

2017 年浙江省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，满分 50 分）

1. (5 分) 已知集合 $P = \{x | -1 < x < 1\}$, $Q = \{x | 0 < x < 2\}$, 那么 $P \cup Q =$ ()

A. $(-1, 2)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(1, 2)$

【分析】 直接利用并集的运算法则化简求解即可.

【解答】 解: 集合 $P = \{x | -1 < x < 1\}$, $Q = \{x | 0 < x < 2\}$,
那么 $P \cup Q = \{x | -1 < x < 2\} = (-1, 2)$.

故选: A.

【点评】 本题考查集合的基本运算, 并集的求法, 考查计算能力.

2. (5 分) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率是 ()

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{9}$

【分析】 直接利用椭圆的简单性质求解即可.

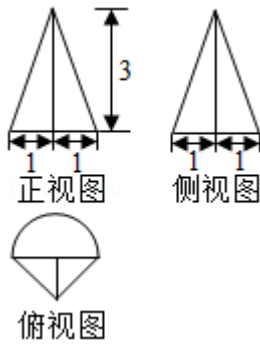
【解答】 解: 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 可得 $a=3$, $b=2$, 则 $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$,

所以椭圆的离心率为: $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

故选: B.

【点评】 本题考查椭圆的简单性质的应用, 考查计算能力.

3. (5 分) 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 ()



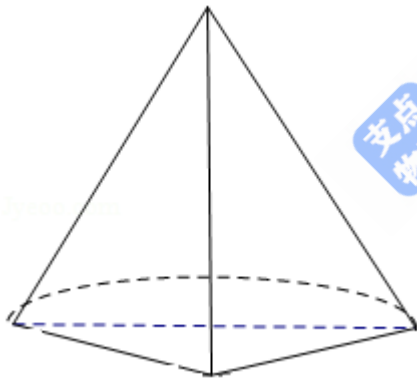
- A. $\frac{\pi}{2}+1$ B. $\frac{\pi}{2}+3$ C. $\frac{3\pi}{2}+1$ D. $\frac{3\pi}{2}+3$

【分析】根据几何体的三视图，该几何体是圆锥的一半和一个三棱锥组成，画出图形，结合图中数据即可求出它的体积。

【解答】解：由几何的三视图可知，该几何体是圆锥的一半和一个三棱锥组成，圆锥的底面圆的半径为 1，三棱锥的底面是底边长 2 的等腰直角三角形，圆锥的高和棱锥的高相等均为 3，

故该几何体的体积为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 3 = \frac{\pi}{2} + 1$,

故选：A



【点评】本题考查了空间几何体三视图的应用问题，解题的关键是根据三视图得出原几何体的结构特征，是基础题目。

4. (5分) 若 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z=x+2y$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, 6]$ B. $[0, 4]$ C. $[6, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解即可。

【解答】解：x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \end{cases}$ ，表示的可行域如图：

目标函数 $z=x+2y$ 经过坐标原点时，函数取得最小值，

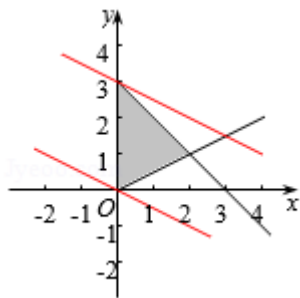
经过 A 时，目标函数取得最大值，

由 $\begin{cases} x=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ 解得 A (0, 3)，

目标函数的直线为：0，最大值为：36

目标函数的范围是 [0, 6].

故选：A.



【点评】本题考查线性规划的简单应用，画出可行域判断目标函数的最优解是解题的关键.

5. (5 分) 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 M，最小值是 m，则 $M - m$ ()

- A. 与 a 有关，且与 b 有关 B. 与 a 有关，但与 b 无关
C. 与 a 无关，且与 b 无关 D. 与 a 无关，但与 b 有关

【分析】结合二次函数的图象和性质，分类讨论不同情况下 $M - m$ 的取值与 a, b 的关系，综合可得答案.

【解答】解：函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 的图象是开口朝上且以直线 $x = -\frac{a}{2}$ 为对称轴的抛物线，

①当 $-\frac{a}{2} > 1$ 或 $-\frac{a}{2} < 0$ ，即 $a < -2$ ，或 $a > 0$ 时，

函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调，

此时 $M - m = |f(1) - f(0)| = |a|$ ，

故 $M - m$ 的值与 a 有关，与 b 无关

②当 $\frac{1}{2} \leq -\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $-2 \leq a \leq -1$ 时,

函数 $f(x)$ 在区间 $[0, -\frac{a}{2}]$ 上递减, 在 $[-\frac{a}{2}, 1]$ 上递增,

且 $f(0) > f(1)$,

此时 $M - m = f(0) - f(-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$,

故 $M - m$ 的值与 a 有关, 与 b 无关

③当 $0 \leq -\frac{a}{2} < \frac{1}{2}$, 即 $-1 < a \leq 0$ 时,

函数 $f(x)$ 在区间 $[0, -\frac{a}{2}]$ 上递减, 在 $[-\frac{a}{2}, 1]$ 上递增,

且 $f(0) < f(1)$,

此时 $M - m = f(0) - f(-\frac{a}{2}) = a - \frac{a^2}{4}$,

故 $M - m$ 的值与 a 有关, 与 b 无关

综上所述: $M - m$ 的值与 a 有关, 与 b 无关

故选: B

【点评】 本题考查的知识点是二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的图象和性质, 是解答的关键.

6. (5分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则“ $d > 0$ ”是“ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【分析】 根据等差数列的求和公式和 $S_4 + S_6 > 2S_5$, 可以得到 $d > 0$, 根据充分必要条件的定义即可判断.

【解答】 解: $\because S_4 + S_6 > 2S_5$,

$$\therefore 4a_1 + 6d + 6a_1 + 15d > 2(5a_1 + 10d),$$

$$\therefore 21d > 20d,$$

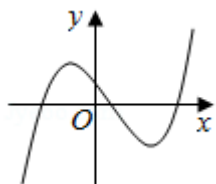
$$\therefore d > 0,$$

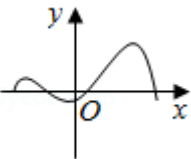
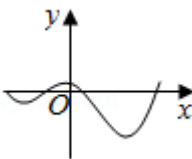
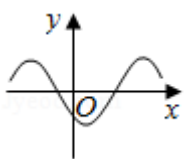
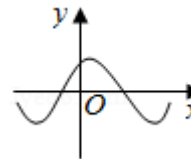
故“ $d > 0$ ”是“ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ”充分必要条件,

故选: C

【点评】 本题借助等差数列的求和公式考查了充分必要条件，属于基础题

7. (5分) 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【分析】 根据导数与函数单调性的关系，当 $f'(x) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $f'(x) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，根据函数图象，即可判断函数的单调性，然后根据函数极值的判断，即可判断函数极值的位置，即可求得函数 $y=f(x)$ 的图象可能

【解答】 解：由当 $f'(x) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $f'(x) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

则由导函数 $y=f'(x)$ 的图象可知： $f(x)$ 先单调递减，再单调递增，然后单调递减，最后单调递增，排除 A，C，

且第二个拐点（即函数的极大值点）在 x 轴上的右侧，排除 B，

故选 D

【点评】 本题考查导数的应用，考查导数与函数单调性的关系，考查函数极值的判断，考查数形结合思想，属于基础题.

8. (5分) 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1) = p_i$, $P(\xi_i=0) = 1 - p_i$, $i=1, 2$. 若 $0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$, 则 ()

- A. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ B. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$
C. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ D. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

【分析】 由已知得 $0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < 1 - p_2 < 1 - p_1 < 1$, 求出 $E(\xi_1) = p_1$, E

$(\xi_2) = p_2$, 从而求出 $D(\xi_1)$, $D(\xi_2)$, 由此能求出结果.

【解答】解: \because 随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1) = p_i$, $P(\xi_i=0) = 1 - p_i$, $i=1, 2, \dots$,

$$0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < 1 - p_2 < 1 - p_1 < 1,$$

$$E(\xi_1) = 1 \times p_1 + 0 \times (1 - p_1) = p_1,$$

$$E(\xi_2) = 1 \times p_2 + 0 \times (1 - p_2) = p_2,$$

$$D(\xi_1) = (1 - p_1)^2 p_1 + (0 - p_1)^2 (1 - p_1) = p_1 - p_1^2,$$

$$D(\xi_2) = (1 - p_2)^2 p_2 + (0 - p_2)^2 (1 - p_2) = p_2 - p_2^2,$$

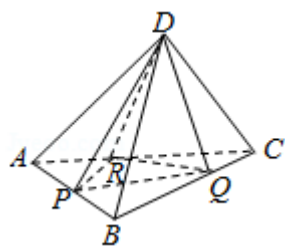
$$D(\xi_1) - D(\xi_2) = p_1 - p_1^2 - (p_2 - p_2^2) = (p_2 - p_1)(p_1 + p_2 - 1) < 0,$$

$$\therefore E(\xi_1) < E(\xi_2), D(\xi_1) < D(\xi_2).$$

故选: A.

【点评】本题考查离散型随机变量的数学期望和方差等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 是中档题.

9. (5分) 如图, 已知正四面体 $D-ABC$ (所有棱长均相等的三棱锥), P 、 Q 、 R 分别为 AB 、 BC 、 CA 上的点, $AP=PB$, $\frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = 2$, 分别记二面角 $D-PR-Q$, $D-PQ-R$, $D-QR-P$ 的平面角为 α 、 β 、 γ , 则 ()



A. $\gamma < \alpha < \beta$ B. $\alpha < \gamma < \beta$ C. $\alpha < \beta < \gamma$ D. $\beta < \gamma < \alpha$

【分析】解法一: 如图所示, 建立空间直角坐标系. 设底面 $\triangle ABC$ 的中心为 O . 不妨设 $OP=3$. 则 $O(0, 0, 0)$, $P(0, -3, 0)$, $C(0, -6, 0)$, $D(0, 0, 6\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3}, 2, 0)$, $R(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, 利用法向量的夹角公式即可得出二面角.

解法二：如图所示，连接 OD, OQ, OR, 过点 O 发布作垂线：OE ⊥ DR, OF ⊥ DQ, OG ⊥ QR, 垂足分别为 E, F, G, 连接 PE, PF, PG. 设 OP=h. 可得 $\cos\alpha =$

$$\frac{S_{\triangle ODR}}{S_{\triangle PDR}} = \frac{OE}{PE} = \frac{OE}{\sqrt{OE^2+h^2}}. \quad \text{同理可得} : \quad \cos\beta = \frac{OF}{PF} = \frac{OF}{\sqrt{OF^2+h^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{OG}{PG} = \frac{OG}{\sqrt{OG^2+h^2}}. \quad \text{由已知可得: } OE > OG > OF. \quad \text{即可得出.}$$

【解答】解法一：如图所示，建立空间直角坐标系. 设底面△ABC 的中心为 O. 不妨设 OP=3. 则 O (0, 0, 0), P (0, -3, 0), C (0, -6, 0), D (0, 0, $6\sqrt{2}$),

$$Q(\sqrt{3}, 2, 0), R(-2\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$\vec{PR} = (-2\sqrt{3}, 3, 0), \quad \vec{PD} = (0, 3, 6\sqrt{2}), \quad \vec{PQ} = (\sqrt{3}, 5, 0),$$

$$\vec{QR} = (-3\sqrt{3}, -2, 0),$$

$$\vec{QD} = (-\sqrt{3}, -2, 6\sqrt{2}).$$

$$\text{设平面 PDR 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PR} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PD} = 0 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3y = 0 \\ 3y + 6\sqrt{2}z = 0 \end{cases},$$

可得 $\vec{n} = (\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, -1)$, 取平面 ABC 的法向量 $\vec{\pi} = (0, 0, 1)$.

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{15}}, \text{ 取 } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

$$\text{同理可得: } \beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{681}}, \quad \gamma = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{95}}.$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{95}} > \frac{3}{\sqrt{681}}.$$

$$\therefore \alpha < \gamma < \beta.$$

解法二：如图所示，连接 OD, OQ, OR, 过点 O 发布作垂线：OE ⊥ DR, OF ⊥ DQ, OG ⊥ QR, 垂足分别为 E, F, G, 连接 PE, PF, PG.

设 OP=h.

$$\text{则 } \cos\alpha = \frac{S_{\triangle ODR}}{S_{\triangle PDR}} = \frac{OE}{PE} = \frac{OE}{\sqrt{OE^2+h^2}}.$$

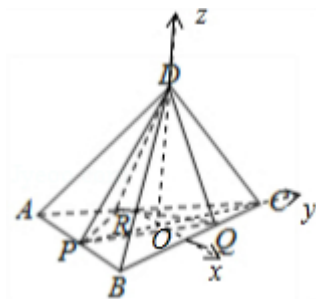
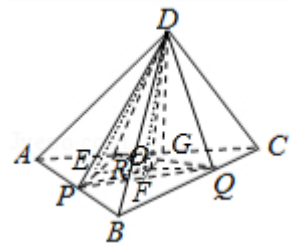
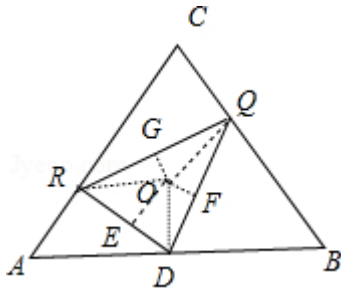
同理可得： $\cos\beta = \frac{OF}{PF} = \frac{OF}{\sqrt{OF^2+h^2}}$, $\cos\gamma = \frac{OG}{PG} = \frac{OG}{\sqrt{OG^2+h^2}}$.

由已知可得： $OE > OG > OF$.

$\therefore \cos\alpha > \cos\gamma > \cos\beta$, α, β, γ 为锐角.

$\therefore \alpha < \gamma < \beta$.

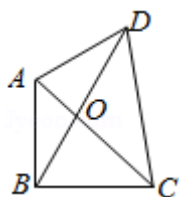
故选：B.



【点评】 本题考查了空间角、空间位置关系、正四面体的性质、法向量的夹角公式，考查了推理能力与计算能力，属于难题.

10. (5分) 如图，已知平面四边形 ABCD， $AB \perp BC$ ， $AB=BC=AD=2$ ， $CD=3$ ，AC

与 BD 交于点 O，记 $l_1 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ ， $l_2 = \vec{OB} \cdot \vec{OC}$ ， $l_3 = \vec{OC} \cdot \vec{OD}$ ，则 ()



A. $l_1 < l_2 < l_3$ B. $l_1 < l_3 < l_2$ C. $l_3 < l_1 < l_2$ D. $l_2 < l_1 < l_3$

【分析】根据向量数量积的定义结合图象边角关系进行判断即可.

【解答】解: $\because AB \perp BC, AB=BC=AD=2, CD=3,$

$$\therefore AC=2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD > 90^\circ,$$

由图象知 $OA < OC, OB < OD,$

$$\therefore 0 > \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} > 0,$$

即 $l_3 < l_1 < l_2,$

故选: C.

【点评】本题主要考查平面向量数量积的应用,根据图象结合平面向量数量积的定义是解决本题的关键.

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分

11. (4 分) 我国古代数学家刘徽创立的“割圆术”可以估算圆周率 π , 理论上能把 π 的值计算到任意精度, 祖冲之继承并发展了“割圆术”, 将 π 的值精确到小数点后七位, 其结果领先世界一千多年, “割圆术”的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6 , $S_6 = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$.

【分析】根据题意画出图形, 结合图形求出单位圆的内接正六边形的面积.

【解答】解: 如图所示,

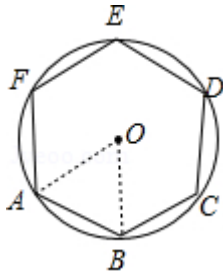
单位圆的半径为 1, 则其内接正六边形 ABCDEF 中,

$\triangle AOB$ 是边长为 1 的正三角形,

所以正六边形 ABCDEF 的面积为

$$S_6 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



【点评】本题考查了已知圆的半径求其内接正六边形面积的应用问题，是基础题.

12. (6分) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+bi)^2=3+4i$ (i 是虚数单位), 则 $a^2+b^2=$ 5, $ab=$ 2.

【分析】 $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+bi)^2=3+4i$ (i 是虚数单位), 可得 $3+4i=a^2-b^2+2abi$, 可得 $3=a^2-b^2$, $2ab=4$, 解出即可得出.

【解答】 解: $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+bi)^2=3+4i$ (i 是虚数单位),

$$\therefore 3+4i=a^2-b^2+2abi,$$

$$\therefore 3=a^2-b^2, 2ab=4,$$

$$\text{解得 } ab=2, \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

则 $a^2+b^2=5$,

故答案为: 5, 2.

【点评】本题考查了复数的运算法则、复数的相等、方程的解法, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

13. (6分) 已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$, 则 $a_4=$ 16, $a_5=$ 4.

【分析】利用二项式定理的展开式, 求解 x 的系数就是两个多项式的展开式中 x 与常数乘积之和, a_5 就是常数的乘积.

【解答】 解: 多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$,

$(x+1)^3$ 中, x 的系数是: 3, 常数是 1; $(x+2)^2$ 中 x 的系数是 4, 常数是 4,

$$a_4=3 \times 4+1 \times 4=16;$$

$$a_5=1 \times 4=4.$$

故答案为: 16; 4.

【点评】 本题考查二项式定理的应用，考查计算能力，是基础题.

14. (6分) 已知 $\triangle ABC$, $AB=AC=4$, $BC=2$, 点D为AB延长线上一点, $BD=2$, 连结CD, 则 $\triangle BDC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{15}}{2}$, $\cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

【分析】 如图, 取BC得中点E, 根据勾股定理求出AE, 再求出 $S_{\triangle ABC}$, 再根据 $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ 即可求出, 根据等腰三角形的性质和二倍角公式即可求出

【解答】 解: 如图, 取BC得中点E,

$$\because AB=AC=4, BC=2,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC = 1, AE \perp BC,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15},$$

$$\because BD=2,$$

$$\therefore S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\because BC=BD=2,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABE = 2 \angle BDC$$

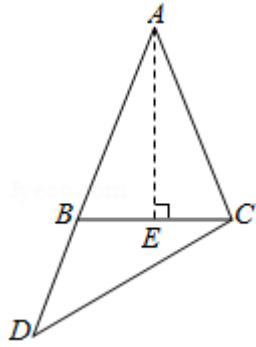
在 $Rt\triangle ABE$ 中,

$$\because \cos \angle ABE = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \angle ABE = 2 \cos^2 \angle BDC - 1 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}$



【点评】 本题考查了解三角形的有关知识，关键是转化，属于基础题

15. (6分) 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=2$ ，则 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值是 4，最大值是 $2\sqrt{5}$ 。

【分析】 通过记 $\angle AOB=\alpha$ ($0\leq\alpha\leq\pi$)，利用余弦定理可可知 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5-4\cos\alpha}$ 、 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5+4\cos\alpha}$ ，进而换元，转化为线性规划问题，计算即得结论。

【解答】 解：记 $\angle AOB=\alpha$ ，则 $0\leq\alpha\leq\pi$ ，如图，

由余弦定理可得：

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5-4\cos\alpha},$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5+4\cos\alpha},$$

$$\text{令 } x=\sqrt{5-4\cos\alpha}, y=\sqrt{5+4\cos\alpha},$$

则 $x^2+y^2=10$ ($x, y\geq 1$)，其图象为一段圆弧 MN，如图，

令 $z=x+y$ ，则 $y=-x+z$ ，

则直线 $y=-x+z$ 过 M、N 时 z 最小为 $z_{\min}=1+3=3+1=4$ ，

当直线 $y=-x+z$ 与圆弧 MN 相切时 z 最大，

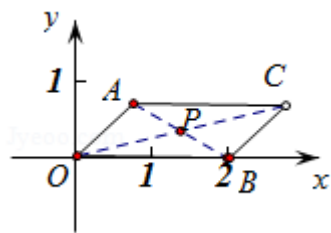
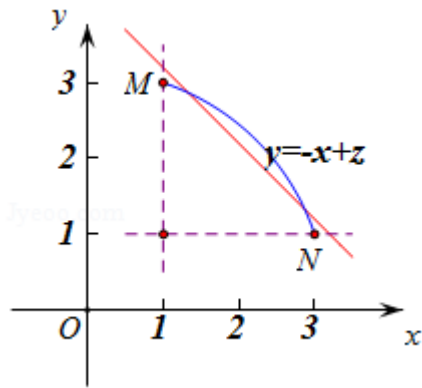
由平面几何知识易知 z_{\max} 即为原点到切线的距离的 $\sqrt{2}$ 倍，

也就是圆弧 MN 所在圆的半径的 $\sqrt{2}$ 倍，

$$\text{所以 } z_{\max}=\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}.$$

综上所述， $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值是 4，最大值是 $2\sqrt{5}$ 。

故答案为：4、 $2\sqrt{5}$ 。



【点评】 本题考查函数的最值及其几何意义，考查数形结合能力，考查运算求解能力，涉及余弦定理、线性规划等基础知识，注意解题方法的积累，属于中档题.

16. (4分) 从6男2女共8名学生中选出队长1人，副队长1人，普通队员2人组成4人服务队，要求服务队中至少有1名女生，共有 660 种不同的选法. (用数字作答)

【分析】 由题意分两类选1女3男或选2女2男，再计算即可

【解答】 解：第一类，先选1女3男，有 $C_6^3 C_2^1 = 40$ 种，这4人选2人作为队长和副队有 $A_4^2 = 12$ 种，故有 $40 \times 12 = 480$ 种，

第二类，先选2女2男，有 $C_6^2 C_2^2 = 15$ 种，这4人选2人作为队长和副队有 $A_4^2 = 12$ 种，故有 $15 \times 12 = 180$ 种，

根据分类计数原理共有 $480 + 180 = 660$ 种，

故答案为：660

【点评】 本题考查了分类计数原理和分步计数原理，属于中档题

17. (4分) 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = |x + \frac{4}{x} - a| + a$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值是5，则 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{9}{2})$.

【分析】 通过转化可知 $|x + \frac{4}{x} - a| + a \leq 5$ 且 $a \leq 5$ ，进而解绝对值不等式可知 $2a - 5$

$\leq x + \frac{4}{x} \leq 5$, 进而计算可得结论.

【解答】解: 由题可知 $|x + \frac{4}{x} - a| + a \leq 5$, 即 $|x + \frac{4}{x} - a| \leq 5 - a$, 所以 $a \leq 5$,

又因为 $|x + \frac{4}{x} - a| \leq 5 - a$,

所以 $a - 5 \leq x + \frac{4}{x} - a \leq 5 - a$,

所以 $2a - 5 \leq x + \frac{4}{x} \leq 5$,

又因为 $1 \leq x \leq 4$, $4 \leq x + \frac{4}{x} \leq 5$,

所以 $2a - 5 \leq 4$, 解得 $a \leq \frac{9}{2}$,

故答案为: $(-\infty, \frac{9}{2})$.

【点评】本题考查函数的最值, 考查绝对值函数, 考查转化与化归思想, 注意解法方法的积累, 属于中档题.

三、解答题 (共 5 小题, 满分 74 分)

18. (14 分) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$).

(I) 求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值.

(II) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

【分析】利用二倍角公式及辅助角公式化简函数的解析式,

(I) 代入可得: $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值.

(II) 根据正弦型函数的图象和性质, 可得 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间

【解答】解: \because 函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x = -\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{7\pi}{6})$

(I) $f(\frac{2\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) = 2\sin\frac{5\pi}{2} = 2$,

(II) $\because \omega = 2$, 故 $T = \pi$,

即 $f(x)$ 的最小正周期为 π ,

由 $2x + \frac{7\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ 得:

$x \in [-\frac{5\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$,

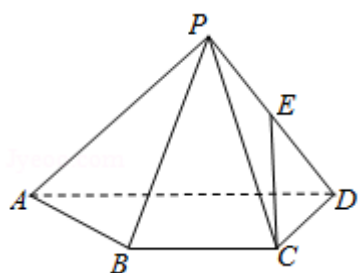
故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{6}+k\pi, -\frac{\pi}{3}+k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

【点评】 本题考查的知识点是三角函数的化简求值, 三角函数的周期性, 三角函数的单调区间, 难度中档.

19. (15分) 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形, $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, $PC=AD=2DC=2CB$, E 为 PD 的中点.

(I) 证明: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.



【分析】 (I) 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, 过 D 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角系, 利用向量法能证明 $CE \parallel$ 平面 PAB .

(II) 求出平面 PBC 的法向量和 \overrightarrow{CE} , 利用向量法能求出直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

【解答】 证明: (I) \because 四棱锥 $P-ABCD$, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形,

$BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, $PC=AD=2DC=2CB$, E 为 PD 的中点,

\therefore 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, 过 D 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角系,

设 $PC=AD=2DC=2CB=2$,

则 $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $P(1, 0, 1)$, $E(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $A(2, 0, 0)$,

$B(1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{CE} = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{PA} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{PB} = (0, 1, -1)$,

设平面 PAB 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PA} = x - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PB} = y - z = 0 \end{cases}, \text{取 } z=1, \text{得 } \vec{n} = (1, 1, 1),$$

$$\because \vec{CE} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0, \text{CE} \notin \text{平面 PAB},$$

$\therefore \text{CE} // \text{平面 PAB}.$

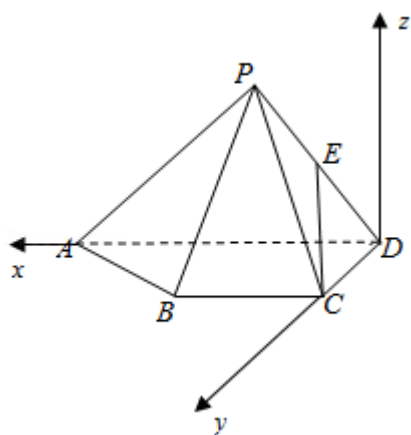
解: (II) $\vec{PC} = (-1, 1, -1)$, 设平面 PBC 的法向量 $\vec{\pi} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PB} = b - c = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{PC} = -a + b - c = 0 \end{cases}, \text{取 } b=1, \text{得 } \vec{\pi} = (0, 1, 1),$$

设直线 CE 与平面 PBC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{CE}, \vec{\pi} \rangle| = \frac{|\vec{CE} \cdot \vec{\pi}|}{|\vec{CE}| \cdot |\vec{\pi}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{6}{4}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

\therefore 直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



【点评】 本题考查线面平行的证明, 考查线面角的正弦值的求法, 考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 是中档题.

20. (15分) 已知函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x} (x \geq \frac{1}{2})$.

(1) 求 $f(x)$ 的导函数;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上的取值范围.

【分析】 (1) 求出 $f(x)$ 的导数, 注意运用复合函数的求导法则, 即可得到所求;

(2) 求出 $f(x)$ 的导数, 求得极值点, 讨论当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, 当 $1 < x < \frac{5}{2}$ 时, 当 $x > \frac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 的单调性, 判断 $f(x) \geq 0$, 计算 $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(\frac{5}{2})$, 即可得到所求取值范围.

【解答】解: (1) 函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x}$ ($x \geq \frac{1}{2}$),
 导数 $f'(x) = (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \cdot 2) e^{-x} - (x - \sqrt{2x-1}) e^{-x}$
 $= (1 - x + \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}}) e^{-x} = (1-x)(1 - \frac{2}{\sqrt{2x-1}}) e^{-x}$;

(2) 由 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = (1-x)(1 - \frac{2}{\sqrt{2x-1}}) e^{-x}$,
 可得 $f'(x) = 0$ 时, $x=1$ 或 $\frac{5}{2}$,

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

当 $1 < x < \frac{5}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增;

当 $x > \frac{5}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

且 $x \geq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^2 \geq 2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$,

则 $f(x) \geq 0$.

由 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, $f(1) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$,

即有 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, 最小值为 $f(1) = 0$.

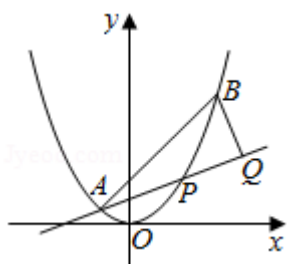
则 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上的取值范围是 $[0, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}]$.

【点评】 本题考查导数的运用: 求单调区间和极值、最值, 考查化简整理的运算能力, 正确求导是解题的关键, 属于中档题.

21. (15分) 如图, 已知抛物线 $x^2=y$, 点 $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, 抛物线上的点 $P(x, y)$ ($-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$), 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为 Q .

(I) 求直线 AP 斜率的取值范围;

(II) 求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值.



【分析】(I) 通过点 P 在抛物线上可设 $P(x, x^2)$, 利用斜率公式结合 $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ 可得结论;

(II) 通过 (I) 知 $P(x, x^2)$ 、 $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, 设直线 AP 的斜率为 k, 联立直线

AP、BP 方程可知 Q 点坐标, 进而可用 k 表示出 \vec{PQ} 、 \vec{PA} , 计算可知 $|PA| \cdot |PQ| =$

$(1+k)^3(1-k)$, 通过令 $f(x) = (1+x)^3(1-x)$, $-1 < x < 1$, 求导结合单调性可得结论.

【解答】解: (I) 由题可知 $P(x, x^2)$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$,

$$\text{所以 } k_{AP} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2} \in (-1, 1),$$

故直线 AP 斜率的取值范围是: $(-1, 1)$;

(II) 由 (I) 知 $P(x, x^2)$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$,

$$\text{所以 } \vec{PA} = \left(-\frac{1}{2} - x, \frac{1}{4} - x^2\right),$$

$$\text{设直线 AP 的斜率为 k, 则 AP: } y = kx + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}, \text{ BP: } y = -\frac{1}{k}x + \frac{3}{2k} + \frac{9}{4},$$

$$\text{联立直线 AP、BP 方程可知 Q } \left(\frac{3+4k-k^2}{2k^2+2}, \frac{9k^2+8k+1}{4k^2+4}\right),$$

$$\text{故 } \vec{PQ} = \left(\frac{1+k-k^2-k^3}{1+k^2}, \frac{-k^4-k^3+k^2+k}{1+k^2}\right),$$

$$\text{又因为 } \vec{PA} = (-1-k, -k^2-k),$$

$$\text{故 } |PA| \cdot |PQ| = \vec{PA} \cdot \vec{PQ} = \frac{(1+k)^3(k-1)}{1+k^2} + \frac{k^2(1+k)^3(k-1)}{1+k^2} = (1+k)^3(k-1),$$

所以 $|PA| \cdot |PQ| = (1+k)^3 (1-k)$,

令 $f(x) = (1+x)^3 (1-x)$, $-1 < x < 1$,

则 $f'(x) = (1+x)^2 (2-4x) = -2(1+x)^2 (2x-1)$,

由于当 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$,

故 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$, 即 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 $\frac{27}{16}$.

【点评】 本题考查圆锥曲线的最值问题, 考查运算求解能力, 考查函数思想, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

22. (15分) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1=1$, $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明: 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时,

(I) $0 < x_{n+1} < x_n$;

(II) $2x_{n+1} - x_n \leq \frac{x_n x_{n+1}}{2}$;

(III) $\frac{1}{2^{n-1}} \leq x_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

【分析】 (I) 用数学归纳法即可证明,

(II) 构造函数, 利用导数判断函数的单调性, 把数列问题转化为函数问题, 即可证明,

(III) 由 $\frac{x_n x_{n+1}}{2} \geq 2x_{n+1} - x_n$ 得 $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2} \geq 2\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\right) > 0$, 继续放缩即可证明

【解答】 解: (I) 用数学归纳法证明: $x_n > 0$,

当 $n=1$ 时, $x_1=1 > 0$, 成立,

假设当 $n=k$ 时成立, 则 $x_k > 0$,

那么 $n=k+1$ 时, 若 $x_{k+1} < 0$, 则 $0 < x_k = x_{k+1} + \ln(1+x_{k+1}) < 0$, 矛盾,

故 $x_{k+1} > 0$,

因此 $x_n > 0$, ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\therefore x_n = x_{n+1} + \ln(1+x_{n+1}) > x_{n+1}$,

因此 $0 < x_{n+1} < x_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

(II) 由 $x_n = x_{n+1} + \ln(1+x_{n+1})$ 得 $x_n x_{n+1} - 4x_{n+1} + 2x_n = x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + (x_{n+1} + 2) \ln(1+x_{n+1})$,

记函数 $f(x) = x^2 - 2x + (x+2) \ln(1+x)$, $x \geq 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1} + \ln(1+x) > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore f(x) \geq f(0) = 0,$$

因此 $x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + (x_{n+1}+2) \ln(1+x_{n+1}) \geq 0$,

$$\text{故 } 2x_{n+1} - x_n \leq \frac{x_n x_{n+1}}{2};$$

$$\text{(III) } \because x_n = x_{n+1} + \ln(1+x_{n+1}) \leq x_{n+1} + x_{n+1} = 2x_{n+1},$$

$$\therefore x_n \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{由 } \frac{x_n x_{n+1}}{2} \geq 2x_{n+1} - x_n \text{ 得 } \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2} \geq 2 \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \right) > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \geq 2 \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{2} \right) \geq \dots \geq 2^{n-1} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} \right) = 2^{n-2},$$

$$\therefore x_n \leq \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\text{综上所述 } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

【点评】 本题考查了数列的概念，递推关系，数列的函数的特征，导数和函数的单调性的关系，不等式的证明，考查了推理论证能力，分析解决问题的能力，运算能力，放缩能力，运算能力，属于难题