

2015年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z}=i$ ，则 $|z|=(\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【考点】A8：复数的模.

【专题】11：计算题；5N：数系的扩充和复数.

【分析】先化简复数，再求模即可.

【解答】解： $\because$ 复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z}=i$,

$$\therefore 1+z=i-z,$$

$$\therefore z(1+i)=i-1,$$

$$\therefore z=\frac{i-1}{i+1}=i,$$

$$\therefore |z|=1,$$

故选：A.

【点评】本题考查复数的运算，考查学生的计算能力，比较基础.

2. （5分） $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】GP：两角和与差的三角函数.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】直接利用诱导公式以及两角和的正弦函数，化简求解即可.

【解答】解： $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ$

$$= \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ$$

$$= \sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}.$$

故选：D.

【点评】本题考查诱导公式以及两角和的正弦函数的应用，基本知识的考查.

3. (5分) 设命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ C. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

【考点】2J: 命题的否定.

【专题】5L: 简易逻辑.

【分析】根据特称命题的否定是全称命题即可得到结论.

【解答】解：命题的否定是： $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$,

故选：C.

【点评】本题主要考查含有量词的命题的否定，比较基础.

4. (5分) 投篮测试中，每人投3次，至少投中2次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为 ()

- A. 0.648 B. 0.432 C. 0.36 D. 0.312

【考点】C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】判断该同学投篮投中是独立重复试验，然后求解概率即可.

【解答】解：由题意可知：同学3次测试满足 $X \sim B(3, 0.6)$,

该同学通过测试的概率为 $C_3^2(0.6)^2 \times (1-0.6) + C_3^3(0.6)^3 = 0.648$.

故选：A.

【点评】本题考查独立重复试验概率的求法，基本知识的考查.

5. (5分) 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的左、右两个焦点, 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围是 ()
- A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ C. $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ D. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用向量的数量积公式, 结合双曲线方程, 即可确定 y_0 的取值范围.

【解答】解: 由题意, $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0) \cdot (\sqrt{3} - x_0, -y_0) = x_0^2 -$

$$3 + y_0^2 = 3y_0^2 - 1 < 0,$$

$$\text{所以 } -\frac{\sqrt{3}}{3} < y_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选: A.

【点评】本题考查向量的数量积公式, 考查双曲线方程, 考查学生的计算能力, 比较基础.

6. (5分) 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为8尺, 米堆的高为5尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知1斛米的体积约为1.62立方尺, 圆周率约为3, 估算出堆放的米约有 ()



A. 14斛

B. 22斛

C. 36斛

D. 66斛

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】根据圆锥的体积公式计算出对应的体积即可.

【解答】解：设圆锥的底面半径为 r ，则 $\frac{\pi}{2}r=8$ ，

解得 $r=\frac{16}{\pi}$ ，

故米堆的体积为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \times 5 \approx \frac{320}{9}$ ，

$\therefore$ 1斛米的体积约为1.62立方，

$\therefore \frac{320}{9} \div 1.62 \approx 22$ ，

故选：B.

【点评】本题主要考查椎体的体积的计算，比较基础.

7. (5分) 设D为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点， $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$ ，则 ()

A. $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【考点】96：平行向量（共线）.

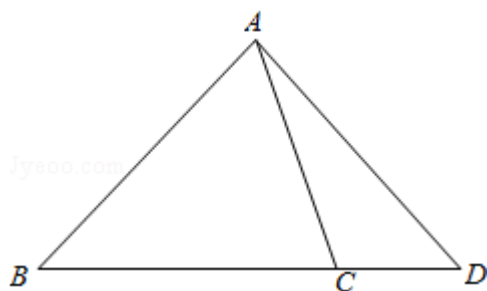
【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】将向量 $\overrightarrow{AD}$ 利用向量的三角形法则首先表示为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ ，然后结合已知表示为 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 的形式.

【解答】解：由已知得到如图

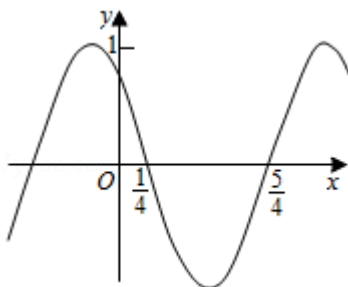
$$\text{由 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC};$$

故选：A.



【点评】本题考查了向量的三角形法则的运用；关键是想法将向量 $\overrightarrow{AD}$ 表示为 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 。

8. (5分) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递



减区间为 ()

A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

【考点】HA：余弦函数的单调性.

【专题】57：三角函数的图像与性质.

【分析】由周期求出 ω ，由五点法作图求出 ϕ ，可得 $f(x)$ 的解析式，再根据余弦函数的单调性，求得 $f(x)$ 的减区间.

【解答】解：由函数 $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ 的部分图象，可得函数的周期为 $\frac{2\pi}{\omega} =$

$$2 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2, \therefore \omega = \pi, f(x) = \cos(\pi x + \phi).$$

再根据函数的图象以及五点法作图，可得 $\frac{\pi}{4} + \phi = \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\phi = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \cos(\pi x + \frac{\pi}{4})$.

$$s(\pi x + \frac{\pi}{4}).$$

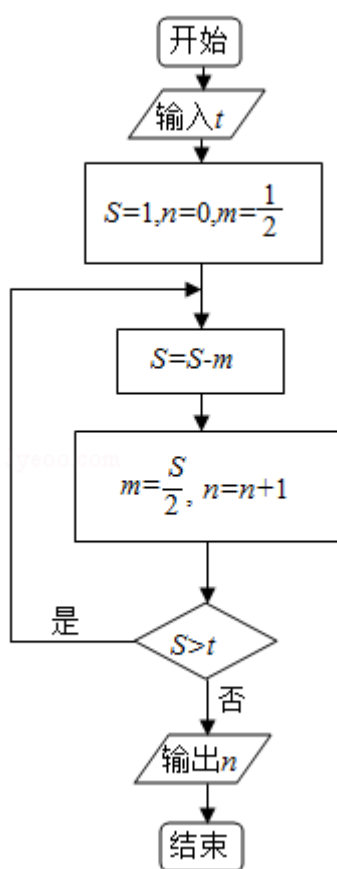
由 $2k\pi \leq \pi x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi$, 求得 $2k - \frac{1}{4} \leq x \leq 2k + \frac{3}{4}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 (

$$2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z},$$

故选：D.

【点评】 本题主要考查由函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象求解析式，由周期求出 ω ，由五点法作图求出 ϕ 的值；还考查了余弦函数的单调性，属于基础题.

9. (5分) 执行如图所示的程序框图，如果输入的 $t=0.01$ ，则输出的 $n=$ ()



A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【考点】 EF：程序框图.

【专题】 5K：算法和程序框图.

【分析】 由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 n 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

【解答】解：第一次执行循环体后， $S=\frac{1}{2}$ ， $m=\frac{1}{4}$ ， $n=1$ ，不满足退出循环的条件

；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{4}$ ， $m=\frac{1}{8}$ ， $n=2$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{8}$ ， $m=\frac{1}{16}$ ， $n=3$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{16}$ ， $m=\frac{1}{32}$ ， $n=4$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{32}$ ， $m=\frac{1}{64}$ ， $n=5$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{64}$ ， $m=\frac{1}{128}$ ， $n=6$ ，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后， $S=\frac{1}{128}$ ， $m=\frac{1}{256}$ ， $n=7$ ，满足退出循环的条件；

故输出的 n 值为7，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答.

10. (5分) $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中， x^5y^2 的系数为 ()

A. 10

B. 20

C. 30

D. 60

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题；5P：二项式定理.

【分析】利用展开式的通项，即可得出结论.

【解答】解： $(x^2+x+y)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r (x^2+x)^{5-r} y^r$,

令 $r=2$ ，则 $(x^2+x)^3$ 的通项为 $C_3^k (x^2)^{3-k} x^k = C_3^k x^{6-k}$,

令 $6-k=5$ ，则 $k=1$ ，

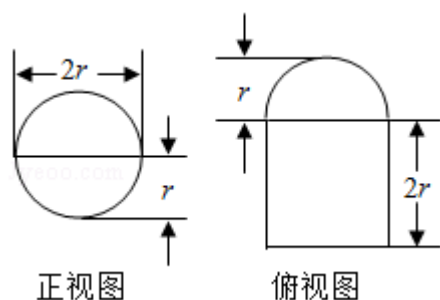
∴ $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中， x^5y^2 的系数为 $C_5^2 C_3^1 = 30$.

故选：C.

【点评】本题考查二项式定理的运用，考查学生的计算能力，确定通项是关键

.

11. (5分) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$ ()



- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【考点】L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】5Q: 立体几何.

【分析】通过三视图可知该几何体是一个半球拼接半个圆柱, 计算即可.

【解答】解: 由几何体三视图中的正视图和俯视图可知,

截圆柱的平面过圆柱的轴线,

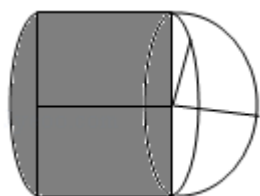
该几何体是一个半球拼接半个圆柱,

$$\therefore \text{其表面积为: } \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \times \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 2r \times 2\pi r + 2r \times 2r + \frac{1}{2} \times \pi r^2 = 5\pi r^2 + 4r^2,$$

又 $\because$ 该几何体的表面积为 $16+20\pi$,

$$\therefore 5\pi r^2 + 4r^2 = 16 + 20\pi, \text{ 解得 } r=2,$$

故选: B.



【点评】本题考查由三视图求表面积问题, 考查空间想象能力, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

12. (5分) 设函数 $f(x) = e^x(2x - 1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x

使得 $f(x_0) < 0$ ，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$ B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

【考点】51：函数的零点；6D：利用导数研究函数的极值.

【专题】2：创新题型；53：导数的综合应用.

【分析】设 $g(x) = e^x(2x - 1)$ ， $y = ax - a$ ，问题转化为存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $y = ax - a$ 的下方，求导数可得函数的极值，数形结合可得 $-a > g(0) = -1$ 且 $g(-1) = -3e^{-1} \geq -a - a$ ，解关于 a 的不等式组可得.

【解答】解：设 $g(x) = e^x(2x - 1)$ ， $y = ax - a$ ，

由题意知存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $y = ax - a$ 的下方，

$$\because g'(x) = e^x(2x - 1) + 2e^x = e^x(2x + 1),$$

$$\therefore \text{当 } x < -\frac{1}{2} \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 当 } x > -\frac{1}{2} \text{ 时, } g'(x) > 0,$$

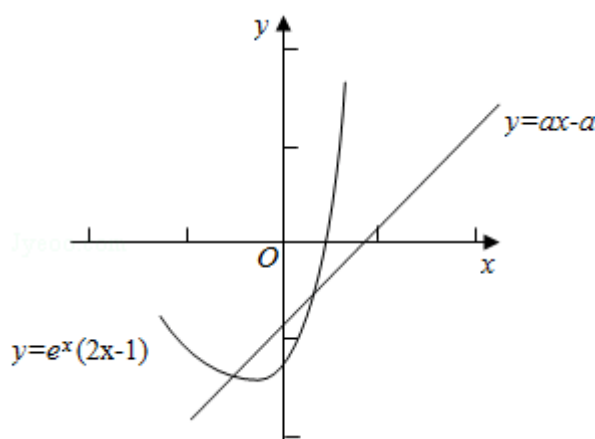
$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) \text{ 取最小值 } -2e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } g(0) = -1, \text{ 当 } x = 1 \text{ 时, } g(1) = e > 0,$$

直线 $y = ax - a$ 恒过定点 $(1, 0)$ 且斜率为 a ，

$$\text{故 } -a > g(0) = -1 \text{ 且 } g(-1) = -3e^{-1} \geq -a - a, \text{ 解得 } \frac{3}{2e} \leq a < 1$$

故选：D.



【点评】本题考查导数和极值，涉及数形结合和转化的思想，属中档题.

二、填空题（本大题共有4小题，每小题5分）

13. (5分) 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a = \underline{1}$.

【考点】3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51: 函数的性质及应用.

【分析】由题意可得, $f(-x) = f(x)$, 代入根据对数的运算性质即可求解.

【解答】解: $\because f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore (-x) \ln(-x + \sqrt{a+x^2}) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2}),$$

$$\therefore -\ln(-x + \sqrt{a+x^2}) = \ln(x + \sqrt{a+x^2}),$$

$$\therefore \ln(-x + \sqrt{a+x^2}) + \ln(x + \sqrt{a+x^2}) = 0,$$

$$\therefore \ln(\sqrt{a+x^2} - x)(\sqrt{a+x^2} + x) = 0,$$

$$\therefore \ln a = 0,$$

$$\therefore a = 1.$$

故答案为: 1.

【点评】本题主要考查了偶函数的定义及对数的运算性质的简单应用, 属于基础试题.

14. (5分) 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点. 且圆心在 x 轴的正半轴上.

则该圆标准方程为 $\underline{(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}}$.

【考点】K3: 椭圆的标准方程.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用椭圆的方程求出顶点坐标, 然后求出圆心坐标, 求出半径即可得到圆的方程.

【解答】解: 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点. 且圆心在 x 轴的正半轴上

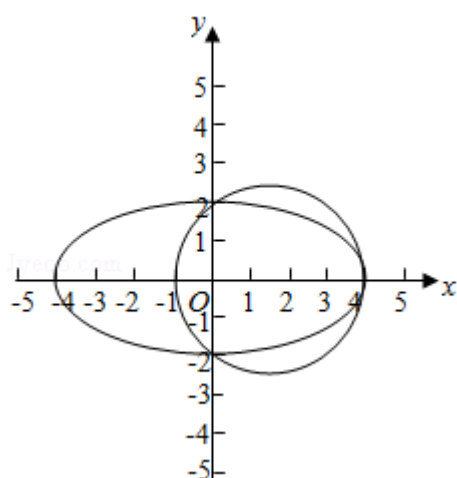
可知椭圆的右顶点坐标 $(4, 0)$ ，上下顶点坐标 $(0, \pm 2)$ ，

设圆的圆心 $(a, 0)$ ，则 $\sqrt{(a-0)^2 + (0-2)^2} = 4-a$ ，解得 $a = \frac{3}{2}$ ，

圆的半径为： $\frac{5}{2}$ ，

所求圆的方程为： $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ 。

故答案为： $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ 。



【点评】 本题考查椭圆的简单性质的应用，圆的方程的求法，考查计算能力．

15. (5分) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 3。

【考点】 7C：简单线性规划．

【专题】 59：不等式的解法及应用．

【分析】 作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合确定 $\frac{y}{x}$ 的最大值．

【解答】 解：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分ABC）．

设 $k = \frac{y}{x}$ ，则 k 的几何意义为区域内的点到原点的斜率，

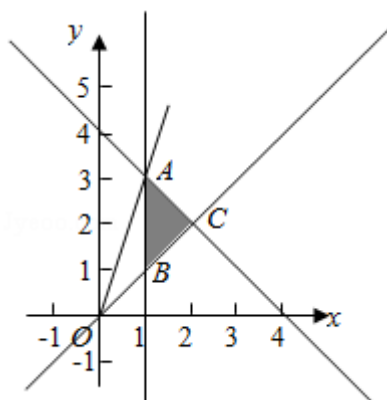
由图象知OA的斜率最大，

由 $\begin{cases} x=1 \\ x+y-4=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ，即A $(1, 3)$ ，

$$k_{OA} = \frac{3}{1} = 3,$$

即 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 3.

故答案为：3.



【点评】 本题主要考查线性规划的应用，结合目标函数的几何意义以及直线的斜率，利用数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

16. (5分) 在平面四边形ABCD中， $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$. $BC = 2$ ，则AB的取值范围是

$(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

【考点】 HT：三角形中的几何计算.

【专题】 15：综合题；2：创新题型；58：解三角形.

【分析】 如图所示，延长BA，CD交于点E，设 $AD = \frac{1}{2}x$ ， $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ， $DE = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x$ ，

$CD = m$ ，求出 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x + m = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ，即可求出AB的取值范围.

【解答】 解：方法一：

如图所示，延长BA，CD交于点E，则

在 $\triangle ADE$ 中， $\angle DAE = 105^\circ$ ， $\angle ADE = 45^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 设 $AD = \frac{1}{2}x$ ， $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ， $DE = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x$ ， $CD = m$ ，

$\because BC = 2$ ，

$\therefore (\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x + m) \sin 15^\circ = 1$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x + m = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ，

$\therefore 0 < x < 4$,

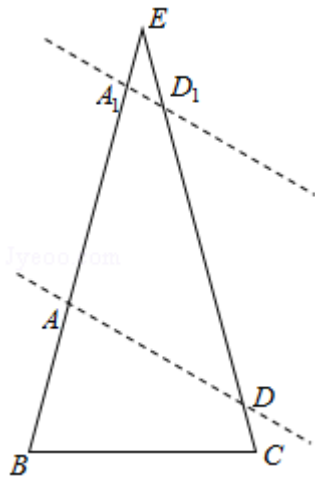
$$\text{而 } AB = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}x + m - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$\therefore AB$ 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

故答案为: $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

方法二:

如下图, 作出底边 $BC=2$ 的等腰三角形 EBC , $B=C=75^\circ$,



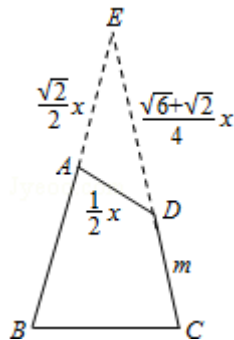
倾斜角为 150° 的直线在平面内移动, 分别交 EB 、 EC 于 A 、 D , 则四边形 $ABCD$ 即为满足题意的四边形;

当直线移动时, 运用极限思想,

① 直线接近点 C 时, AB 趋近最小, 为 $\sqrt{6} - \sqrt{2}$;

② 直线接近点 E 时, AB 趋近最大值, 为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$;

故答案为: $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.



【点评】 本题考查求 AB 的取值范围, 考查三角形中的几何计算, 考查学生的计算能力, 属于中档题.

三、解答题：

17. (12分) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n > 0$ ， $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】(I) 根据数列的递推关系，利用作差法即可求 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(II) 求出 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，利用裂项法即可求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【解答】解：(I) 由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$ ，可知 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$

两式相减得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$ ，

即 $2(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$ ，

$\because a_n > 0$ ， $\therefore a_{n+1} - a_n = 2$ ，

$\because a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3$ ，

$\therefore a_1 = -1$ (舍) 或 $a_1 = 3$ ，

则 $\{a_n\}$ 是首项为3，公差 $d=2$ 的等差数列，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$ ：

(II) $\because a_n = 2n+1$ ，

$\therefore b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$ ，

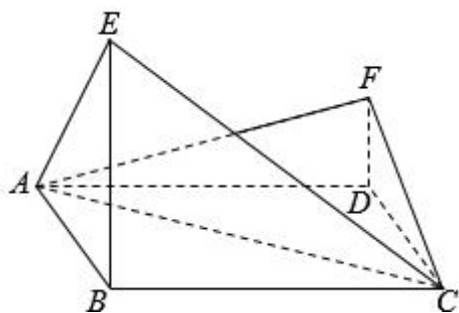
$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{3(2n+3)}$.

【点评】本题主要考查数列的通项公式以及数列求和的计算，利用裂项法是解决本题的关键.

18. (12分) 如图，四边形ABCD为菱形， $\angle ABC = 120^\circ$ ，E，F是平面ABCD同一侧的两点， $BE \perp$ 平面ABCD， $DF \perp$ 平面ABCD， $BE = 2DF$ ， $AE \perp EC$.

(I) 证明：平面AEC $\perp$ 平面AFC

(Ⅱ) 求直线AE与直线CF所成角的余弦值.



【考点】LM: 异面直线及其所成的角; LY: 平面与平面垂直.

【专题】5F: 空间位置关系与距离; 5G: 空间角; 5H: 空间向量及应用.

【分析】(Ⅰ) 连接BD, 设 $BD \cap AC = G$, 连接EG、EF、FG, 运用线面垂直的判定定理得到 $EG \perp$ 平面AFC, 再由面面垂直的判定定理, 即可得到;

(Ⅱ) 以G为坐标原点, 分别以GB, GC为x轴, y轴, $|GB|$ 为单位长度, 建立空间直角坐标系G-xyz, 求得A, E, F, C的坐标, 运用向量的数量积的定义, 计算即可得到所求角的余弦值.

【解答】解: (Ⅰ) 连接BD,

设 $BD \cap AC = G$,

连接EG、EF、FG,

在菱形ABCD中,

不妨设 $BG = 1$,

由 $\angle ABC = 120^\circ$,

可得 $AG = GC = \sqrt{3}$,

$BE \perp$ 平面ABCD, $AB = BC = 2$,

可知 $AE = EC$, 又 $AE \perp EC$,

所以 $EG = \sqrt{3}$, 且 $EG \perp AC$,

在直角 $\triangle EBG$ 中, 可得 $BE = \sqrt{2}$, 故 $DF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

在直角三角形FDG中, 可得 $FG = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

在直角梯形BDFE中, 由 $BD = 2$, $BE = \sqrt{2}$, $FD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $EF = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

,

从而 $EG^2+FG^2=EF^2$ ，则 $EG\perp FG$ ，

（或由 $\tan\angle EGB\cdot\tan\angle FGD=\frac{EB}{BG}\cdot\frac{FD}{DG}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$ ，

可得 $\angle EGB+\angle FGD=90^\circ$ ，则 $EG\perp FG$ ）

$AC\cap FG=G$ ，可得 $EG\perp$ 平面 AFC ，

由 $EG\subset$ 平面 AEC ，所以平面 $AEC\perp$ 平面 AFC ；

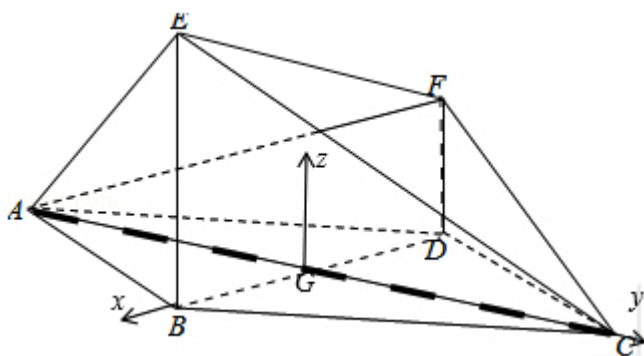
（Ⅱ）如图，以 G 为坐标原点，分别以 GB ， GC 为 x 轴， y 轴， $|GB|$ 为单位长度，建立空间直角坐标系 $G-xyz$ ，由（Ⅰ）可得 $A(0, -\sqrt{3}, 0)$ ， $E(1, 0, \sqrt{2})$

，
 $F(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $C(0, \sqrt{3}, 0)$ ，

即有 $\overrightarrow{AE}=(1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{CF}=(-1, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

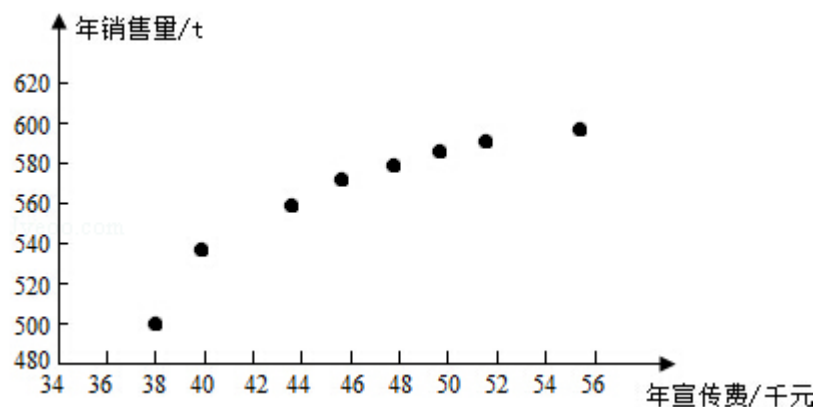
故 $\cos\langle\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{-1-3+1}{\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{9}{2}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．

则有直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．



【点评】 本题考查空间直线和平面的位置关系和空间角的求法，主要考查面面垂直的判定定理和异面直线所成的角的求法：向量法，考查运算能力，属于中档题．

19. （12分）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x （单位：千元）对年销售量 y （单位：t）和年利润 z （单位：千元）的影响，对近8年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i （ $i=1, 2, \dots, 8$ ）数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值．



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

- (I) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
- (II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;
- (III) 已知这种产品的年利润 z 与 x 、 y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (II) 的结果回答下列问题:
- (i) 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- (ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为: $\hat{\beta} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

【考点】BK: 线性回归方程.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】（Ⅰ）根据散点图，即可判断出，

（Ⅱ）先建立中间量 $w=\sqrt{x}$ ，建立 y 关于 w 的线性回归方程，根据公式求出 w ，问题得以解决；

（Ⅲ）（i）年宣传费 $x=49$ 时，代入到回归方程，计算即可，

（ii）求出预报值得方程，根据函数的性质，即可求出．

【解答】解：（Ⅰ）由散点图可以判断， $y=c+d\sqrt{x}$ 适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型；

（Ⅱ）令 $w=\sqrt{x}$ ，先建立 y 关于 w 的线性回归方程，由于 $\hat{d}=\frac{108.8}{1.6}=68$ ，

$$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{w}=563-68\times 6.8=100.6,$$

所以 y 关于 w 的线性回归方程为 $\hat{y}=100.6+68w$ ，

因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$ ，

（Ⅲ）（i）由（Ⅱ）知，当 $x=49$ 时，年销售量 y 的预报值 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6$

，

年利润 z 的预报值 $\hat{z}=576.6\times 0.2-49=66.32$ ，

（ii）根据（Ⅱ）的结果可知，年利润 z 的预报值 $\hat{z}=0.2(100.6+68\sqrt{x})-x=-x+13.6\sqrt{x}+20.12$ ，

当 $\sqrt{x}=\frac{13.6}{2}=6.8$ 时，即当 $x=46.24$ 时，年利润的预报值最大．

【点评】本题主要考查了线性回归方程和散点图的问题，准确的计算是本题的关键，属于中档题．

20. （12分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: y=\frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y=kx+a$ （ $a>0$ ）交于 M ， N 两点．

（Ⅰ）当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程．

（Ⅱ） y 轴上是否存在点 P ，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$ ？（说明理由）

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合．

【分析】(I) 联立 $\begin{cases} y=a \\ y=\frac{x^2}{4} \end{cases}$, 可得交点M, N的坐标, 由曲线C: $y=\frac{x^2}{4}$, 利用导

数的运算法则可得: $y'=\frac{x}{2}$, 利用导数的几何意义、点斜式即可得出切线方程

(II) 存在符合条件的点 $(0, -a)$, 设P $(0, b)$ 满足 $\angle OPM=\angle OPN$. M (x_1, y_1) , N (x_2, y_2) , 直线PM, PN的斜率分别为: k_1, k_2 . 直线方程与抛物线方程联立化为 $x^2 - 4kx - 4a=0$, 利用根与系数的关系、斜率计算公式可得 $k_1+k_2=\frac{k(a+b)}{a}$. $k_1+k_2=0 \Leftrightarrow$ 直线PM, PN的倾斜角互补 $\Leftrightarrow \angle OPM=\angle OPN$. 即可证明.

【解答】解: (I) 联立 $\begin{cases} y=a \\ y=\frac{x^2}{4} \end{cases}$, 不妨取M $(2\sqrt{a}, a)$, N $(-2\sqrt{a}, a)$,

由曲线C: $y=\frac{x^2}{4}$ 可得: $y'=\frac{x}{2}$,

$\therefore$ 曲线C在M点处的切线斜率为 $\frac{2\sqrt{a}}{2}=\sqrt{a}$, 其切线方程为: $y-a=\sqrt{a}(x-2\sqrt{a})$, 化为 $\sqrt{a}x-y-a=0$.

同理可得曲线C在点N处的切线方程为: $\sqrt{a}x+y+a=0$.

(II) 存在符合条件的点 $(0, -a)$, 下面给出证明:

设P $(0, b)$ 满足 $\angle OPM=\angle OPN$. M (x_1, y_1) , N (x_2, y_2) , 直线PM, PN的斜率分别为: k_1, k_2 .

联立 $\begin{cases} y=kx+a \\ y=\frac{x^2}{4} \end{cases}$, 化为 $x^2 - 4kx - 4a=0$,

$\therefore x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4a$.

$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{k(a+b)}{a}$.

当 $b=-a$ 时, $k_1+k_2=0$, 直线PM, PN的倾斜角互补,

$\therefore \angle OPM=\angle OPN$.

$\therefore$ 点P $(0, -a)$ 符合条件.

【点评】本题考查了导数的运算法则、利用导数的几何意义研究切线方程、直

线与抛物线相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、斜率计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$

(i) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(ii) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$), 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【考点】 6E: 利用导数研究函数的最值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 2: 创新题型; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (i) $f'(x) = 3x^2 + a$. 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $P(x_0, 0)$, 则 $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ 解出即可.

(ii) 对 x 分类讨论: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) = -\ln x < 0$, 可得函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} \leq g(x) < 0$, 即可得出零点的个数.

当 $x=1$ 时, 对 a 分类讨论: $a \geq -\frac{5}{4}$, $a < -\frac{5}{4}$, 即可得出零点的个数;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = -\ln x > 0$, 因此只考虑 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的零点个数即可. 对 a 分类讨论: ①当 $a \leq -3$ 或 $a \geq 0$ 时, ②当 $-3 < a < 0$ 时, 利用导数研究其单调性极值即可得出.

【解答】 解: (i) $f'(x) = 3x^2 + a$.

设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $P(x_0, 0)$, 则 $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x_0^3 + ax_0 + \frac{1}{4} = 0 \\ 3x_0^2 + a = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x_0 = \frac{1}{2}, a = -\frac{3}{4}.$$

因此当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(ii) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) = -\ln x < 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} < 0$,

故 $h(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 时无零点.

当 $x=1$ 时, 若 $a \geq -\frac{5}{4}$, 则 $f(1) = a + \frac{5}{4} \geq 0$,

$\therefore h(x) = \min\{f(1), g(1)\} = g(1) = 0$, 故 $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点;

若 $a < -\frac{5}{4}$, 则 $f(1) = a + \frac{5}{4} < 0$, $\therefore h(x) = \min$ {

$f(1), g(1)\} = f(1) < 0$, 故 $x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的零点;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = -\ln x > 0$, 因此只考虑 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的零点个数即可.

①当 $a \leq -3$ 或 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + a$ 在 $(0, 1)$ 内无零点, 因此 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调,

而 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = a + \frac{5}{4}$, $\therefore$ 当 $a \leq -3$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有一个零点,

当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内没有零点.

②当 $-3 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{-a}{3}})$ 内单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{-a}{3}}, 1)$ 内单调

递增, 故当 $x = \sqrt{\frac{-a}{3}}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(\sqrt{\frac{-a}{3}}) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}} + \frac{1}{4}$.

若 $f(\sqrt{\frac{-a}{3}}) > 0$, 即 $-\frac{3}{4} < a < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无零点.

若 $f(\sqrt{\frac{-a}{3}}) = 0$, 即 $a = -\frac{3}{4}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一零点.

若 $f(\sqrt{\frac{-a}{3}}) < 0$, 即 $-3 < a < -\frac{3}{4}$, 由 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = a + \frac{5}{4}$,

$\therefore$ 当 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有两个零点. 当 $-3 < a \leq -\frac{5}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有一个零点.

综上所述可得: $a < -\frac{5}{4}$ 时, 函数 $h(x)$ 有一个零点.

当 $a > -\frac{3}{4}$ 时, $h(x)$ 有一个零点;

当 $a = -\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{5}{4}$ 时, $h(x)$ 有两个零点;

当 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$ 时, 函数 $h(x)$ 有三个零点.

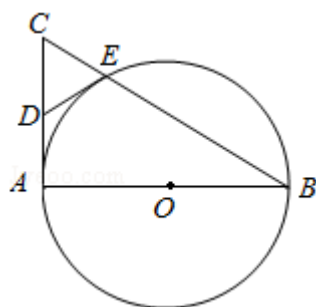
【点评】 本题考查了导数的运算法则、利用导数的几何意义研究切线方程、利用导数研究函数的单调性极值, 考查了分类讨论思想方法、推理能力与计算能力, 属于难题.

选修4—1:几何证明选讲

22. (10分) 如图, AB是 $\odot O$ 的直径, AC是 $\odot O$ 的切线, BC交 $\odot O$ 于点E.

(I) 若D为AC的中点, 证明: DE是 $\odot O$ 的切线;

(II) 若 $OA=\sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



【考点】N9: 圆的切线的判定定理的证明.

【专题】5B: 直线与圆.

【分析】(I) 连接AE和OE, 由三角形和圆的知识易得 $\angle OED=90^\circ$, 可得DE是 $\odot O$ 的切线;

(II) 设 $CE=1$, $AE=x$, 由射影定理可得关于x的方程 $x^2=\sqrt{12-x^2}$, 解方程可得x值, 可得所求角度.

【解答】解: (I) 连接AE, 由已知得 $AE \perp BC$, $AC \perp AB$,
在 $RT\triangle ABC$ 中, 由已知可得 $DE=DC$, $\therefore \angle DEC=\angle DCE$,
连接OE, 则 $\angle OBE=\angle OEB$,

又 $\angle ACB+\angle ABC=90^\circ$, $\therefore \angle DEC+\angle OEB=90^\circ$,

$\therefore \angle OED=90^\circ$, $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 设 $CE=1$, $AE=x$,

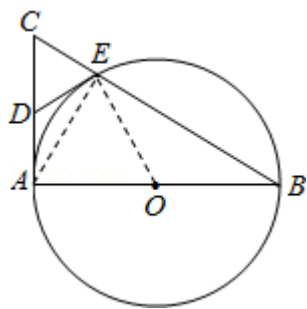
由已知得 $AB=2\sqrt{3}$, $BE=\sqrt{12-x^2}$,

由射影定理可得 $AE^2=CE \cdot BE$,

$\therefore x^2=\sqrt{12-x^2}$, 即 $x^4+x^2-12=0$,

解方程可得 $x=\sqrt{3}$

$\therefore \angle ACB=60^\circ$



【点评】 本题考查圆的切线的判定，涉及射影定理和三角形的知识，属基础题

选修4—4：坐标系与参数方程

23. （10分）在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1: x = -2$ ，圆 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ ，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（I）求 C_1, C_2 的极坐标方程；

（II）若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ （ $\rho \in \mathbb{R}$ ），设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N ，求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

【考点】 Q4：简单曲线的极坐标方程.

【专题】 5S：坐标系和参数方程.

【分析】 （I）由条件根据 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 求得 C_1, C_2 的极坐标方程.

（II）把直线 C_3 的极坐标方程代入 $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$ ，求得 ρ_1 和 ρ_2 的值，结合圆的半径可得 $C_2M \perp C_2N$ ，从而求得 $\triangle C_2MN$ 的面积 $\frac{1}{2} \cdot C_2M \cdot C_2N$ 的值.

【解答】 解：（I）由于 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \therefore C_1: x = -2$ 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = -2$,

故 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 的极坐标方程为：

$$(\rho \cos \theta - 1)^2 + (\rho \sin \theta - 2)^2 = 1,$$

化简可得 $\rho^2 - (2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta) + 4 = 0$.

（II）把直线 C_3 的极坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ （ $\rho \in \mathbb{R}$ ）代入

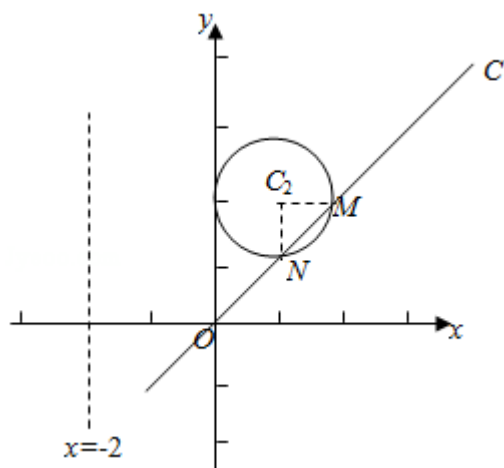
$$\text{圆 } C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1,$$

可得 $\rho^2 - (2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta) + 4 = 0$,

求得 $\rho_1=2\sqrt{2}$, $\rho_2=\sqrt{2}$,

$\therefore |MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{2}$, 由于圆 C_2 的半径为1, $\therefore C_2M \perp C_2N$,

$\triangle C_2MN$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot C_2M \cdot C_2N = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.



【点评】 本题主要考查简单曲线的极坐标方程, 点的极坐标的定义, 属于基础题.

选修4—5: 不等式选讲

24. (10分) 已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于6, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【专题】 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 (I) 当 $a=1$ 时, 把原不等式去掉绝对值, 转化为与之等价的三个不等式组, 分别求得每个不等式组的解集, 再取并集, 即得所求. (II) 化简函数 $f(x)$ 的解析式, 求得它的图象与 x 轴围成的三角形的三个顶点的坐标, 从而求得 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积; 再根据 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于6, 从而求得 a 的取值范围.

【解答】 解: (I) 当 $a=1$ 时, 不等式 $f(x) > 1$, 即 $|x+1| - 2|x-1| > 1$,

$$\text{即} \begin{cases} x < -1 \\ -x-1-2(1-x) > 1 \end{cases} \text{①, 或} \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x+1-2(1-x) > 1 \end{cases} \text{②,}$$

$$\text{或} \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1-2(x-1) > 1 \end{cases} \text{③}.$$

解①求得 $x \in \emptyset$ ，解②求得 $\frac{2}{3} < x < 1$ ，解③求得 $1 \leq x < 2$ 。

综上所述，原不等式的解集为 $(\frac{2}{3}, 2)$ 。

$$(\text{II}) \text{ 函数 } f(x) = |x+1| - 2|x-a| = \begin{cases} x-1-2a, & x < -1 \\ 3x+1-2a, & -1 \leq x \leq a \\ -x+1+2a, & x > a \end{cases}$$

由此求得 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点 $A(\frac{2a-1}{3}, 0)$ ，

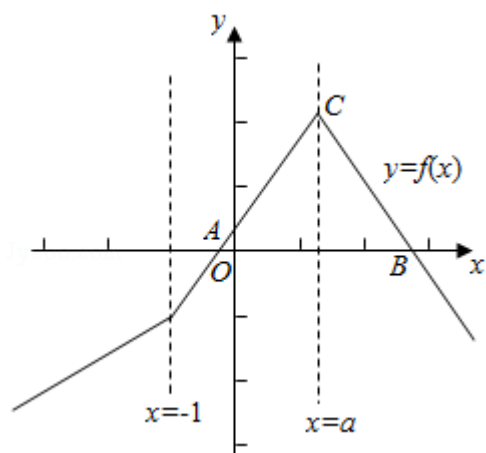
$B(2a+1, 0)$ ，

故 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形的第三个顶点 $C(a, a+1)$ ，

由 $\triangle ABC$ 的面积大于6，

可得 $\frac{1}{2}[2a+1 - \frac{2a-1}{3}] \cdot (a+1) > 6$ ，求得 $a > 2$ 。

故要求的 a 的范围为 $(2, +\infty)$ 。



【点评】 本题主要考查绝对值不等式的解法，体现了转化、分类讨论的数学思想，属于中档题。