

# 2008年普通高等学校招生全国统一考试

(广东卷)

数学(理科)

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $0 < a < 2$ ，复数  $z$  的实部为  $a$ ，虚部为  $1$ ，则  $|z|$  的取值范围是 ( C )

- A. (1,5)      B. (1,3)      C.  $(1, \sqrt{5})$       D.  $(1, \sqrt{3})$

【解析】  $|z| = \sqrt{a^2 + 1}$ ，而  $0 < a < 2$ ，即  $1 < a^2 + 1 < 5$ ， $\therefore 1 < |z| < \sqrt{5}$

2. 记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $S_4 = 20$ ，则  $S_6 =$  ( D )

- A. 16      B. 24      C. 36      D. 48

【解析】  $S_4 = 2 + 6d = 20$ ， $\therefore d = 3$ ，故  $S_6 = 3 + 15d = 48$

3. 某校共有学生2000名，各年级男、女生人数如表1. 已知在全校学生中随机抽取1名，抽到二年级女生的概率是0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取64名学生，则应在三年级抽取的学生人数为 ( C )

	一年级	二年级	三年级
女生	373	$x$	$y$
男生	377	370	$z$

- A. 24      B. 18      C. 16      D. 12      表1

【解析】依题意我们知道二年级的女生有380人，那么三年级的学生的人数应该是500，即总体中各个年级的人数比例为3:3:2，故在分层抽样中应在三年级抽取的学生人数为

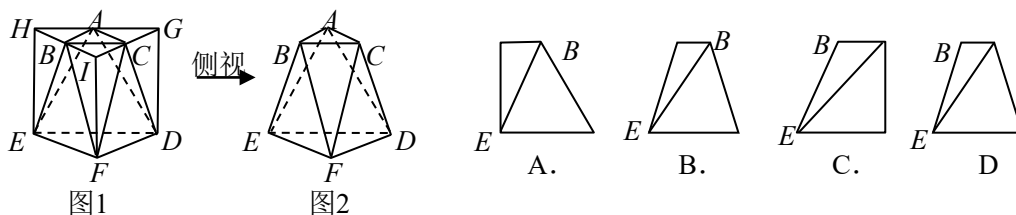
$$64 \times \frac{2}{8} = 16$$

4. 若变量  $x, y$  满足 
$$\begin{cases} 2x + y \leq 40, \\ x + 2y \leq 50, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$
 则  $z = 3x + 2y$  的最大值是 ( C )

- A. 90      B. 80      C. 70      D. 40

【解析】画出可行域,利用角点法易得答案C.

5. 将正三棱柱截去三个角(如图1所示  $A, B, C$  分别是  $\triangle GHI$  三边的中点)得到几何体如图2, 则该几何体按图2所示方向的侧视图(或称左视图)为 ( A )



【解析】解题时在图2的右边放扇墙(心中有墙),可得答案A.

6. 已知命题  $p$ : 所有有理数都是实数, 命题  $q$ : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是 ( D )

- A.  $(\neg p) \vee q$       B.  $p \wedge q$       C.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$       D.  $(\neg p) \vee (\neg q)$

【解析】不难判断命题  $p$  为真命题, 命题  $q$  为假命题, 从而上述叙述中只有  $(\neg p) \vee (\neg q)$  为真命题

7. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 若函数  $y = e^{ax} + 3x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  有大于零的极值点, 则 ( B )

- A.  $a > -3$       B.  $a < -3$       C.  $a > -\frac{1}{3}$       D.  $a < -\frac{1}{3}$

【解析】 $f'(x) = 3 + ae^{ax}$ , 若函数在  $x \in \mathbf{R}$  上有大于零的极值点, 即  $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$  有正根. 当有  $f'(x) = 3 + ae^{ax} = 0$  成立时, 显然有  $a < 0$ , 此时  $x = \frac{1}{a} \ln(-\frac{3}{a})$ , 由  $x > 0$  我们马上就能得到参数  $a$  的范围为  $a < -3$ .

8. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ,  $E$  是线段  $OD$  的中点,  $AE$  的延长线与  $CD$  交于点  $F$ . 若  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$ , 则  $\overrightarrow{AF} =$  ( B )

- A.  $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$       B.  $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$       C.  $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$       D.  $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

【解析】此题属于中档题. 解题关键是利用平面几何知识得出  $DF : FC = 1 : 2$ , 然后利用向量的加减法则易得答案B.

二、填空题: 本大题共7小题, 考生作答6小题, 每小题5分, 满分30分.

(一) 必做题 (9~12题)

9. 阅读图3的程序框图, 若输入  $m = 4$ ,  $n = 6$ , 则输出  $a = \underline{\quad}$ ,  $i = \underline{\quad}$

(注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“ $\leftarrow$ ”或“ $:=$ ”)

【解析】要结束程序的运算, 就必须通过  $n$  整除  $a$  的条件运算, 而同时  $m$  也整除  $a$ , 那么  $a$  的最小值应为  $m$  和  $n$  的最小公倍数12, 即此时有  $i = 3$ .

10. 已知  $(1+kx^2)^6$  ( $k$  是正整数) 的展开式中,  $x^8$  的系数小于120, 则  $k = \underline{\quad}$ .

【解析】 $(1+kx^2)^6$  按二项式定理展开的通项为  $T_{r+1} = C_6^r (kx^2)^r = C_6^r k^r x^{2r}$ ,

我们知道  $x^8$  的系数为  $C_6^4 k^4 = 15k^4$ , 即  $15k^4 < 120$ , 也即  $k^4 < 8$ ,

而  $k$  是正整数, 故  $k$  只能取1.

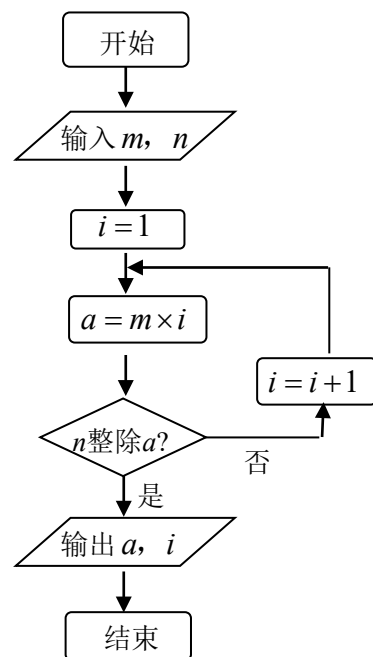


图3

11. 经过圆  $x^2 + 2x + y^2 = 0$  的圆心  $C$ , 且与直线  $x + y = 0$  垂直的直线

方程是\_\_\_\_\_.

【解析】易知点C为 $(-1, 0)$ ，而直线与 $x + y = 0$ 垂直，我们设待求的

直线的方程为 $y = x + b$ ，将点C的坐标代入马上就能求出参数 $b$ 的

值为 $b = 1$ ，故待求的直线的方程为 $x - y + 1 = 0$ 。

12. 已知函数 $f(x) = (\sin x - \cos x)\sin x$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期是\_\_\_\_\_.

【解析】 $f(x) = \sin^2 x - \sin x \cos x = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x$ ，此时可得函数的最小正周期

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

二、选做题（13—15题，考生只能从中选做两题）

13. （坐标系与参数方程选做题）已知曲线 $C_1$ ， $C_2$ 的极坐标方程分别为 $\rho \cos \theta = 3$ ，

$\rho = 4 \cos \theta \left( \rho \geq 0, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ ，则曲线 $C_1$ 与 $C_2$ 交点的极坐标为\_\_\_\_\_.

【解析】我们通过联立解方程组 $\begin{cases} \rho \cos \theta = 3 \\ \rho = 4 \cos \theta \end{cases} (\rho \geq 0, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$ 解得 $\begin{cases} \rho = 2\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ ，即两曲线的交

点为 $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ 。

14. （不等式选讲选做题）已知 $a \in \mathbf{R}$ ，若关于 $x$ 的方程 $x^2 + x + \left| a - \frac{1}{4} \right| + |a| = 0$ 有实根，

则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

【解析】方程即 $\left| a - \frac{1}{4} \right| + |a| = -x^2 - x \in [0, \frac{1}{4}]$ ，利用绝对值的几何意义(或零点分段法进行

求解)可得实数 $a$ 的取值范围为 $\left[ 0, \frac{1}{4} \right]$

15. （几何证明选讲选做题）已知 $PA$ 是圆 $O$ 的切线，切点为 $A$ ， $PA = 2$ 。 $AC$ 是圆 $O$ 的直径， $PC$ 与圆 $O$ 交于点 $B$ ， $PB = 1$ ，则圆 $O$ 的半径 $R =$ \_\_\_\_\_.

【解析】依题意，我们知道 $\Delta PBA \sim \Delta PAC$ ，

由相似三角形的性质我们有 $\frac{PA}{2R} = \frac{PB}{AB}$ ，

$$\text{即 } R = \frac{PA \cdot AB}{2PB} = \frac{2 \times \sqrt{2^2 - 1^2}}{2 \times 1} = \sqrt{3}.$$

三、解答题：本大题共6小题，满分80分。解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分13分)

已知函数  $f(x) = A\sin(x + \varphi)$  ( $A > 0, 0 < \varphi < \pi$ ),  $x \in \mathbf{R}$  的最大值是1, 其图像经过点

$$M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

(1) 求  $f(x)$  的解析式; (2) 已知  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且  $f(\alpha) = \frac{3}{5}$ ,  $f(\beta) = \frac{12}{13}$ , 求

$f(\alpha - \beta)$  的值.

【解析】(1) 依题意有  $A = 1$ , 则  $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ,

将点  $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$  代入得  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$ ,

而  $0 < \varphi < \pi$ ,  $\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{5}{6}\pi$ ,  $\therefore \varphi = \frac{\pi}{2}$ ,

故  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ;

(2) 依题意有  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{12}{13}$ , 而  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13},$$

$$f(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}.$$

17. (本小题满分13分)

随机抽取某厂的某种产品200件, 经质检, 其中有一等品126件、二等品50件、三等品20件、次品4件. 已知生产1件一、二、三等品获得的利润分别为6万元、2万元、1万元, 而1件次品亏损2万元. 设1件产品的利润(单位: 万元)为  $\xi$ .

(1) 求  $\xi$  的分布列; (2) 求1件产品的平均利润(即  $\xi$  的数学期望);

(3) 经技术革新后, 仍有四个等级的产品, 但次品率降为1%, 一等品率提高为70%. 如果此时要求1件产品的平均利润不小于4.73万元, 则三等品率最多是多少?

【解析】 $\xi$  的所有可能取值有6, 2, 1, -2;  $P(\xi = 6) = \frac{126}{200} = 0.63$ ,

$$P(\xi = 2) = \frac{50}{200} = 0.25$$

$$P(\xi = 1) = \frac{20}{200} = 0.1, \quad P(\xi = -2) = \frac{4}{200} = 0.02$$

故  $\xi$  的分布列为:

$\xi$	6	2	1	-2
$P$	0.63	0.25	0.1	0.02

$$(2) E\xi = 6 \times 0.63 + 2 \times 0.25 + 1 \times 0.1 + (-2) \times 0.02 = 4.34$$

(3) 设技术革新后的三等品率为  $x$ ，则此时1件产品的平均利润为

$$E(x) = 6 \times 0.7 + 2 \times (1 - 0.7 - 0.01 - x) + (-2) \times 0.01 = 4.76 - x (0 \leq x \leq 0.29)$$

依题意， $E(x) \geq 4.73$ ，即  $4.76 - x \geq 4.73$ ，解得  $x \leq 0.03$  所以三等品率最多为3%

18. (本小题满分14分)

设  $b > 0$ ，椭圆方程为  $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，抛物线方程为  $x^2 = 8(y - b)$ 。如图4所示，过点

$F(0, b+2)$  作  $x$  轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为  $G$ ，已知抛物线在点  $G$  的切线经过椭圆的右焦点  $F_1$ 。

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

(2) 设  $A, B$  分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点  $P$ ，使得  $\triangle ABP$  为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）。

【解析】(1) 由  $x^2 = 8(y - b)$  得  $y = \frac{1}{8}x^2 + b$ ，

当  $y = b + 2$  得  $x = \pm 4$ ，

$\therefore G$  点的坐标为  $(4, b + 2)$ ， $y' = \frac{1}{4}x$ ， $y'|_{x=4} = 1$ ，

过点  $G$  的切线方程为  $y - (b + 2) = x - 4$  即  $y = x + b - 2$ ，

令  $y = 0$  得  $x = 2 - b$ ， $\therefore F_1$  点的坐标为  $(2 - b, 0)$ ，

由椭圆方程得  $F_1$  点的坐标为  $(b, 0)$ ，

$\therefore 2 - b = b$  即  $b = 1$ ，即椭圆和抛物线的方程分别为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  和  $x^2 = 8(y - 1)$ ；

(2)  $\because$  过  $A$  作  $x$  轴的垂线与抛物线只有一个交点  $P$ ，

$\therefore$  以  $\angle PAB$  为直角的  $Rt\triangle ABP$  只有一个，

同理  $\therefore$  以  $\angle PBA$  为直角的  $Rt\triangle ABP$  只有一个。

若以  $\angle APB$  为直角，设  $P$  点坐标为  $(x, \frac{1}{8}x^2 + 1)$ ， $A, B$  两点的坐标分别为  $(-\sqrt{2}, 0)$

和  $(\sqrt{2}, 0)$ ，

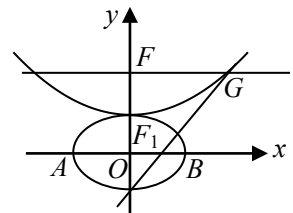


图4

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 2 + \left(\frac{1}{8}x^2 + 1\right)^2 = \frac{1}{64}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - 1 = 0.$$

关于  $x^2$  的二次方程有一大于零的解,  $\therefore x$  有两解, 即以  $\angle APB$  为直角的  $Rt\triangle ABP$  有两个,

因此抛物线上存在四个点使得  $\triangle ABP$  为直角三角形。

19. (本小题满分14分)

$$\text{设 } k \in \mathbf{R}, \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad F(x) = f(x) - kx, \quad x \in \mathbf{R}, \text{ 试讨论函数}$$

$F(x)$  的单调性.

$$\text{【解析】 } F(x) = f(x) - kx = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - kx, & x < 1, \\ -\sqrt{x-1} - kx, & x \geq 1, \end{cases} \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - k, & x < 1, \\ -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{对于 } F(x) = \frac{1}{1-x} - kx (x < 1),$$

当  $k \leq 0$  时, 函数  $F(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上是增函数;

当  $k > 0$  时, 函数  $F(x)$  在  $(-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{k}})$  上是减函数, 在  $(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}, 1)$  上是增函数;

$$\text{对于 } F(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k (x \geq 1),$$

当  $k \geq 0$  时, 函数  $F(x)$  在  $[1, +\infty)$  上是减函数;

当  $k < 0$  时, 函数  $F(x)$  在  $\left[1, 1 + \frac{1}{4k^2}\right)$  上是减函数, 在  $\left[1 + \frac{1}{4k^2}, +\infty\right)$  上是增函数。

20. (本小题满分14分)

如图5所示, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是半径为  $R$  的圆的内接四边形, 其中  $BD$  是圆的直径,  $\angle ABD = 60^\circ$ ,  $\angle BDC = 45^\circ$ ,  $PD$  垂直底面  $ABCD$ ,  $PD = 2\sqrt{2}R$ ,  $E, F$  分别是  $PB, CD$  上的点, 且  $\frac{PE}{EB} = \frac{DF}{FC}$ , 过点  $E$  作  $BC$  的平行线交  $PC$  于  $G$ .

(1) 求  $BD$  与平面  $ABP$  所成角  $\theta$  的正弦值;

(2) 证明:  $\triangle EFG$  是直角三角形;

(3) 当  $\frac{PE}{EB} = \frac{1}{2}$  时, 求  $\triangle EFG$  的面积.

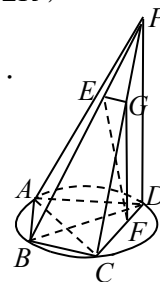


图5

【解析】(1) 在  $Rt\triangle BAD$  中,  $\because \angle ABD = 60^\circ$ ,  $\therefore AB = R, AD = \sqrt{3}R$

而  $PD$  垂直底面  $ABCD$ ,  $PA = \sqrt{PD^2 + AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}R)^2 + (\sqrt{3}R)^2} = \sqrt{11}R$

$$PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}R)^2 + (2R)^2} = 2\sqrt{3}R,$$

在  $\triangle PAB$  中,  $PA^2 + AB^2 = PB^2$ , 即  $\triangle PAB$  为以  $\angle PAB$  为直角的直角三角形。

设点  $D$  到面  $PAB$  的距离为  $H$ ,

由  $V_{P-ABD} = V_{D-PAB}$  有  $PA \cdot AB \cdot H = AB \cdot AD \cdot PD$ ,

即

$$H = \frac{AD \cdot PD}{PA} = \frac{\sqrt{3}R \cdot 2\sqrt{2}R}{\sqrt{11}R} = \frac{2\sqrt{66}}{11}R$$

$$\sin \theta = \frac{H}{BD} = \frac{\sqrt{66}}{11};$$

(2)  $EG \parallel BC$ ,  $\therefore \frac{PE}{EB} = \frac{PG}{GC}$ , 而  $\frac{PE}{EB} = \frac{DF}{FC}$ , 即  $\frac{PG}{GC} = \frac{DF}{DC}$ ,  $\therefore GF \parallel PD$ ,

$\therefore GF \perp BC$ ,

$\therefore GF \perp EG$ ,  $\therefore \triangle EFG$  是直角三角形;

(3)  $\frac{PE}{EB} = \frac{1}{2}$  时  $\frac{EG}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{GF}{PD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}$ ,

$$\text{即 } EG = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 2R \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{3}R, GF = \frac{2}{3}PD = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}R = \frac{4\sqrt{2}}{3}R,$$

$$\therefore \triangle EFG \text{ 的面积 } S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EG \cdot GF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}R \times \frac{4\sqrt{2}}{3}R = \frac{4}{9}R^2$$

21. (本小题满分12分)

设  $p, q$  为实数,  $\alpha, \beta$  是方程  $x^2 - px + q = 0$  的两个实根, 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = p$ ,

$$x_2 = p^2 - q, \quad x_n = px_{n-1} - qx_{n-2} \quad (n=3,4,\dots).$$

(1) 证明:  $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q$ ;

(2) 求数列  $\{x_n\}$  的通项公式;

(3) 若  $p=1, q=\frac{1}{4}$ , 求  $\{x_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

【解析】(1) 由求根公式, 不妨设  $\alpha < \beta$ , 得  $\alpha = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \beta = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = p,$$

$$\alpha\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \times \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = q$$

(2) 设  $x_n - sx_{n-1} = t(x_{n-1} - sx_{n-2})$ , 则  $x_n = (s+t)x_{n-1} - stx_{n-2}$ ,

$$\text{由 } x_n = px_{n-1} - qx_{n-2} \text{ 得 } \begin{cases} s+t = p \\ st = q \end{cases},$$

消去  $t$ , 得  $s^2 - ps + q = 0$ ,  $\therefore s$  是方程  $x^2 - px + q = 0$  的根,

由题意可知,  $s_1 = \alpha, s_2 = \beta$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \alpha \neq \beta \text{ 时, 此时方程组 } \begin{cases} s+t = p \\ st = q \end{cases} \text{ 的解记为 } \begin{cases} s_1 = \alpha \\ t_1 = \beta \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s_2 = \beta \\ t_2 = \alpha \end{cases}$$

$$\therefore x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}), x_n - \beta x_{n-1} = \alpha(x_{n-1} - \beta x_{n-2}),$$

即  $\{x_n - t_1 x_{n-1}\}$ 、 $\{x_n - t_2 x_{n-1}\}$  分别是公比为  $s_1 = \alpha$ 、 $s_2 = \beta$  的等比数列,

由等比数列性质可得  $x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-2}$ ,  $x_n - \beta x_{n-1} = (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-2}$ ,

两式相减, 得  $(\beta - \alpha)x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-2} - (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-2}$

$$\therefore x_2 = p^2 - q, x_1 = p, \therefore x_2 - \alpha x_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta, x_1 - \alpha = \alpha + \beta$$

$$\therefore (x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-2} = \beta^2 \cdot \beta^{n-2} = \beta^n, (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-2} = \alpha^2 \cdot \alpha^{n-2} = \alpha^n$$

$$\therefore (\beta - \alpha)x_{n-1} = \beta^n - \alpha^n,$$

$$\text{即 } \therefore x_{n-1} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \therefore x_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

$\textcircled{2}$  当  $\alpha = \beta$  时, 即方程  $x^2 - px + q = 0$  有重根,  $\therefore p^2 - 4q = 0$ ,

即  $(s+t)^2 - 4st = 0$ , 得  $(s-t)^2 = 0, \therefore s = t$ , 不妨设  $s = t = \alpha$ ,

由 $\textcircled{1}$ 可知

$$x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1)\alpha^{n-2}, \therefore \alpha = \beta, \therefore x_n - \alpha x_{n-1} = (x_2 - \alpha x_1)\alpha^{n-2} = \alpha^n$$

即  $\therefore x_n = \alpha x_{n-1} + \alpha^n$ , 等式两边同时除以  $\alpha^n$ , 得  $\frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + 1$ , 即  $\frac{x_n}{\alpha^n} - \frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}} = 1$

$\therefore$  数列  $\{\frac{x_n}{\alpha^n}\}$  是以1为公差的等差数列,

$$\therefore \frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_1}{\alpha} + (n-1) \times 1 = \frac{2\alpha}{\alpha} + n - 1 = n + 1, \therefore x_n = n\alpha^n + \alpha^n$$

$$\text{综上所述, } x_n = \begin{cases} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, (\alpha \neq \beta) \\ n\alpha^n + \alpha^n, (\alpha = \beta) \end{cases}$$

(3) 把  $p=1$ ,  $q=\frac{1}{4}$  代入  $x^2 - px + q = 0$ , 得  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ , 解得  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\therefore x_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = \left( \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + \left( \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left( \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3 - (n+3) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$