2002年北京高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）满足条件 $M\bigcup\{1\}=\{1，2，3\}$ 的集合 M 的个数是(　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

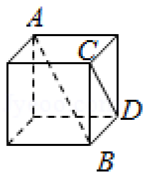
2.（5分）在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos 80^\circ,\sin 80^\circ)$，$B(\cos 20^\circ,\sin 20^\circ)$，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是(　　)

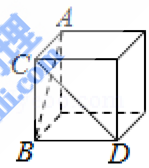
A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

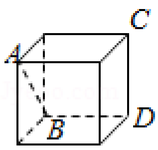
3.（5分）下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 上为减函数的是(　　)

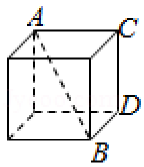
A．$y=\cos^2 x$　　B．$y=2|\sin x|$　　C．$y=(\dfrac{1}{3})^{\cos x}$　　D．$y=-\cot x$

4.（5分）在下列四个正方体中，能得出 $AB\perp CD$ 的是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

5.（5分）64个直径都为 $\dfrac{a}{4}$ 的球，记它们的体积之和为 $V_{甲}$，表面积之和为 $S_{甲}$；一个直径为 a 的球，记其体积为 $V_{乙}$，表面积为 $S_{乙}$，则(　　)

A．$V_{甲}>V_{乙}$ 且 $S_{甲}>S_{乙}$　　B．$V_{甲}<V_{乙}$ 且 $S_{甲}<S_{乙}$

C．$V_{甲}=V_{乙}$ 且 $S_{甲}>S_{乙}$　　D．$V_{甲}=V_{乙}$ 且 $S_{甲}=S_{乙}$

6.（5分）若直线 $l:y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，则直线 l 的倾斜角的取值范围(　　)

A．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$　　B．$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$　　C．$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$　　D．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$

7.（5分）$(1+i)^8$ 等于(　　)

A．$16i$　　B．$-16i$　　C．-16　　D．16

8．（5 分）若$\dfrac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$，则$\cos2\theta$的值为(　　)

A．$\dfrac{3}{5}$　　B．$-\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

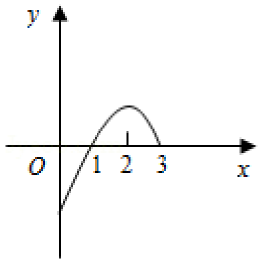
9．（5 分）5 本不同的书，全部分给四个学生，每个学生至少 1 本，不同分法的种数为(　　)

A．480　　B．240　　C．120　　D．96

10．（5 分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{3m^2}+\dfrac{y^2}{5n^2}=1$和双曲线$\dfrac{x^2}{2m^2}-\dfrac{y^2}{3n^2}=1$有公共的焦点，那么双曲线的渐近线方程是(　　)

A．$x=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}y$　　B．$y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}x$　　C．$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}y$　　D．$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

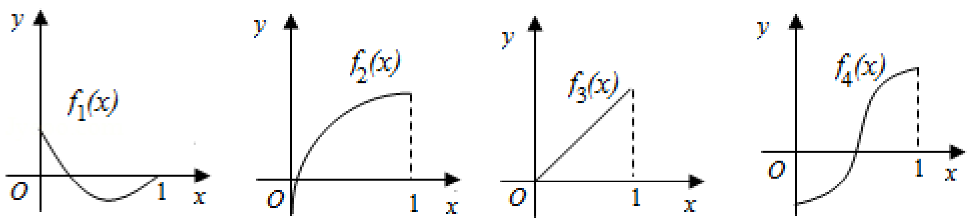
11．（5 分）已知$f(x)$的定义在$(0,3)$上的函数，$f(x)$的图象如图所示，那么不等式$f(x)\cos x<0$的解集是(　　)



A．$(0，1)\cup(2，3)$　　B．$(1,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},3)$

C．$(0,1)\cup(\dfrac{\pi}{2},3)$　　D．$(0，1)\cup(1，3)$

12．（5 分）如图所示，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$是定义在$[0，1]$上的四个函数，其中满足性质：“对$[0，1]$中任意的x_1和x_2，$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})\leqslant\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$恒成立”的只有(　　)



A．$f_1(x)$，$f_3(x)$　　B．$f_2(x)$　　C．$f_2(x)$，$f_3(x)$　　D．$f_4(x)$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）$\sin\dfrac{2}{5}\pi,\cos\dfrac{6}{5}\pi,\tan\dfrac{7}{5}\pi$ 从小到大的顺序是_____.

14．（4 分）等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，公差不为零，且 a_1，a_3，a_{11} 恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于_____.

15．（4 分）关于直角 AOB 在定平面 a 内的射影有如下判断：①可能是 $0°$ 的角；②可能是锐角；③可能是直角；④可能是钝角；⑤可能是 $180°$ 的角．其中正确判断的序号是（注:把你认为是正确判断的序号都填上）.

16．（4 分）圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的动点 Q 到直线 $3x+4y+8=0$ 距离的最小值为____.

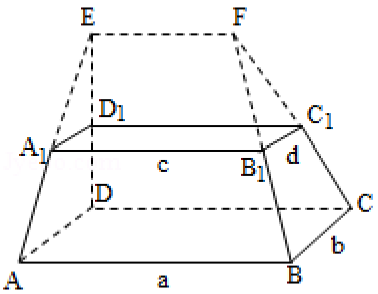
三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）解不等式 $\sqrt{2x-1}>x-2$．

18．（12 分）如图，在多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，上、下底面平行且均为矩形，相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等，侧棱延长后相交于 E，F 两点，上、下底面矩形的长、宽分别为 c，d 与 a，b，且 $a>c$，$b>d$，两底面间的距离为 h．

（Ⅰ）求侧面 $ABB_1\ \ A_1$ 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小；

（Ⅱ）证明：$EF//$面 $ABCD$．



19．（12 分）数列 $\{x_n\}$ 由下列条件确定：$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})$，$n\in N$．

（Ⅰ）证明：对 $n\ldots 2$，总有 $x_n\ldots\sqrt{a}$；

（Ⅱ）证明：对 $n\ldots 2$，总有 $x_n\ldots x_{n+1}$；

（Ⅲ）若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且大于零，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值．

20．在研究并行计算的基本算法时，有以下简单模型问题：

用计算机求 n 个不同的数 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}v_i=v_1+v_2+\cdots+v_n$，计算开始前，$n$ 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中，每台机器存一个数．计算开始后，在一个单位时间内，每台机器至多到一台其他机器中读数据，并与自己原有数据相加得到新的数据，各台机器可同时完成上述工作．为了用尽可能少的单位时间，即可完成计算，方法可用下表表示：

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　　果	被读机号	结　　果	被读机号	结　　果
1	V_1	2	V_1+V_2				
2	V_2	1	V_2+V_1				

（1）当$n=4$时，至少需要多少个单位时间可完成计算？把你设计的方法填入下表

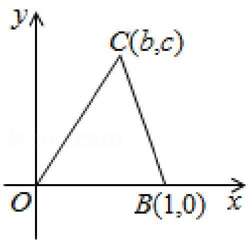
机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　　果	被读机号	结　　果	被读机号	结　　果
1	V_1						
2	V_2						
3	V_3						
4	V_4						

（2）当$n=128$时，要使所有机器都得到$\sum_{i=1}^{n}v_i$，至少需要多少个单位时间可完成计算？（结论不要求证明）

21．（13 分）已知$O(0,0)$，$B(1,0)$，$C(b,c)$是ΔOBC的三个顶点．

（Ⅰ）写出ΔOBC的重心G，外心F，垂心H的坐标，并证明G，F，H三点共线；

（Ⅱ）当直线FH与OB平行时，求顶点C的轨迹．



22．（13 分）已知$f(x)$是定义在R上的不恒为零的函数，且对于任意的a，$b\in R$都满足：

$f(ab)=af$（b）$+bf$（a）.

（1）求$f(0)$及f（1）的值；

（2）判断的奇偶性，并证明你的结论；

（3）若f（2）$=2$，$u_n=\dfrac{f(2^n)}{2^n}(n\in N^*)$，求证数列$\{u_n\}$是等差数列，并求$\{u_n\}$的通项公式．

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）满足条件 $M\bigcup\{1\}=\{1，2，3\}$ 的集合 M 的个数是 $($　　$)$

A．4　　　　B．3　　　　C．2　　　　D．1

【解答】解：$\because M\bigcup\{1\}=\{1，2，3\}$

$\therefore M=\{2，3\}$ 或 $\{1，2，3\}$

故选：C．

2．（5 分）在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos 80^{\circ},\sin 80^{\circ})$，$B(\cos 20^{\circ},\sin 20^{\circ})$，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是 $($　　$)$

A．$\dfrac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．1

【解答】解：$\because A(\cos 80^{\circ},\sin 80^{\circ})$，$B(\cos 20^{\circ},\sin 20^{\circ})$，

$\therefore|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\cos 80^{\circ}-\cos 20^{\circ})^{2}+(\sin 80^{\circ}-\sin 20^{\circ})^{2}}=\sqrt{2-2\cos 60^{0}}=1$．

故选：D．

3．（5 分）下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 上为减函数的是 $($　　$)$

A．$y=\cos^{2}x$　　　　B．$y=2|\sin x|$　　　　C．$y=(\dfrac{1}{3})^{\cos x}$　　　　D．$y=-\cot x$

【解答】解：由题意考察选项，C 的周期不是 π，所以 C 不正确；

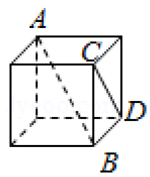
由于 $Ay=\cos^{2}x$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 上为增函数，选项 A 不正确；

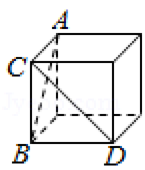
$y=2|\sin x|$ 以 π 为最小正周期，且在区间 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 上为减函数，正确；

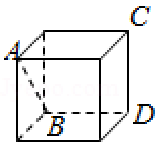
$y=-\cot x$ 且在区间 $(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 上为增函数，D 错误；

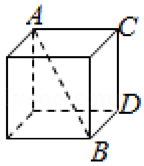
故选：B．

4．（5 分）在下列四个正方体中，能得出 $AB\perp CD$ 的是 $($　　$)$

A．

B．

C. 

D. 

【解答】解：在 A 中，$CD\perp BE$，$CD\perp AE$，$BE\bigcap AE=E$，

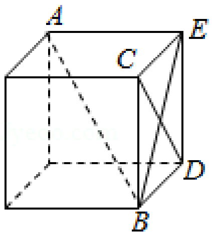
$\therefore CD\perp$ 平面 ABE，又 $AB\subset$ 平面 ABE，$\therefore AB\perp CD$，故 A 正确；

在 B 中，AB 与 CD 成 60° 角，故 B 错误；

在 C 中，AB 与 CD 成 45° 角，故 C 错误；

在 D 中，AB 与 CD 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$，故 D 错误.

故选：A.



5.（5 分）64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球，记它们的体积之和为 $V_{甲}$，表面积之和为 $S_{甲}$；一个直径为 a 的球，记其体积为 $V_{乙}$，表面积为 $S_{乙}$，则(　　)

A. $V_{甲}>V_{乙}$ 且 $S_{甲}>S_{乙}$　　B. $V_{甲}<V_{乙}$ 且 $S_{甲}<S_{乙}$

C. $V_{甲}=V_{乙}$ 且 $S_{甲}>S_{乙}$　　D. $V_{甲}=V_{乙}$ 且 $S_{甲}=S_{乙}$

【解答】解：64 个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球，记它们的体积之和为 $V_{甲}=64\times\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{8}\right)^{3}=\frac{\pi}{6}a^{3}$，表面积之和为 $S_{甲}=64\times 4\pi\times(\frac{a}{8})^{2}=4\pi a^{2}$；

一个直径为 a 的球，记其体积为 $V_{乙}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^{3}=\frac{\pi}{6}a^{3}$，表面积为 $S_{乙}=4\pi(\frac{a}{2})^{2}=\pi a^{2}$；

所以 $V_{甲}=V_{乙}$ 且 $S_{甲}>S_{乙}$

故选：C.

6.（5 分）若直线 $l: y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，则直线 l 的倾斜角的取值范围(　　)

A. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$　　B. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　C. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　　D. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

【解答】解：联立两直线方程得：$\begin{cases}y=kx-\sqrt{3}① \\ 2x+3y-6=0②\end{cases}$，

将①代入②得：$x=\frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k}$③，把③代入①，求得 $y=\frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}$，

所以两直线的交点坐标为$(\frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k}$，$\frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k})$，

因为两直线的交点在第一象限，所以得到$\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k}>0① \\ \frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}>0②\end{cases}$，

由①解得：$k>-\frac{2}{3}$；由②解得 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k<-\frac{2}{3}$，所以不等式的解集为：$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\theta\in(\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2})$．

方法二、$\because$ 直线 l 恒过定点 $(0,-\sqrt{3})$，作出两直线的图象.，

设直线 $2x+3y-6=0$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B．从图中看出，

斜率 $k_{AP}<k<+\infty$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}<k<+\infty$，

故直线 l 的倾斜角的取值范围应为$(\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2})$．

故选：B．

7.（5 分）$(1+i)^8$ 等于(　　)

A. $16i$　　B. $-16i$　　C. -16　　D. 16

【解答】解：$(1+i)^8=\sqrt{2}^8(\cos45°+i\sin45°)^8$

$=16(\cos360°+i\sin360°)$

$=16$

故选：D．

8.（5 分）若 $\frac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$，则 $\cos2\theta$ 的值为(　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解答】解：由 $\frac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=\frac{1-\tan\theta}{2+\tan\theta}=1$，得到 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，

则 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2}{\sec^2\theta} - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\theta} - 1 = \dfrac{2}{1+\frac{1}{4}} - 1 = \dfrac{3}{5}$.

故选：A.

9．（5 分）5 本不同的书，全部分给四个学生，每个学生至少 1 本，不同分法的种数为(　　)

A．480　　B．240　　C．120　　D．96

【解答】解：由题意知先把 5 本书中的两本捆起来看做一个元素共有 C_5^2，

这一个元素和其他的三个元素在四个位置全排列共有 A_4^4，

$\therefore$ 分法种数为 $C_5^2 \bullet A_4^4 = 240$.

故选：B.

10．（5 分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3m^2} + \dfrac{y^2}{5n^2} = 1$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{2m^2} - \dfrac{y^2}{3n^2} = 1$ 有公共的焦点，那么双曲线的渐近线方程是(　　)

A．$x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}y$　　B．$y = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}x$　　C．$x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}y$　　D．$y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

【解答】解：$\because$ 椭圆和双曲线有公共焦点

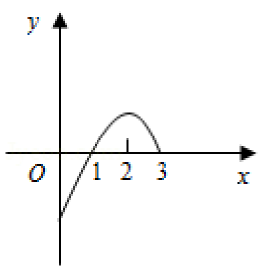
$\therefore 3m^2 - 5n^2 = 2m^2 + 3n^2$，整理得 $m^2 = 8n^2$，

$\therefore \dfrac{m}{n} = 2\sqrt{2}$

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\dfrac{\sqrt{3n^2}}{\sqrt{2m^2}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

故选：D.

11．（5 分）已知 $f(x)$ 的定义在 $(0,3)$ 上的函数，$f(x)$ 的图象如图所示，那么不等式 $f(x)\cos x < 0$ 的解集是(　　)



A．$(0，1)\cup(2，3)$　　B．$(1,\dfrac{\pi}{2})\bigcup(\dfrac{\pi}{2},3)$

C． $(0,1)\bigcup(\frac{\pi}{2},3)$　　　　　　　　　　D．$(0，1)\cup(1，3)$

【解答】解：由函数图象可知：当 $f(x)<0$ 时，$0<x<1$；当 $f(x)>0$ 时，$1<x<3$；

而 $\cos x$ 中的 $x\in(0,3)$，当 $\cos x>0$ 时，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$；当 $\cos x<0$ 时，$x\in(\frac{\pi}{2}，3)$，

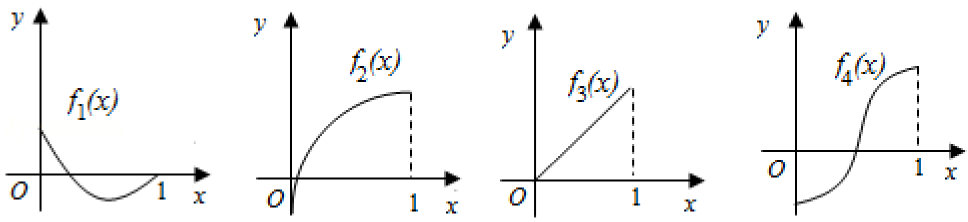
则 $f(x)\cos x<0$，可化为：$\begin{cases}f(x)>0\\ \cos x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ \cos x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1<x<3\\ \frac{\pi}{2}<x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1\\ 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得：$\frac{\pi}{2}<x<3$ 或 $0<x<1$，

所以所求不等式的解集为：$(0，1)\cup(\frac{\pi}{2}，3)$，

故选：C．

12．（5 分）如图所示，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$ 是定义在 $[0，1]$ 上的四个函数，其中满足性质：“对 $[0，1]$ 中任意的 x_1 和 x_2，$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 恒成立”的只有(　　)



A．$f_1(x)$，$f_3(x)$　　B．$f_2(x)$　　　　C．$f_2(x)$，$f_3(x)$　　D．$f_4(x)$

【解答】解：由题意可知：函数 $f(x)$ 满足性质：“对 $[0，1]$ 中任意的 x_1 和 x_2，$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 恒成立”．

$\therefore$ 函数图象在 $[0，1]$ 上为下凹函数，

有所给图象可知：B：为上凸函数、C 为线性函数、D 为先凹后凸的函数；

故全部不符合题意．从而只有 A 适合下凹的性质．

故选：A．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）$\sin\frac{2}{5}\pi,\cos\frac{6}{5}\pi,\tan\frac{7}{5}\pi$ 从小到大的顺序是__ $\cos\frac{6}{5}\pi<\sin\frac{2}{5}\pi<\tan\frac{7}{5}\pi$ __．

【解答】解：$\because\cos\frac{6\pi}{5}<0$，$\sin\frac{2\pi}{5}>0$，$\tan\frac{7\pi}{5}>0$，$0<\cos\frac{2\pi}{5}<1$，

$\therefore \tan\frac{7\pi}{5}=\tan(\pi+\frac{2\pi}{5})=\tan\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5}}>\sin\frac{2\pi}{5}$，

综上，$\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{7\pi}{5}$，

故答案为：$\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{7\pi}{5}$.

14.（4 分）等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，公差不为零，且a_1，a_3，a_{11}恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于__4__.

【解答】解：设a_1，a_3，a_{11}成等比，公比为q，则$a_3=a_1\bullet q=2q$，$a_{11}=a_1\bullet q^2=2q^2$.

又$\{a_n\}$是等差数列，$\therefore a_{11}=a_1+5(a_3-a_1)$，$\therefore q=4$.

故答案为 4

15.（4 分）关于直角 AOB 在定平面 a 内的射影有如下判断：①可能是$0°$的角；②可能是锐角；③可能是直角；④可能是钝角；⑤可能是$180°$的角．其中正确判断的序号是__①②③④⑤__（注:把你认为是正确判断的序号都填上）.

【解答】解：直角 AOB 在定平面 a 内的射影有下列几种情况：

当角所在的平面与平面α垂直时，

直角的射影可能是$0°$的角，可能是$180°$的角，故①⑤正确，

当角所在的平面与平面α平行时，直角的射影可能是直角，故③正确，

当角所在的平面与平面α不平行也不垂直时，平面转到一定角度，

直角的射影可能是锐角或钝角，故②④正确

故答案为：①②③④⑤

16.（4 分）圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$上的动点Q到直线$3x+4y+8=0$距离的最小值为__2__.

【解答】解：把圆的方程化为标准式方程得：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

所以圆心$A(1,1)$，圆的半径$r=1$，

则圆心A到直线$3x+4y+8=0$的距离$d=\frac{|3+4+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

所以动点Q到直线距离的最小值为$3-1=2$

故答案为：2

三、解答题（共6小题，满分74分）

17.（12分）解不等式$\sqrt{2x-1}>x-2$．

【解答】解：原不等式的解集是下面不等式组（1）及（2）的解集的并集：$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\x-2<0\end{cases}$（1）

或$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\x-2\geqslant 0\\2x-1>(x-2)^2\end{cases}$（2）

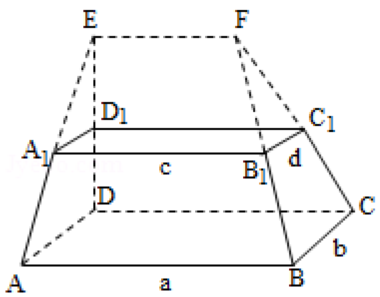
解不等式组（1）得解集$\{x|\frac{1}{2}\leqslant x<2\}$解不等式组（2）得解集$\{x|2\leqslant x<5\}$

所以原不等式的解集为$\{x|\frac{1}{2}\leqslant x<5\}$

18.（12分）如图，在多面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，上、下底面平行且均为矩形，相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等，侧棱延长后相交于E，F两点，上、下底面矩形的长、宽分别为c，d与a，b，且$a>c$，$b>d$，两底面间的距离为h．

（Ⅰ）求侧面ABB_1A_1与底面$ABCD$所成二面角的大小；

（Ⅱ）证明：$EF//$面$ABCD$．



【解答】解：（Ⅰ）过B_1C_1作底面$ABCD$的垂直平面，

交底面于PQ，过B_1作$B_1G\perp PQ$，垂足为G．

$\because$平面$ABCD//$平面$A_1B_1C_1D_1$，$\angle A_1B_1C_1=90^{\circ}$

$\therefore AB\perp PQ$，$AB\perp B_1P$．

$\therefore\angle B_1PG$为所求二面角的平面角．

过C_1作$C_1H\perp PQ$，垂足为H．

由于相对侧面与底面所成二面角的大小相等，

故四边形 B_1PQC_1 为等腰梯形．

$\therefore PG=\frac{1}{2}(b-d)$，

又 $B_1G=h$，

$\therefore \tan\angle B_1PG=\frac{2h}{b-d}(b>d)$，

$\therefore \angle B_1PG=\arctan\frac{2h}{b-d}$，

即所求二面角的大小为 $\arctan\frac{2h}{b-d}$．

（Ⅱ）证明：$\because AB$，CD 是矩形 $ABCD$ 的一组对边，有 $AB//CD$，

又 CD 是面 $ABCD$ 与面 $CDEF$ 的交线，

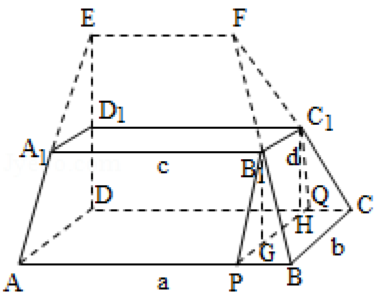
$\therefore AB//$ 面 $CDEF$．

$\because EF$ 是面 $ABFE$ 与面 $CDEF$ 的交线，

$\therefore AB//EF$．

$\because AB$ 是平面 $ABCD$ 内的一条直线，EF 在平面 $ABCD$ 外，

$\therefore EF//$ 面 $ABCD$．



19．（12 分）数列 $\{x_n\}$ 由下列条件确定：$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，$n\in N$．

（Ⅰ）证明：对 $n\geqslant 2$，总有 $x_n\geqslant\sqrt{a}$；

（Ⅱ）证明：对 $n\geqslant 2$，总有 $x_n\geqslant x_{n+1}$；

（Ⅲ）若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且大于零，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值．

【解答】证明：（Ⅰ）由 $x_1=a>0$，及 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，

可归纳证明 $x_n>0$．

从而有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}(n\in N)$，

所以，当 $n \geqslant 2$ 时，$x_n \geqslant \sqrt{a}$ 成立．

（Ⅱ）证法一：当 $n \geqslant 2$ 时，

因为 $x_n \geqslant \sqrt{a} > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$

所以 $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}) - x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a - x_n^2}{x_n} \leqslant 0$，

故当 $n \geqslant 2$ 时，$x_n \geqslant x_{n+1}$ 成立．

证法二：当 $n \geqslant 2$ 时，因为 $x_n \geqslant \sqrt{a} > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$，

所以 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})}{x_n} = \dfrac{x_n^2 + a}{2x_n^2} \leqslant \dfrac{x_n^2 + x_n^2}{2x_n^2} = 1$，

故当 $n \geqslant 2$ 时，$x_n \geqslant x_{n+1}$ 成立．

（III）解：记 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = A$，且 $A > 0$．

由 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$，得 $A = \dfrac{1}{2}(A + \dfrac{a}{A})$．

由 $A > 0$，解得 $A = \sqrt{a}$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}$．

20．（12 分）在研究并行计算的基本算法时，有以下简单模型问题：

用计算机求 n 个不同的数 v_1，v_2，…，v_n 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$．计算开始前，$n$ 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中，每台机器存一个数，计算开始后，在一个单位时间内，每台机器至多到一台其他机器中读数据，并与自己原有数据相加得到新的数据，各台机器可同时完成上述工作．为了用尽可能少的单位时间，使各台机器都得到这 n 个数的和，需要设计一种读和加的方法．比如 $n = 2$ 时，一个单位时间即可完成计算，方法可用下表表示：

<table>
<tr><td rowspan="2">机器号</td><td rowspan="2">初始时</td><td colspan="2">第一单位时间</td><td colspan="2">第二单位时间</td><td colspan="2">第三单位时间</td></tr>
<tr><td>被读机号</td><td>结　果</td><td>被读机号</td><td>结</td><td>被</td><td>结</td></tr>
</table>

1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

（Ⅰ）当$n=4$时，至少需要多少个单位时间可完成计算？把你设计的方法填入下表

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　果	被读机号	结	被	结
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

（Ⅱ）当$n=128$时，要使所有机器都得到$\sum_{i=1}^{n}v_i$，至少需要多少个单位时间可完成计算？（结论不要求证明）

【解答】解：（Ⅰ）当$n=4$时，只用 2 个单位时间即可完成计算．方法之一如下：

机器号	初始时	第一单位时间	第二单位时间	第三单位时

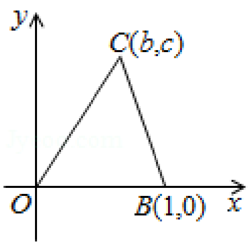
						间	
		被读机号	结 果	被读机号	结 果	被	结
1	v_1	2	v_1+v_2	3	$v_1+v_2+v_3+v_4$		
2	v_2	1	v_2+v_1	4	$v_2+v_1+v_4+v_3$		
3	v_3	4	v_3+v_4	1	$v_3+v_4+v_1+v_2$		
4	v_4	3	v_4+v_3	2	$v_4+v_3+v_2+v_1$		

（Ⅱ）当 $n=128=2^7$ 时，至少需要 7 个单位时间才能完成计算.

21.（13 分）已知 $O(0,0)$， $B(1,0)$， $C(b,c)$ 是 ΔOBC 的三个顶点.

（Ⅰ）写出 ΔOBC 的重心 G，外心 F，垂心 H 的坐标，并证明 G， F， H 三点共线；

（Ⅱ）当直线 FH 与 OB 平行时，求顶点 C 的轨迹.



【解答】解：（Ⅰ）由 ΔOBC 三顶点坐标 $O(0,0)$， $B(1,0)$， $C(b，c)(c\neq 0)$，

可求得重心 $G(\dfrac{b+1}{3},\dfrac{c}{3})$，

外心 $F(\dfrac{1}{2},\dfrac{b^2+c^2-b}{2c})$，

垂心 $H(b,\dfrac{b-b^2}{c})$.

当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时， G， F， H 三点的横坐标均为 $\dfrac{1}{2}$，故三点共线；

当 $b\neq\dfrac{1}{2}$ 时，设 G， H 所在直线的斜率为 k_{GH}， F， G 所在直线的斜率为 k_{FG} .

因为$k_{GH}=\dfrac{\dfrac{c}{3}-\dfrac{b-b^2}{c}}{\dfrac{b+1}{3}-b}=\dfrac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}$，

$k_{FG}=\dfrac{\dfrac{c}{3}-\dfrac{b^2+c^2-b}{2c}}{\dfrac{b+1}{3}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}$，

所以$k_{GH}=k_{FG}$，G，F，H，三点共线.

综上可得，G，F，H三点共线.

（Ⅱ）解：若$FH//OB$，由$k_{FH}=\dfrac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}=0$，

得$3(b^2-b)+c^2=0(c\neq 0,b\neq \dfrac{1}{2})$

配方得$3(b-\dfrac{1}{2})^2+c^2=\dfrac{3}{4}$，即$\dfrac{(b-\dfrac{1}{2})^2}{(\dfrac{1}{2})^2}+\dfrac{c^2}{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$.

即$\dfrac{(x-\dfrac{1}{2})^2}{(\dfrac{1}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=1(x\neq \dfrac{1}{2},y\neq 0)$.

所以，顶点C的轨迹是中心在$(\dfrac{1}{2},0)$，长半轴长为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，短半轴长为$\dfrac{1}{2}$，且短轴在x轴上的椭圆，

但除去$(0,0)$，$(1,0)$，$(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$四点.

22.（13分）已知$f(x)$是定义在R上的不恒为零的函数，且对于任意的a，$b\in R$都满足：

$f(ab)=af$（b）$+bf$（a）.

（1）求$f(0)$及f（1）的值；

（2）判断的奇偶性，并证明你的结论；

（3）若f（2）$=2$，$u_n=\dfrac{f(2^n)}{2^n}(n\in N^*)$，求证数列$\{u_n\}$是等差数列，并求$\{u_n\}$的通项公式.

【解答】解：（1）令$a=b=0$，代入得$f(0)=0\cdot f(0)+0\cdot f(0)=0$.

令$a=b=1$，代入得f（1）$=1\cdot f$（1）$+1\cdot f$（1），则f（1）$=0$.

（2）$\because f$ （1） $=f[(-1)^2]=-f(-1)-f(-1)=0$，$\therefore f(-1)=0$.

令 $a=-1$， $b=x$，则 $f(-x)=f(-1\bullet x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$，

因此 $f(x)$ 是奇函数.

（3）因为 $u_{n+1}=\dfrac{f(2^{n+1})}{2^{n+1}}=\dfrac{f(2\bullet 2^n)}{2^{n+1}}=\dfrac{2f(2^n)+2^n f(2)}{2^{n+1}}=\dfrac{f(2^n)}{2^n}+\dfrac{f(2)}{2}=u_n+1$，即 $u_{n+1}-u_n=1$，

所以 $\{u_n\}$ 是等差数列．又首项 $u_1=\dfrac{f(2)}{2}=1$，公差为 1，

所以 $a_n=n$， $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.