

2010年普通高等学校招生全国统一考试 数学（理）

第I卷 选择题（共40分）

一、本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的4个选项中，选出符合题目要求的一项。

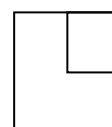
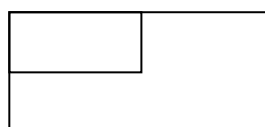
1, 集合 $P = \{x \in Z | 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in R | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M =$

- (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{0, 1, 2\}$ (C) $\{x | 0 \leq x < 3\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

2, 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公比 $|q| \neq 1$. 若 $a_m = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 则 $m =$

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

3, 一个长方体去掉一个小长方体, 所得集合体的正(主)视图与侧(左)视图分别如右图所示, 则该几何体的俯视图为



正(主)视

侧(左)视

- (A) (B) (C) (D)

4, 8名学生和2位老师站成一排合影, 2位老师不相邻的排法总数为

- (A) $A_8^8 A_9^2$ (B) $A_8^8 C_9^2$ (C) $A_8^8 A_7^2$ (D) $A_8^8 C_9^2$

5, 极坐标方程 $(\rho - 1)(\theta - \pi) = 0 (\rho \geq 0)$ 表示的图形是

- (A) 两个圆 (B) 两条直线
(C) 一个圆和一条射线 (D) 一条直线和一条射线

6, \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 是 “函数 $f(x) = (x\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{b} - \vec{a})$ 为一次函数” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7, 设不等式组 $\begin{cases} x + y - 11 \geq 0 \\ 3x - y + 3 \geq 0 \\ 5x - 3y + 9 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为D, 若指数函数 $y = a^x$ 的图象上存在

区域D上的点，则 a 的取值范围是

- (A) (1,3] (B) [2,3] (C) (1,2] (D) [3,+∞)

8. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱

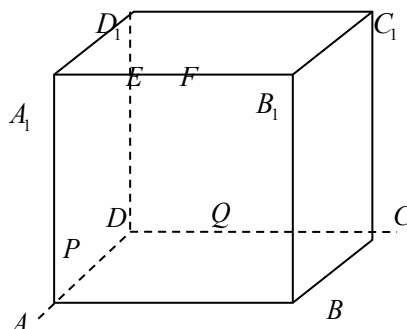
长为2，动点E, F在棱 A_1B_1 上，动点P, Q

分别在棱 AD, CD 上，若

$EF=1, A_1E=x, DQ=y, DP=z$ (x, y, z 大

于零)，则四面体 $PEFQ$ 的体积

- (A) 与 x, y, z 都有关
 (B) 与 x 有关，与 y, z 无关
 (C) 与 y 有关，与 x, z 无关
 (D) 与 z 有关，与 x, y 无关



第II卷 (共110分)

二、 填空题：本大题共6小题，每题5分，共30分。

9. 在复平面内，复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为_____

10. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=1, c=\sqrt{3}, \angle C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $a =$ _____

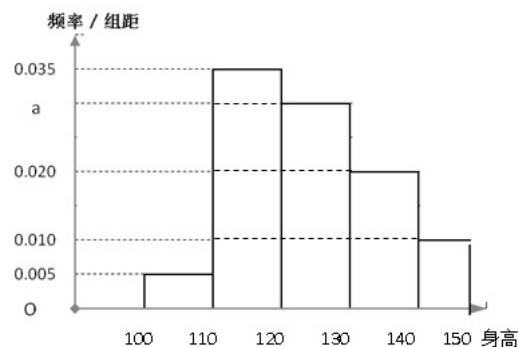
11. 从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图），由图

中数据可知 $a =$ _____ .若要从身高在

$[120,130), [130,140), [140,150)$ 三组内的学生中，用分层

抽样的方法选取18人参加一项活动，则从身高在

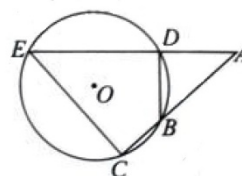
$[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为_____.



12. 如图， $\odot O$ 的弦 ED, CB 的延长线交于点A，若

$BD \perp AE, AB=4, BC=2, AD=3$ ，则 $DE =$ _____；

$CE =$ _____



13, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为2, 焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为_____; 渐近线方程为_____.

14, 如图放置的边长为1的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动,

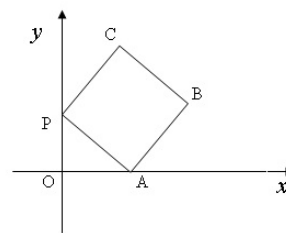
设顶点 $P(x, y)$ 的轨迹方程是 $y = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的

最小正周期为_____; $y = f(x)$ 在其两个相邻零点间的

图象与 x 轴所围区域的面积为_____.

说明: “正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动” 包括沿 x 轴正方向

和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 沿 x 轴负方向滚动.



三、 解答题。本大题共6小题, 共80分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

15, (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x$,

(I) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16, (本小题共14分)

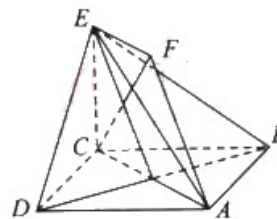
如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $CE \perp AC$, $EF \parallel AC$,

$AB = \sqrt{2}, CE = EF = 1$.

(1) 求证: $AF \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 求证: $CF \perp$ 平面 BDE ;

(3) 求二面角 $A-BE-D$ 的大小.



17, (本小题共13分)

某同学参加3门课程的考试.假设该同学第一门课程取得的优秀成绩的概率为 $\frac{4}{5}$, 第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 $p, q(p > q)$, 且不同课程是否取得优秀成绩相互独立, 记 ξ 为该生取得优秀成绩的课程数, 其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

(1) 求该生至少有1门课程取得优秀成绩的概率;

(2) 求 p, q 的值;

(3) 求数学期望 $E\xi$.

18, (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2 (k \geq 0)$.

(1) 当 $k = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19, (本小题共14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与

BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

(1) 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M, N , 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20, (本小题共13分)

已知集合

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$$

$S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$. 对于, 定义 A 与 B 的差为:

$$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|);$$

$$A \text{ 与 } B \text{ 之间的距离为 } d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

(1) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;

(2) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数;

设 $P \subseteq S_n$, P 中有 $m (m \geq 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$. 证明

$$: \bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$$

参考答案

一、选择题

B C. C. A. C. B. A. D.

二、 $2\sqrt{7}$ 填空题

9, (-1, 1).

10, 1.

$\pi+1$ 11, 0.030, 3

12, 5,

13, $(\pm 4, 0)$, $y = \pm\sqrt{3}x$

14, 4,

三、解答题

$$15 \text{ (I)} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -1 + \frac{3}{4} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

$$f(x) = 2(2\cos^2 x - 1) + (1 - \cos^2 x) - 4\cos x$$

$$= 3\cos^2 x - 4\cos x - 1$$

$$(2) \quad = 3\left(\cos x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}, x \in R$$

因为 $\cos x \in [-1, 1]$, 所以当 $\cos x = -1$ 时, $f(x)$ 取最大值 6; 当 $\cos x = \frac{2}{3}$ 时, 取最小值

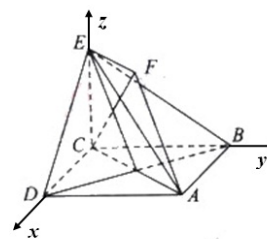
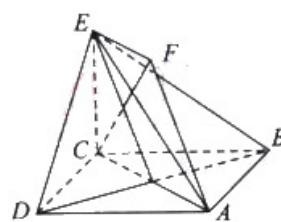
$$-\frac{7}{3}.$$

16

证明: (I) 设 AC 与 BD 交于点 G, 因为 $EF \parallel AG$, 且 $EF = 1$, $AG = \frac{1}{2}AC = 1$, 所以四边形 AGEF 为平行四边形. 所以 $AF \parallel EG$.

因为 $EG \subset$ 平面 BDE, $AF \not\subset$ 平面 BDE, 所以 $AF \parallel$ 平面 BDE.

(II) 因为正方形 ABCD 和四边形 ACEF 所在的平面互相垂直, 且 $CE \perp AC$, 所以 $CE \perp$ 平面 ABCD. 如图, 以 C 为原点, 建立空间直角坐标系 C-xyz. 则 $C(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $D(\sqrt{2}, 0, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. 所以 $\overrightarrow{CF} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $\overrightarrow{BE} = (0, -\sqrt{2}, 1)$, $\overrightarrow{DE} = (-\sqrt{2}, 0, 1)$. 所以 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BE} =$



$0-1+1=0$, $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} = -1 + 0 + 1 = 0$ 。所以 $CF \perp BE$, $CF \perp DE$, 所以 $CF \perp$ 平面 BDE

(III) 由 (II) 知, $\overrightarrow{CF} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, 是平面 BDE 的一个法向量, 设平面 ABE 的

法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ 。

$$\text{即} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (\sqrt{2}, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, -\sqrt{2}, 1) = 0 \end{cases}$$

所以 $x=0$, 且 $z=\sqrt{2}y$ 。令 $y=1$, 则 $z=\sqrt{2}$ 。所以 $n = (0, 1, \sqrt{2})$, 从而 $\cos(\vec{n}, \overrightarrow{CF}) =$

$$\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CF}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因为二面角 $A-BE-D$ 为锐角, 所以二面角 $A-BE-D$ 为 $\frac{\pi}{6}$ 。

17解: 事件 A_i , 表示“该生第 i 门课程取得优异成绩”, $i=1, 2, 3$ 。由题意可知

$$P(A_1) = \frac{4}{5}, P(A_2) = p, P(A_3) = q.$$

(I) 由于事件“该生至少有一门课程取得优异成绩”与事件“ $\xi = 0$ ”是对立的, 所以该生至少有一门课程取得优秀成绩的概率是

$$1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{6}{125} = \frac{119}{125}.$$

(II) 由题意可知,

$$P(\xi = 0) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = \frac{1}{5}(1-p)(1-q) = \frac{6}{125},$$

$$p(\xi = 3) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{4}{5}pq = \frac{24}{125}.$$

$$\text{整理得 } pq = \frac{3}{5}, q = \frac{2}{5}.$$

(III) 由题意知,

$$\begin{aligned} a &= P(\xi = 1) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= \frac{4}{5}(1-p)(1-q) + \frac{1}{5}p(1-q) + \frac{1}{5}(1-p)q \\ &= \frac{37}{125}. \end{aligned}$$

$$b = P(\xi = 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 3) \\ = \frac{58}{125}.$$

$$E\xi = 0 \times P(\xi = 0) + 1 \times P(\xi = 1) + 2 \times P(\xi = 2) + 3 \times P(\xi = 3) \\ = \frac{9}{5}.$$

18解: (I) 当 $k = 2$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + 2x$.

由于 $f(1) = \ln(2), f'(1) = \frac{3}{2}$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

$$y = \ln 2 = \frac{3}{2}(x-1). \text{ 即 } 3x - 2y + 2\ln 2 - 3 = 0$$

(II) $f'(x) = \frac{x(kx+k-1)}{1+x}, x \in (-1, +\infty)$. 当 $k = 0$ 时, $f'(x) = -\frac{x}{1+x}$.

因此在区间 $(-1, 0)$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$;

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$;

当 $0 < k < 1$ 时, $f'(x) = \frac{x(kx+k-1)}{1+x} = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1-k}{k} > 0$;

因此, 在区间 $(-1, 0)$ 和 $(\frac{1-k}{k}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(0, \frac{1-k}{k})$ 上, $f'(x) < 0$;

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(\frac{1-k}{k}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{1-k}{k})$;

当 $k = 1$ 时, $f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. $f(x)$ 的递增区间为 $(-1, +\infty)$

当 $k > 1$ 时, 由 $f'(x) = \frac{x(kx+k-1)}{1+x} = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1-k}{k} \in (-1, 0)$;

因此, 在区间 $(-1, \frac{1-k}{k})$ 和 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 在区间 $(\frac{1-k}{k}, 0)$ 上, $f'(x) < 0$;

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, \frac{1-k}{k})$ 和 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1-k}{k}, 0)$ 。

19, 解: (1) 因点B与 $(-1, 1)$ 关于原点对称, 得B点坐标为 $(1, -1)$ 。

设P点坐标为 (x, y) , 则 $k_{AP} = \frac{y-1}{x+1}, k_{BP} = \frac{y+1}{x-1}$, 由题意得 $\frac{y-1}{x+1} \cdot \frac{y+1}{x-1} = -\frac{1}{3}$,

化简得: $x^2 + 3y^2 = 4, (x \neq \pm 1)$ 。即P点轨迹为: $x^2 + 3y^2 = 4, (x \neq \pm 1)$

(2) 因 $\angle APB = \angle MPN$, 可得 $\sin \angle APB = \sin \angle MPN$,

$$\text{又 } S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}|PA||PB|\sin \angle APB, S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}|PM||PN|\sin \angle MPN,$$

$$\text{若 } S_{\triangle APB} = S_{\triangle MPN}, \text{ 则有 } |PA||PB| = |PM||PN|, \quad \text{即 } \frac{|PA|}{|PM|} = \frac{|PN|}{|PB|}$$

设P点坐标为 (x_0, y_0) , 则有: $\frac{|x_0 + 1|}{|3 - x_0|} = \frac{|3 - x_0|}{|x_0 - 1|}$ 解得: $x_0 = \frac{5}{3}$, 又因 $x_0^2 + 3y_0^2 = 4$, 解得

$$y_0 = \pm \frac{\sqrt{33}}{9}.$$

故存在点P使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等, 此时P点坐标为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{33}}{9}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{33}}{9}\right)$

20.解: (1) 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n), C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in S_n$

因 $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, 故 $|a_i - b_i| \in \{0, 1\}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

即 $A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) \in S_n$

又 $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n.$

当 $c_i = 0$ 时, 有 $||a_i - c_i| - |b_i - c_i|| = |a_i - b_i|;$

当 $c_i = 1$ 时, 有 $||a_i - c_i| - |b_i - c_i|| = |(1 - a_i) - (1 - b_i)| = |a_i - b_i|$

故 $d(A - C, B - C) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = d(A, B)$

(2) 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n), C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in S_n$

记 $d(A, B) = k, d(A, C) = l, d(B, C) = h$

记 $O = (0, 0, \dots, 0) \in S_n$, 由第一问可知:

$$d(A, B) = d(A - A, B - A) = d(O, B - A) = k$$

$$d(A, C) = d(A - A, C - A) = d(O, C - A) = l$$

$$d(B, C) = d(B - A, C - A) = h$$

即 $|b_i - a_i|$ 中1的个数为 k , $|c_i - a_i|$ 中1的个数为 l , $(i = 1, 2, \dots, n)$

设 t 是使 $|b_i - a_i| = |c_i - a_i| = 1$ 成立的 i 的个数, 则有 $h = k + l - 2t$,

由此可知, k, l, h 不可能全为奇数, 即 $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数。

(3) 显然 P 中会产生 C_m^2 个距离, 也就是说 $\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A,B \in P} d(A,B)$, 其中 $\sum_{A,B \in P} d(A,B)$ 表

示 P 中每两个元素距离的总和。

分别考察第 i 个位置, 不妨设 P 中第 i 个位置一共出现了 t_i 个 1 ,

那么自然有 $m-t_i$ 个 0 , 因此在这个位置上所产生的距离总和为 $t_i(m-t_i) \leq \frac{m^2}{4}, (i=1,2,\dots,n)$

,

那么 n 个位置的总和 $\sum_{A,B \in P} d(A,B) = \sum_{i=1}^n t_i(m-t_i) \leq n \cdot \frac{m^2}{4} = \frac{m^2 n}{4}$

即 $\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A,B \in P} d(A,B) \leq \frac{m^2 n}{4C_m^2} = \frac{mn}{2(m-1)}$