合物，如图，其中长方体长、宽、高分别是：4，2，2，半个圆柱的底面半径为2，母线长为4.

$\therefore$ 长方体的体积 $=4 \times 2 \times 2=16$,

半个圆柱的体积 $=\frac{1}{2} \times 2^2 \times \pi \times 4=8\pi$

所以这个几何体的体积是 $16+8\pi$;

故选：A.



【点评】 本题考查了几何体的三视图及直观图的画法，三视图与直观图的关系，柱体体积计算公式，空间想象能力

9. (5分) 设 m 为正整数， $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a ， $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b ，若 $13a=7b$ ，则 $m=$ ()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【考点】 DA：二项式定理.

【专题】 5P：二项式定理.

【分析】 根据二项式系数的性质求得 a 和 b ，再利用组合数的计算公式，解方程 $13a=7b$ 求得 m 的值.

【解答】 解：∵ m 为正整数，由 $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a ，以及二项式系数的性质可得 $a=C_{2m}^m$ ，

同理，由 $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b ，可得 $b=C_{2m+1}^m=C_{2m+1}^{m+1}$.

再由 $13a=7b$ ，可得 $13C_{2m}^m=7C_{2m+1}^m$ ，即 $13 \times \frac{(2m)!}{m! \cdot m!} = 7 \times \frac{(2m+1)!}{m! \cdot (m+1)!}$ ，

即 $13=7 \times \frac{2m+1}{m+1}$ ，即 $13(m+1)=7(2m+1)$ ，解得 $m=6$ ，

故选：B.

【点评】 本题主要考查二项式系数的性质的应用，组合数的计算公式，属于中档题.

10. (5分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$ ，过点 F 的

直线交椭圆 E 于 A 、 B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$ ，则 E 的方程为 (

)

$$A. \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$B. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

$$C. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$$

$$D. \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

【考点】K3：椭圆的标准方程.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】设A (x₁, y₁) , B (x₂, y₂) , 代入椭圆方程得
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$
 , 利用“点

差法”可得 $\frac{x_1+x_2}{a^2} + \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y_1+y_2}{b^2} = 0$. 利用中点坐标公式可得x₁+x₂=2, y₁+y₂

= - 2, 利用斜率计算公式可得 $k_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{-1-0}{1-3} = \frac{1}{2}$. 于是得到

$\frac{2}{a^2} + \frac{1}{2} \times \frac{-2}{b^2} = 0$, 化为a²=2b², 再利用c=3= $\sqrt{a^2-b^2}$, 即可解得a², b². 进而得到椭圆的方程.

【解答】解：设A (x₁, y₁) , B (x₂, y₂) ,

代入椭圆方程得
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$
 ,

相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2-y_2^2}{b^2} = 0$,

$\therefore \frac{x_1+x_2}{a^2} + \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y_1+y_2}{b^2} = 0$.

$\because x_1+x_2=2, y_1+y_2=-2, k_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{-1-0}{1-3} = \frac{1}{2}$.

$$\therefore \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2} \times \frac{-2}{b^2} = 0,$$

化为 $a^2=2b^2$ ，又 $c=3=\sqrt{a^2-b^2}$ ，解得 $a^2=18$ ， $b^2=9$ 。

$\therefore$ 椭圆E的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

故选：D。

【点评】熟练掌握“点差法”和中点坐标公式、斜率的计算公式是解题的关键。

11. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，若 $|f(x)| \geq ax$ ，则a的取值范围是 ()

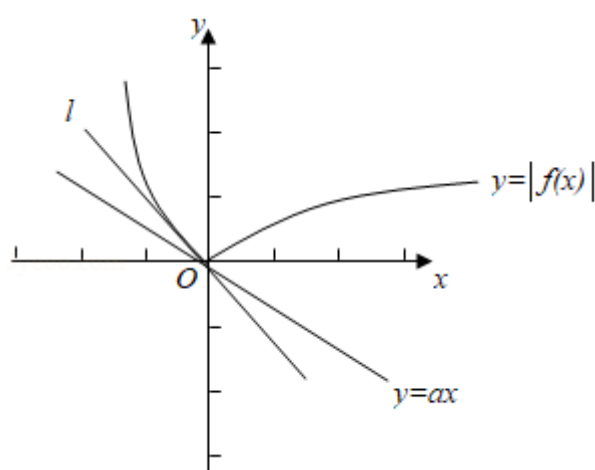
- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-2, 0]$

【考点】7E：其他不等式的解法。

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用。

【分析】由函数图象的变换，结合基本初等函数的图象可作出函数 $y=|f(x)|$ 的图象，和函数 $y=ax$ 的图象，由导数求切线斜率可得l的斜率，进而数形结合可得a的范围。

【解答】解：由题意可作出函数 $y=|f(x)|$ 的图象，和函数 $y=ax$ 的图象，



由图象可知：函数 $y=ax$ 的图象为过原点的直线，当直线介于l和x轴之间符合题意，直线l为曲线的切线，且此时函数 $y=|f(x)|$ 在第二象限的部分解析式为 $y=-x^2-2x$ ，

求其导数可得 $y'=2x-2$ ，因为 $x\leq 0$ ，故 $y'\leq -2$ ，故直线 l 的斜率为 -2 ，

故只需直线 $y=ax$ 的斜率 a 介于 -2 与 0 之间即可，即 $a\in[-2, 0]$

故选：D.

【点评】本题考查其它不等式的解法，数形结合是解决问题的关键，属中档题

12. (5分) 设 $\triangle A_n B_n C_n$ 的三边长分别为 a_n, b_n, c_n ， $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 S_n ， $n=1, 2, 3, \dots$ 若 $b_1 > c_1$ ， $b_1 + c_1 = 2a_1$ ， $a_{n+1} = a_n$ ， $b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$ ， $c_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$ ，则 ()

A. $\{S_n\}$ 为递减数列

B. $\{S_n\}$ 为递增数列

C. $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列， $\{S_{2n}\}$ 为递减数列

D. $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列， $\{S_{2n}\}$ 为递增数列

【考点】82：数列的函数特性；8H：数列递推式.

【专题】16：压轴题；54：等差数列与等比数列；55：点列、递归数列与数学归纳法.

【分析】由 $a_{n+1} = a_n$ 可知 $\triangle A_n B_n C_n$ 的边 $B_n C_n$ 为定值 a_1 ，由 $b_{n+1} + c_{n+1} - 2a_1 =$

$\frac{1}{2}(b_n + c_n - 2a_1)$ 及 $b_1 + c_1 = 2a_1$ 得 $b_n + c_n = 2a_1$ ，则在 $\triangle A_n B_n C_n$ 中边长 $B_n C_n = a_1$ 为定值

，另两边 $A_n C_n$ 、 $A_n B_n$ 的长度之和 $b_n + c_n = 2a_1$ 为定值，

由此可知顶点 A_n 在以 B_n 、 C_n 为焦点的椭圆上，根据 $b_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{2}(b_n - c_n)$ ，得 b_n

$- c_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}(b_1 - c_1)$ ，可知 $n \rightarrow +\infty$ 时 $b_n \rightarrow c_n$ ，据此可判断 $\triangle A_n B_n C_n$ 的边 $B_n C_n$

的高 h_n 随着 n 的增大而增大，再由三角形面积公式可得到答案.

【解答】解： $b_1 = 2a_1 - c_1$ 且 $b_1 > c_1$ ， $\therefore 2a_1 - c_1 > c_1$ ， $\therefore a_1 > c_1$ ，

$\therefore b_1 - a_1 = 2a_1 - c_1 - a_1 = a_1 - c_1 > 0$ ， $\therefore b_1 > a_1 > c_1$ ，

又 $b_1 - c_1 < a_1$ ， $\therefore 2a_1 - c_1 - c_1 < a_1$ ， $\therefore 2c_1 > a_1$ ， $\therefore c_1 > \frac{a_1}{2}$ ，

由题意， $b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} + a_n$ ， $\therefore b_{n+1} + c_{n+1} - 2a_n = \frac{1}{2}(b_n + c_n - 2a_n)$ ，

$$\therefore b_n + c_n - 2a_n = 0, \therefore b_n + c_n = 2a_n = 2a_1, \therefore b_n + c_n = 2a_1,$$

由此可知顶点 A_n 在以 B_n 、 C_n 为焦点的椭圆上，

$$\text{又由题意, } b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{c_n - b_n}{2}, \therefore b_{n+1} - (2a_1 - b_{n+1}) = \frac{2a_1 - b_n - b_n}{2} = a_1 - b_n,$$

$$\therefore b_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_n), \therefore b_n - a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore b_n = a_1 + (b_1 - a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, c_n = 2a_1 - b_n = a_1 - (b_1 - a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore S_n^2 = \frac{3a_1}{2} \left(\frac{3a_1}{2} - a_1\right) \left[\frac{3a_1}{2} - a_1 - (b_1 - a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \left[\frac{3a_1}{2} - a_1 + (b_1 - a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{3}{4} a_1^2 \left[\frac{a_1^2}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (b_1 - a_1)^2\right] \text{单调递增 (可证当 } n=1 \text{ 时 } \frac{a_1^2}{4} - (b_1 - a_1)^2 > 0)$$

$$\text{)} \\ \text{故选: B.}$$

【点评】 本题主要考查由数列递推式求数列通项、三角形面积海伦公式，综合考查学生分析解决问题的能力，有较高的思维抽象度，是本年度全国高考试题中的“亮点”之一。

二.填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13. (5分) 已知两个单位向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ， $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$. 若 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，则 $t = \underline{2}$.

【考点】 9H：平面向量的基本定理；9O：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 5A：平面向量及应用.

【分析】 由于 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，对式子 $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 两边与 $\vec{b}$ 作数量积可得

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)\vec{b}^2 = 0, \text{ 经过化简即可得出.}$$

【解答】 解： $\because \vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}, \vec{c} \cdot \vec{b} = 0, \therefore \vec{c} \cdot \vec{b} = t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)\vec{b}^2 = 0,$

$$\therefore t\cos 60^\circ + 1 - t = 0, \therefore 1 - \frac{1}{2}t = 0, \text{ 解得 } t = 2.$$

故答案为2.

【点评】熟练掌握向量的数量积运算是解题的关键.

14. (5分) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \underline{\underline{(-2)^{n-1}}}$.

【考点】88: 等比数列的通项公式.

【专题】54: 等差数列与等比数列.

【分析】把 $n=1$ 代入已知式子可得数列的首项, 由 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, 可得数列为等比数列, 且公比为 -2 , 代入等比数列的通项公式分段可得答案.

【解答】解: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}$, 解得 $a_1 = 1$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}) - (\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}a_{n-1}$,

整理可得 $\frac{1}{3}a_n = -\frac{2}{3}a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -2$,

故数列 $\{a_n\}$ 从第二项开始是以 -2 为首项, -2 为公比的等比数列,

故当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}$,

经验证当 $n=1$ 时, 上式也适合,

故答案为: $(-2)^{n-1}$

【点评】本题考查等比数列的通项公式, 涉及等比数列的判定, 属基础题.

15. (5分) 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta = \underline{\underline{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$.

【考点】GP: 两角和与差的三角函数; H4: 正弦函数的定义域和值域.

【专题】16: 压轴题; 56: 三角函数的求值.

【分析】 $f(x)$ 解析式提取 $\sqrt{5}$, 利用两角和与差的正弦函数公式化为一个角的正弦函数, 由 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 得到 $\sin\theta - 2\cos\theta = \sqrt{5}$, 与 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 联立即可求出 $\cos\theta$ 的值.

【解答】解: $f(x) = \sin x - 2\cos x = \sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x) = \sqrt{5}\sin(x - \alpha)$ (

其中 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$),

$\therefore x=\theta$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值,

$\therefore \sin(\theta - \alpha) = 1$, 即 $\sin\theta - 2\cos\theta = \sqrt{5}$,

又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

联立得 $(2\cos\theta + \sqrt{5})^2 + \cos^2\theta = 1$, 解得 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】此题考查了两角和与差的正弦函数公式, 同角三角函数间的基本关系, 以及正弦函数的定义域与值域, 熟练掌握公式是解本题的关键.

16. (5分) 若函数 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值为 16.

【考点】57: 函数与方程的综合运用; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题; 51: 函数的性质及应用; 53: 导数的综合应用.

【分析】由题意得 $f(-1) = f(-3) = 0$ 且 $f(1) = f(-5) = 0$, 由此求出 $a=8$ 且 $b=15$, 由此可得 $f(x) = -x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 8x + 15$. 利用导数研究 $f(x)$ 的单调性, 可得 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2 - \sqrt{5})$ 、 $(-2, -2 + \sqrt{5})$ 上是增函数, 在区间 $(-2 - \sqrt{5}, -2)$ 、 $(-2 + \sqrt{5}, +\infty)$ 上是减函数, 结合 $f(-2 - \sqrt{5}) = f(-2 + \sqrt{5}) = 16$, 即可得到 $f(x)$ 的最大值.

【解答】解: $\because$ 函数 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, $\therefore f(-1) = f(-3) = 0$ 且 $f(1) = f(-5) = 0$, 即 $[1 - (-3)^2][(-3)^2 + a(-3) + b] = 0$ 且 $[1 - (-5)^2][(-5)^2 + a(-5) + b] = 0$,

解之得 $\begin{cases} a=8 \\ b=15 \end{cases}$,

因此, $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + 8x + 15) = -x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 8x + 15$,

求导数, 得 $f'(x) = -4x^3 - 24x^2 - 28x + 8$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2 - \sqrt{5}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2 + \sqrt{5}$,

当 $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{5})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-2 - \sqrt{5}, -2)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (-2, -2 + \sqrt{5})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-2 + \sqrt{5}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2 - \sqrt{5})$ 、 $(-2, -2 + \sqrt{5})$ 上是增函数, 在区间 $(-2 - \sqrt{5}, -2)$ 、 $(-2 + \sqrt{5}, +\infty)$ 上是减函数.

又 $\because f(-2 - \sqrt{5}) = f(-2 + \sqrt{5}) = 16$,

$\therefore f(x)$ 的最大值为 16.

故答案为: 16.

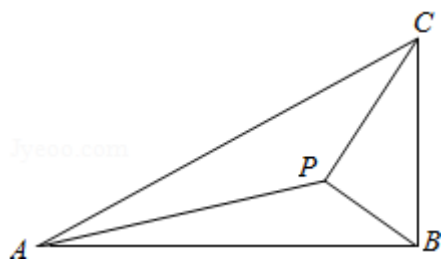
【点评】 本题给出多项式函数的图象关于 $x = -2$ 对称, 求函数的最大值. 着重考查了函数的奇偶性、利用导数研究函数的单调性和函数的最值求法等知识, 属于中档题.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC = 90^\circ$.

(1) 若 $PB = \frac{1}{2}$, 求 PA ;

(2) 若 $\angle APB = 150^\circ$, 求 $\tan \angle PBA$.



【考点】 HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

【专题】 58: 解三角形.

【分析】 (I) 在 $\text{Rt}\triangle PBC$, 利用边角关系即可得到 $\angle PBC = 60^\circ$, 得到 $\angle PBA = 30^\circ$.

在 $\triangle PBA$ 中, 利用余弦定理即可求得 PA .

(II) 设 $\angle PBA = \alpha$, 在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中, 可得 $PB = \sin \alpha$. 在 $\triangle PBA$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{PB}{\sin \angle PAB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ} = \frac{\sin \alpha}{\sin(30^\circ - \alpha)}, \text{ 化简即可求出.}$$

【解答】解：（I）在Rt△PBC中， $\cos \angle PBC = \frac{PB}{BC} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \angle PBC = 60^\circ$ ， $\therefore \angle PBA = 30^\circ$ 。

在△PBA中，由余弦定理得 $PA^2 = PB^2 + AB^2 - 2PB \cdot AB \cos 30^\circ =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{4}.$$

$$\therefore PA = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

（II）设 $\angle PBA = \alpha$ ，在Rt△PBC中， $PB = BC \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ 。

在△PBA中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{PB}{\sin \angle PAB}$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ} = \frac{\sin \alpha}{\sin (30^\circ - \alpha)}$

，

$$\text{化为} \sqrt{3} \cos \alpha = 4 \sin \alpha. \therefore \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

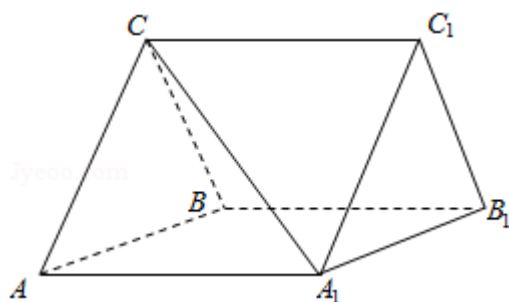
【点评】熟练掌握直角三角形的边角关系、正弦定理和余弦定理是解题的关键

.

18. （12分）如图，三棱柱ABC - A₁B₁C₁中，CA=CB，AB=AA₁， $\angle BAA_1 = 60^\circ$ 。

（I）证明 $AB \perp A_1C$ ；

（II）若平面ABC⊥平面AA₁B₁B，AB=CB=2，求直线A₁C与平面BB₁C₁C所成角的正弦值。



【考点】LW：直线与平面垂直；LY：平面与平面垂直；MI：直线与平面所成的角。

【专题】5F：空间位置关系与距离；5G：空间角。

【分析】（I）取AB的中点O，连接OC，OA₁，A₁B，由已知可证 $OA_1 \perp AB$ ， $AB \perp$ 平面OA₁C，进而可得 $AB \perp A_1C$ ；

（II）易证OA，OA₁，OC两两垂直．以O为坐标原点， $\overrightarrow{OA}$ 的方向为x轴的正向，

$|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长，建立坐标系，可得 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$ 的坐标，设 $\vec{n} = (x, y, z)$

为平面 BB_1C_1C 的法向量，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases}$ ，可解得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$ ，可求 $|\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle|$ ，即为所求正弦值。

【解答】 解：（I）取 AB 的中点 O ，连接 OC , OA_1 , A_1B ，

因为 $CA=CB$ ，所以 $OC \perp AB$ ，由于 $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$ ，

所以 $\triangle AA_1B$ 为等边三角形，所以 $OA_1 \perp AB$ ，

又因为 $OC \cap OA_1 = O$ ，所以 $AB \perp$ 平面 OA_1C ，

又 $A_1C \subset$ 平面 OA_1C ，故 $AB \perp A_1C$ ；

（II）由（I）知 $OC \perp AB$, $OA_1 \perp AB$ ，又平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B ，交线为 AB ，

所以 $OC \perp$ 平面 AA_1B_1B ，故 OA , OA_1 , OC 两两垂直。

以 O 为坐标原点， $\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴的正向， $|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长，建立如图所示的坐标系，

可得 $A(1, 0, 0)$, $A_1(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0, 0)$ ，

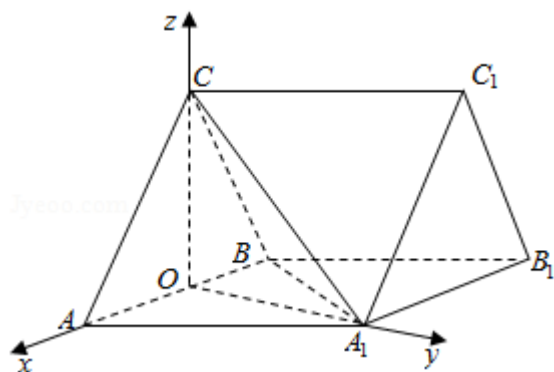
则 $\overrightarrow{BC} = (1, 0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BB_1C_1C 的法向量，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0 \\ -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ ，

可取 $y=1$ ，可得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$ ，故 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，

又因为直线与法向量的余弦值的绝对值等于直线与平面的正弦值，

故直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为： $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。



【点评】 本题考查直线与平面所成的角，涉及直线与平面垂直的性质和平面与

平面垂直的判定，属难题.

19. (12分) 一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取4件作检验，这4件产品中优质品的件数记为 n . 如果 $n=3$ ，再从这批产品中任取4件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 $n=4$ ，再从这批产品中任取1件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，且各件产品是否为优质品相互独立.

(I) 求这批产品通过检验的概率；

(II) 已知每件产品检验费用为100元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为 X (单位：元)，求 X 的分布列及数学期望.

【考点】CG：离散型随机变量及其分布列；CH：离散型随机变量的期望与方差.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】(I) 设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件 A_1 ，第一次取出的4件产品全是优质品为事件 A_2 ，第二次取出的4件产品全是优质品为事件 B_1 ，第二次取出的1件产品是优质品为事件 B_2 ，这批产品通过检验为事件 A ，依题意有 $A = (A_1B_1) \cup (A_2B_2)$ ，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，由概率得加法公式和条件概率，代入数据计算可得；

(II) X 可能的取值为400, 500, 800，分别求其概率，可得分布列，进而可得期望值.

【解答】解：(I) 设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件 A_1 ，第一次取出的4件产品全是优质品为事件 A_2 ，第二次取出的4件产品全是优质品为事件 B_1 ，第二次取出的1件产品是优质品为事件 B_2 ，这批产品通过检验为事件 A ，依题意有 $A = (A_1B_1) \cup (A_2B_2)$ ，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，

所以 $P(A) = P(A_1B_1) + P(A_2B_2) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2)$

$$= \frac{4}{16} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64}$$

(II) X可能的取值为400, 500, 800, 并且 $P(X=800) = \frac{1}{4}$, $P(X=500) = \frac{1}{16}$,

$P(X=400) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$, 故X的分布列如下:

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{故 } EX = 400 \times \frac{11}{16} + 500 \times \frac{1}{16} + 800 \times \frac{1}{4} = 506.25$$

【点评】 本题考查离散型随机变量及其分布列涉及数学期望的求解, 属中档题

20. (12分) 已知圆M: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆N: $(x-1)^2 + y^2 = 9$, 动圆P与圆M外切并与圆N内切, 圆心P的轨迹为曲线C.

(I) 求C的方程;

(II) l是与圆P, 圆M都相切的一条直线, l与曲线C交于A, B两点, 当圆P的半径最长时, 求|AB|.

【考点】 J3: 轨迹方程; J9: 直线与圆的位置关系.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 (I) 设动圆的半径为R, 由已知动圆P与圆M外切并与圆N内切, 可得 $|PM| + |PN| = R + 1 + (3 - R) = 4$, 而 $|NM| = 2$, 由椭圆的定义可知: 动点P的轨迹是以M, N为焦点, 4为长轴长的椭圆, 求出即可;

(II) 设曲线C上任意一点P(x, y), 由于 $|PM| - |PN| = 2R - 2 \leq 4 - 2 = 2$, 所以 $R \leq 2$, 当且仅当⊙P的圆心为(2, 0) $R=2$ 时, 其半径最大, 其方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$. 分①l的倾斜角为 90° , 此时l与y轴重合, 可得|AB|. ②若l的倾斜角不为 90° , 由于⊙M的半径 $1 \neq R$, 可知l与x轴不平行, 设l与x轴的交点为Q, 根据 $\frac{|QP|}{|QM|} = \frac{R}{r_1}$, 可得Q(-4, 0), 所以可设l: $y = k(x+4)$, 与椭圆的方程联立, 得到根与系数的关系利用弦长公式即可得出.

【解答】 解: (I) 由圆M: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, 可知圆心M(-1, 0); 圆N: $(x$

$(x-1)^2+y^2=9$, 圆心N (1, 0), 半径3.

设动圆的半径为R,

∵动圆P与圆M外切并与圆N内切, ∴ $|PM|+|PN|=R+1+(3-R)=4$,

而 $|NM|=2$, 由椭圆的定义可知: 动点P的轨迹是以M, N为焦点, 4为长轴长的椭圆,

∴ $a=2$, $c=1$, $b^2=a^2-c^2=3$.

∴曲线C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ($x \neq -2$).

(II) 设曲线C上任意一点P (x, y),

由于 $|PM|-|PN|=2R-2 \leq 3-1=2$, 所以 $R \leq 2$, 当且仅当⊙P的圆心为(2, 0) $R=2$ 时, 其半径最大, 其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

①l的倾斜角为 90° , 则l与y轴重合, 可得 $|AB|=2\sqrt{3}$.

②若l的倾斜角不为 90° , 由于⊙M的半径 $1 \neq R$, 可知l与x轴不平行,

设l与x轴的交点为Q, 则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$, 可得Q (-4, 0), 所以可设l: $y=k(x+4)$

,

由l与M相切可得: $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, 联立 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$, 得到 $7x^2+8x-8=0$.

∴ $x_1+x_2=-\frac{8}{7}$, $x_1x_2=-\frac{8}{7}$.

∴ $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}\sqrt{(-\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{18}{7}$

由于对称性可知: 当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, 也有 $|AB|=\frac{18}{7}$.

综上所述: $|AB|=2\sqrt{3}$ 或 $\frac{18}{7}$.

【点评】 本题综合考查了两圆的相切关系、直线与圆相切问题、椭圆的定义及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到根与系数的关系、弦长公式等基础知识, 需要较强的推理能力和计算能力及其分类讨论的思想方法.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$, 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$.

(I) 求 a, b, c, d 的值;

(II) 若 $x \geq -2$ 时, $f(x) \leq kg(x)$, 求 k 的取值范围.

【考点】3R: 函数恒成立问题; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】16: 压轴题; 53: 导数的综合应用.

【分析】(I) 对 $f(x)$, $g(x)$ 进行求导, 已知在交点处有相同的切线及曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 从而解出 a, b, c, d 的值;
(II) 由 (I) 得出 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式, 再求出 $F(x)$ 及它的导函数, 通过对 k 的讨论, 判断出 $F(x)$ 的最值, 从而判断出 $f(x) \leq kg(x)$ 恒成立, 从而求出 k 的范围.

【解答】解: (I) 由题意知 $f(0) = 2$, $g(0) = 2$, $f'(0) = 4$, $g'(0) = 4$,
而 $f'(x) = 2x + a$, $g'(x) = e^x(cx + d + c)$, 故 $b = 2$, $d = 2$, $a = 4$, $d + c = 4$,
从而 $a = 4$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 2$;

(II) 由 (I) 知, $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = 2e^x(x + 1)$

设 $F(x) = kg(x) - f(x) = 2ke^x(x + 1) - x^2 - 4x - 2$,

则 $F'(x) = 2ke^x(x + 2) - 2x - 4 = 2(x + 2)(ke^x - 1)$,

由题设得 $F(0) \geq 0$, 即 $k \geq 1$,

令 $F'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\ln k$, $x_2 = -2$,

①若 $1 \leq k < e^2$, 则 $-2 < x_1 \leq 0$, 从而当 $x \in (-2, x_1)$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

即 $F(x)$ 在 $(-2, x_1)$ 上减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上是增, 故 $F(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上的最小值为 $F(x_1)$,

而 $F(x_1) = -x_1(x_1 + 2) \geq 0$, $x \geq -2$ 时 $F(x) \geq 0$, 即 $f(x) \leq kg(x)$ 恒成立.

②若 $k = e^2$, 则 $F'(x) = 2e^2(x + 2)(e^x - e^{-2})$, 从而当 $x \in (-2, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

即 $F(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上是增, 而 $F(-2) = 0$, 故当 $x \geq -2$ 时, $F(x) \geq 0$, 即 $f(x) \leq kg(x)$ 恒成立.

③若 $k > e^2$ 时， $F'(x) > 2e^2(x+2)(e^x - e^{-2})$ ，

而 $F(-2) = -2ke^{-2} + 2 < 0$ ，所以当 $x > -2$ 时， $f(x) \leq kg(x)$ 不恒成立，

综上， k 的取值范围是 $[1, e^2]$ 。

【点评】此题主要考查利用导数研究曲线上某点切线方程，函数恒成立问题，考查分类讨论思想，解题的关键是能够利用导数工具研究函数的性质，此题是一道中档题。

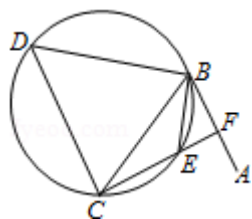
四、请考生在第22、23、24题中任选一道作答，并用2B铅笔将答题卡上所选的题目对应的题号右侧方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分，不涂，按本选考题的首题进行评分。

22. (10分) (选修4-1：几何证明选讲)

如图，直线 AB 为圆的切线，切点为 B ，点 C 在圆上， $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E ， DB 垂直 BE 交圆于 D 。

(I) 证明： $DB=DC$ ；

(II) 设圆的半径为1， $BC=\sqrt{3}$ ，延长 CE 交 AB 于点 F ，求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径。



【考点】NC：与圆有关的比例线段。

【专题】5B：直线与圆。

【分析】(I) 连接 DE 交 BC 于点 G ，由弦切角定理可得 $\angle ABE = \angle BCE$ ，由已知角平分线可得 $\angle ABE = \angle CBE$ ，于是得到 $\angle CBE = \angle BCE$ ， $BE = CE$ 。由已知 $DB \perp BE$ ，可知 D 、 E 为 $\odot O$ 的直径， $Rt\triangle DBE \cong Rt\triangle DCE$ ，利用三角形全等的性质即可得到 $DC = DB$ 。

(II) 由(I)可知： DG 是 BC 的垂直平分线，即可得到 $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。设 DE 的中点为 O ，连接 BO ，可得 $\angle BOG = 60^\circ$ 。从而 $\angle ABE = \angle BCE = \angle CBE = 30^\circ$ 。得到 $CF \perp BF$ 。进而得到 $Rt\triangle BCF$ 的外接圆的半径 $= \frac{1}{2}BC$ 。

【解答】(I) 证明：连接DE交BC于点G.

由弦切角定理可得 $\angle ABE = \angle BCE$ ，而 $\angle ABE = \angle CBE$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle BCE$ ， $BE = CE$.

又 $\because DB \perp BE$ ， $\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的直径， $\angle DCE = 90^\circ$.

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCE$ ， $\therefore DC = DB$.

(II) 由(I)可知： $\angle CDE = \angle BDE$ ， $DB = DC$.

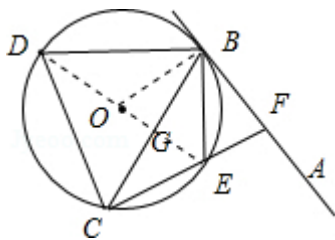
故DG是BC的垂直平分线， $\therefore BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

设DE的中点为O，连接BO，则 $\angle BOG = 60^\circ$.

从而 $\angle ABE = \angle BCE = \angle CBE = 30^\circ$.

$\therefore CF \perp BF$.

$\therefore \text{Rt}\triangle BCF$ 的外接圆的半径 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点评】 本题综合考查了圆的性质、弦切角定理、等边三角形的性质、三角形全等、三角形的外接圆的半径等知识，需要较强的推理能力、分析问题和解决问题的能力.

23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点， x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$.

(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；

(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$).

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程； QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】 11: 计算题； 35: 转化思想； 4R: 转化法； 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) 曲线 C_1 的参数方程消去参数 t ，得到普通方程，再由 $\begin{cases} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{cases}$ ，能求出 C_1 的极坐标方程.

(2) 曲线 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程, 与 C_1 的普通方程联立, 求出 C_1 与 C_2 交点的直角坐标, 由此能求出 C_1 与 C_2 交点的极坐标.

【解答】解: (1) 将 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$, 消去参数 t , 化为普通方程 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$,

即 $C_1: x^2+y^2-8x-10y+16=0$,

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$,

得 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

(2) $\because$ 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$,

联立 $\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+16=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$,

$\therefore C_1$ 与 C_2 交点的极坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 和 $(2, \frac{\pi}{2})$.

【点评】 本题考查曲线极坐标方程的求法, 考查两曲线交点的极坐标的求法, 考查极坐标方程、直角坐标方程、参数方程的互化等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查化归与转化思想、函数与方程思想, 是中档题.

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.

(I) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;

(II) 设 $a>-1$, 且当 $x\in[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x)\leq g(x)$, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【分析】 (I) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$. 设 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$, 画出函数 y 的图象, 数形结合可得结论.

(II) 不等式化即

$1+a \leq x+3$, 故 $x \geq a-2$ 对 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 都成立, 分析可得 $-\frac{a}{2} \geq a-2$, 由此解得 a 的取值范围.

【解答】 解: (I) 当 $a = -2$ 时, 求不等式 $f(x) < g(x)$ 化为 $|2x-1| + |2x-2| - x - 3 < 0$.

设 $y = |2x-1| + |2x-2| - x - 3$, 则 $y = \begin{cases} -5x, & x < \frac{1}{2} \\ -x-2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x-6, & x > 1 \end{cases}$, 它的图象如图所示:

结合图象可得, $y < 0$ 的解集为 $(0, 2)$, 故原不等式的解集为 $(0, 2)$.

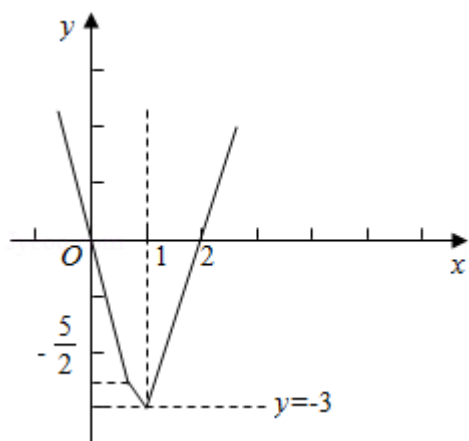
(II) 设 $a > -1$, 且当 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x) = 1+a$, 不等式化为 $1+a \leq x+3$,

故 $x \geq a-2$ 对 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 都成立.

故 $-\frac{a}{2} \geq a-2$,

解得 $a \leq \frac{4}{3}$,

故 a 的取值范围为 $(-1, \frac{4}{3}]$.



【点评】 本题考查绝对值不等式的解法与绝对值不等式的性质, 关键是利用零点分段讨论法分析函数的解析式.