

2021年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

# 数学

## 第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共9小题，每小题5分，共45分

参考公式：

•如果事件 $A$ 、 $B$ 互斥，那么  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  .

•如果事件 $A$ 、 $B$ 相互独立，那么  $P(AB) = P(A)P(B)$  .

•球的体积公式  $V = \frac{1}{3}\pi R^3$ ，其中 $R$ 表示球的半径.

•圆锥的体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 $S$ 表示圆锥的底面面积， $h$ 表示圆锥的高.

一、选择题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

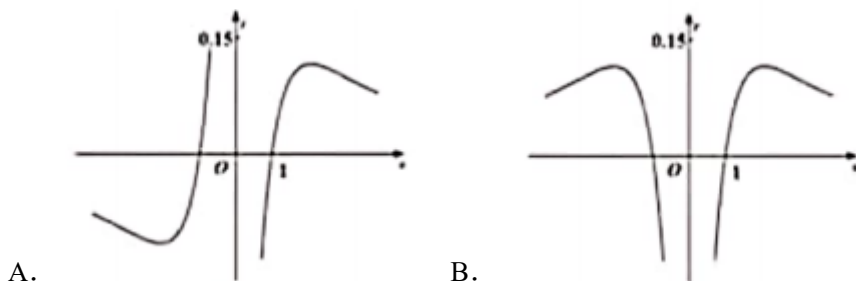
1. 设集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = \{0, 2, 4\}$ ，则  $(A \cap B) \cup C =$  ( )

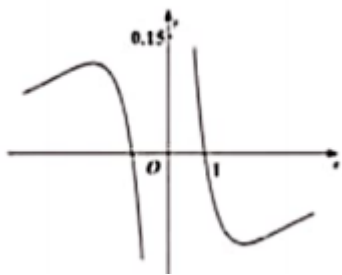
A.  $\{0\}$     B.  $\{0, 1, 3, 5\}$     C.  $\{0, 1, 2, 4\}$     D.  $\{0, 2, 3, 4\}$

2. 已知  $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的 ( )

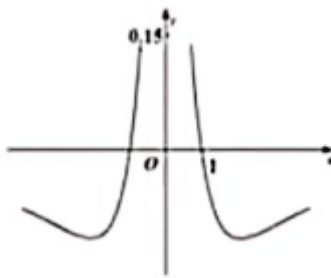
A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

3. 函数  $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$  的图像大致为 ( )



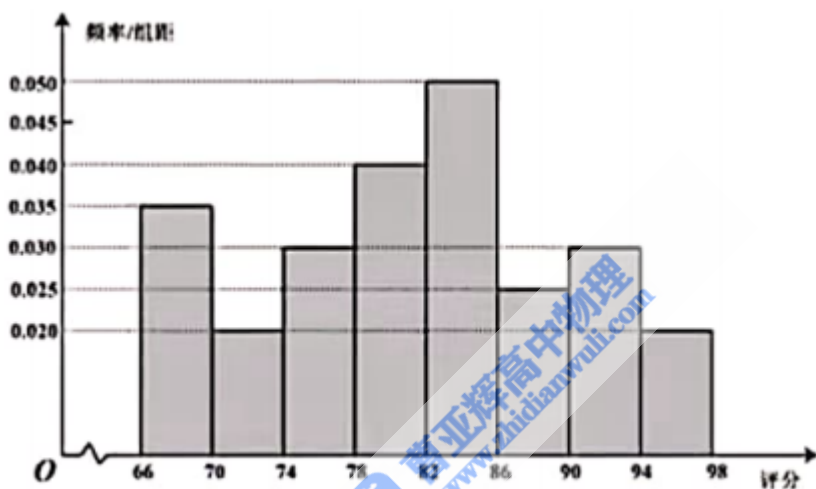


C.



D.

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取400部,统计其评分数据,将所得400个评分数据分为8组:  $[66,70), [70,74), \dots, [94,98]$ , 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间  $[82,86)$  内的影视作品数量是 ( )



- A. 20      B. 40      C. 64      D. 80

5. 设  $a = \log_2 0.3, b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4, c = 0.4^{0.3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$     B.  $c < a < b$     C.  $b < c < a$     D.  $a < c < b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为  $\frac{32\pi}{3}$ , 两个圆锥的高之比为  $1:3$ , 则这两个圆锥的体积之和为 ( )

- A.  $3\pi$     B.  $4\pi$     C.  $9\pi$     D.  $12\pi$

7. 若  $2^a = 5^b = 10$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$  ( )

- A.  $-1$     B.  $\lg 7$     C.  $1$     D.  $\log_7 10$

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点重合, 抛物线的准线交双曲线于  $A, B$  两点, 交双曲线的渐近线于  $C, D$  两点, 若

$|CD| = \sqrt{2} |AB|$ . 则双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$     B.  $\sqrt{3}$     C.  $2$     D.  $3$

9. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ , 若  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内恰有

6个零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$       B.  $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$       C.  $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$       D.  $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ .

2021年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

数学

第II卷

注意事项

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2. 本卷共11小题, 共105分.

二、填空题, 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分, 试题中包含两个空的, 答对1个的给3分, 全部答对的给5分.

10.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{9+2i}{2+i} =$  \_\_\_\_\_.

11. 在  $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中,  $x^6$  的系数是 \_\_\_\_\_.

12. 若斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $y$  轴交于点  $A$ , 与圆  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  相切于点  $B$ , 则  $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

13. 若  $a > 0, b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

14. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方获胜, 否则本次平局, 已知每次活动中, 甲、乙猜对的概率分别为  $\frac{5}{6}$  和  $\frac{1}{5}$ , 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响, 各次活动也互不影响, 则一次活动中, 甲获胜的概率为 \_\_\_\_\_, 3次活动中, 甲至少获胜2次的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 在边长为1的等边三角形  $ABC$  中,  $D$  为线段  $BC$  上的动点,  $DE \perp AB$  且交  $AB$  于点  $E$ ,  $DF \parallel AB$  且交  $AC$  于点  $F$ , 则  $|2\overline{BE} + \overline{DF}|$  的值为 \_\_\_\_\_;  $(\overline{DE} + \overline{DF}) \cdot \overline{DA}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题, 本大题共5小题, 共75分, 解答应写出文字说明, 证明过程成演算步骤.

16. (本小题满分14分)

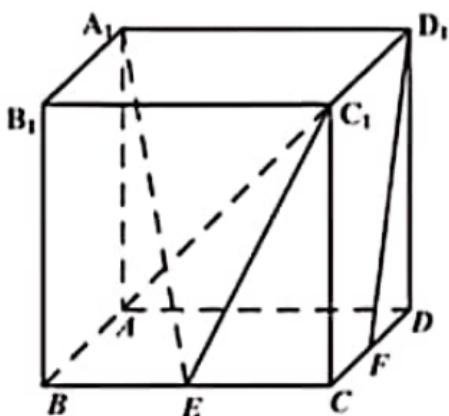
在  $\triangle ABC$ , 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ ,

$$b = \sqrt{2}.$$

- (I) 求  $a$  的值;
- (II) 求  $\cos C$  的值;
- (III) 求  $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$  的值.

17. (本小题满分15分)

如图, 在棱长为2的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为棱  $BC$  的中点,  $F$  为棱  $CD$  的中点.



- (I) 求证:  $D_1F \parallel$  平面  $A_1EC_1$ ;
- (II) 求直线  $AC_1$  与平面  $A_1EC_1$  所成角的正正弦值.
- (III) 求二面角  $A - A_1C_1 - E$  的正弦值.

18. (本小题满分15分)

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 上顶点为  $B$ , 离心率为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 且  $|BF| = \sqrt{5}$ .

- (I) 求椭圆的方程;
- (II) 直线  $l$  与椭圆有唯一的公共点  $M$ , 与  $y$  轴的正半轴交于点  $N$ , 过  $N$  与  $BF$  垂直的直线交  $x$  轴于点  $P$ . 若  $MP \parallel BF$ , 求直线  $l$  的方程.

19. (本小题满分15分)

已知  $\{a_n\}$  是公差为2的等差数列, 其前8项和为64.  $\{b_n\}$  是公比大于0的等比数列,

$$b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48.$$

- (I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (II) 记  $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in N^*$ .

(i) 证明  $\{c_n^2 - c_{2n}\}$  是等比数列;

(ii) 证明  $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

20. (本小恩满分16分)

已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = ax - xe^x$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 证明  $f(x)$  存在唯一的极值点

(III) 若存在  $a$ , 使得  $f(x) \leq a + b$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  成立, 求实数  $b$  的取值范围.