2005年湖南高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择）题两部分，满分150分.考试用时120分钟.

第Ⅰ卷（选择题）

一、选择题：本大题共10小，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设全集U={－2,－1,0,1,2}，A={－2,－1,0}，B={0,1,2}，则$(C_U A)\bigcap B$ =（　　）

A．{0}　　B．{－2，－1}　　C．{1，2}　　D．{0，1，2}

2．tan600°的值是（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

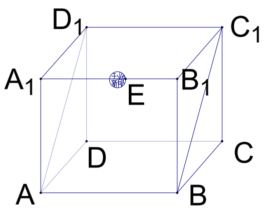
3．函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是　　（　　）

A．(－∞，0]　　B．[0，＋∞)　　C．(－∞，0)　　D．(－∞，＋∞)

4．如图，正方体ABCD－$A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，E是A_1B_1的中点，则E到平面AB C_1D_1的距离为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$



5．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0, a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in N^*)$，则$a_{20}$=（　　）

A．0　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6．设集合A＝{x|$\frac{x-1}{x+1}$<0}，B＝{x || x －1|<a}，若"a=1"是"$A\bigcap B\neq\varnothing$"的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

7．设直线的方程是$Ax+By=0$，从1，2，3，4，5这五个数中每次取两个不同的数作为A、B的值，则所得不同直线的条数是　　（　　）

A．20　　B．19　　C．18　　D．16

8. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为 F，右准线与一条渐近线交于点 A，△OAF 的面积为$\dfrac{a^2}{2}$（O 为原点），则两条渐近线的夹角为　（　　）

A. 30°　　　B. 45°　　　C. 60°　　　D. 90°

9. P 是△ABC 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是△ABC 的（　　）

A. 外心　　　B. 内心　　　C. 重心　　　D. 垂心

10. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车，利润（单位：万元）分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$，其中 x 为销售量（单位：辆）. 若该公司在这两地共销售 15 辆车，则能获得的最大利润为（　　）

A. 45.606　　　B. 45.6　　　C. 45.56　　　D. 45.51

第Ⅱ卷（非选择题）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分（第 15 小题每空 2 分），共 20 分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

11. 设直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于点 A、B，则弦 AB 的垂直平分线方程是__________.

12. 一工厂生产了某种产品 16800 件，它们来自甲、乙、丙 3 条生产线. 为检查这批产品的质量，决定采用分层抽样的方法进行抽样. 已知从甲、乙、丙 3 条生产线抽取的个体数组成一个等差数列，则乙生产线生产了________件产品.

13. 在 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^6$ 的展开式中，x^2 项的系数是________.（用数字作答）

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点（1，2）对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)$ ＝____.

15. 已知平面 α,β 和直线，给出条件：①$m//\alpha$；②$m\perp\alpha$；③$m\subset\alpha$；④$\alpha\perp\beta$；⑤$\alpha//\beta$.

（i）当满足条件____________时，有 $m//\beta$；（ii）当满足条件____________时，有 $m\perp\beta$.

（填所选条件的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}n\in N^*)$ 为等差数列，且 $a_1=3, a_3=9$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）证明 $\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n}<1.$

17.（本小题满分 12 分）

已知在△ABC 中，sinA（sinB＋cosB）－sinC＝0，sinB＋cos2C＝0，求角 A、B、C 的大小。

18.（本小题满分 14 分）

如图 1，已知 ABCD 是上．下底边长分别为 2 和 6，高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形，将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角，如图 2。

（Ⅰ）证明：$AC\perp BO_1$；

（Ⅱ）求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

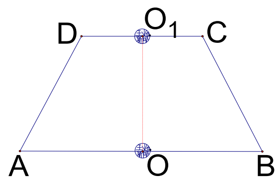


图 1

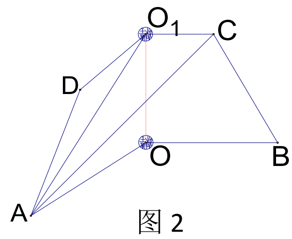


图 2

19.（本小题满分 14 分）

设 $t\neq 0$，点 P（t，0）是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图象的一个公共点，两函数的图象在点 P 处有相同的切线。

（Ⅰ）用 t 表示 a，b，c；

（Ⅱ）若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在（－1，3）上单调递减，求 t 的取值范围。

20.（本小题满分 14 分）

某单位组织 4 个部门的职工旅游，规定每个部门只能在韶山、衡山、张家界 3 个景区中任选一个，假设各部门选择每个景区是等可能的.

（Ⅰ）求 3 个景区都有部门选择的概率；

（Ⅱ）求恰有 2 个景区有部门选择的概率。

21.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$＞b＞0）的左．右焦点为 F_1、F_2，离心率为 e．直线 l：$y=ex+a$ 与 x 轴．y 轴分别交于点 A、B，M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点，P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

（Ⅰ）证明：$\lambda=1-e^2$；

（Ⅱ）若 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，△PF_1F_2的周长为 6；写出椭圆 C 的方程；

（Ⅲ）确定 λ 的值，使得△PF_1F_2是等腰三角形.

参考答案

一、选择题：1—5：CDABB　6—10：ACDDB

二、填空题：

11．$3x-2y-3=0$　12．5600　13．35　14．－2　15．③⑤　②⑤

三、解答题：

16．（I）解：设等差数列$\{\log_2(a_n-1)\}$的公差为 d.

由$a_1=3,a_3=9$得$2(\log_2 2+d)=\log_2 2+\log_2 8$,即 d=1.

所以$\log_2(a_n-1)=1+(n-1)\times=n$,即$a_n=2^n+1.$

（II）证明因为$\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{1}{a^{n+1}-2^n}=\dfrac{1}{2^n}$，

所以$\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

17．解法一　由$\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$

得$\sin A\sin B+\sin A\cos B-\sin(A+B)=0.$

所以$\sin A\sin B+\sin A\cos B-\sin A\cos B-\cos A\sin B=0.$

即$\sin B(\sin A-\cos A)=0.$

因为$B\in(0,\pi)$,所以$\sin B\neq0$，从而$\cos A=\sin A.$

由$A\in(0,\pi)$,知$A=\dfrac{\pi}{4}$. 从而$B+C=\dfrac{3}{4}\pi$.

由$\sin B+\cos 2C=0$得$\sin B+\cos 2(\dfrac{3}{4}\pi-B)=0.$

即$\sin B-\sin 2B=0$.亦即$\sin B-2\sin B\cos B=0.$

由此得 $\cos B=\frac{1}{2}, B=\frac{\pi}{3}, C=\frac{5\pi}{12}$. 所以 $A=\frac{\pi}{4},\ B=\frac{\pi}{3}, C=\frac{5\pi}{12}$.

解法二：由 $\sin B+\cos 2C=0$ 得 $\sin B=-\cos 2C=\sin(\frac{3\pi}{2}-2C)$.

由 $0<B$、$c<\pi$，所以 $B=\frac{3\pi}{2}-2C$ 或 $B=2C-\frac{\pi}{2}$.

即 $B+2C=\frac{3\pi}{2}$ 或 $2C-B=\frac{\pi}{2}$.

由 $\sin A(\sin B+\cos B)-\sin C=0$ 得 $\sin A\sin B+\sin A\cos B-\sin(A+B)=0$.

所以 $\sin A\sin B+\sin A\cos B-\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$.

即 $\sin B(\sin A-\cos A)=0$.　　　因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\sin A$.

由 $A\in(0,\pi)$, 知 $A=\frac{\pi}{4}$. 从而 $B+C=\frac{3}{4}\pi$，知 B+2C=$\frac{3\pi}{2}$ 不合要求.

再由 $2C-B=\frac{1}{2}\pi$，得 $B=\frac{\pi}{3}, C=\frac{5\pi}{12}$.　所以 $A=\frac{\pi}{4},\ B=\frac{\pi}{3}, C=\frac{5\pi}{12}$.

18．解法一（I）证明　由题设知 $OA\perp OO_1$，$OB\perp OO_1$.

所以∠AOB 是所折成的直二面角的平面角，

即 OA⊥OB. 故可以 O 为原点，OA、OB、OO_1

所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

如图 3，则相关各点的坐标是 A（3，0，0），

B（0，3，0），C（0，1，$\sqrt{3}$）

O_1（0，0，$\sqrt{3}$）.

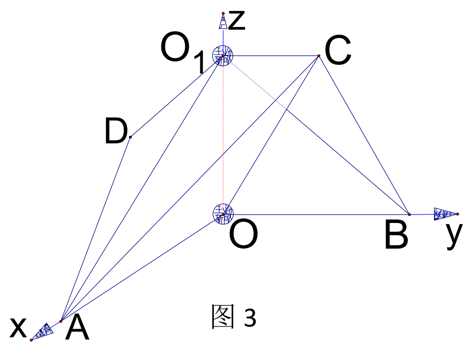


图 3

从而 $\overrightarrow{AC}=(-3,1,\sqrt{3}), \overrightarrow{BO_1}=(0,-3,\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO_1}=-3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=0.$

所以 $AC\perp BO_1$.

（II）解：因为 $\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{OC}=-3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=0,$ 所以 $BO_1\perp OC$，

由（I）$AC\perp BO_1$，所以 $BO_1\perp$ 平面 OAC，$\overrightarrow{BO_1}$ 是平面 OAC 的一个法向量.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是 0 平面 O_1AC 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{O_1C}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+y+\sqrt{3}z=0,\\ y=0.\end{cases}$　　取 $z=\sqrt{3}$,　　得 $\vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$.

设二面角 O—AC—O_1 的大小为 θ，由 $\vec{n}$、$\overrightarrow{BO_1}$ 的方向可知 $\theta=<\vec{n}$，$\overrightarrow{BO_1}>$，

所以 $\cos\theta=\cos<\vec{n}$，$\overrightarrow{BO_1}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BO_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BO_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

即二面角 O—AC—O_1 的大小是 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解法二（I）证明 由题设知 OA⊥OO_1，OB⊥OO_1，

所以∠AOB 是所折成的直二面角的平面角，

即 OA⊥OB. 从而 AO⊥平面 $OBCO_1$，

OC 是 AC 在面 $OBCO_1$ 内的射影.

因为 $\tan\angle OO_1B=\dfrac{OB}{OO_1}=\sqrt{3}$ $\qquad \tan\angle O_1OC=\dfrac{O_1C}{OO_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以∠OO_1B=60°，∠O_1OC=30°，从而 OC⊥BO_1

由三垂线定理得 AC⊥BO_1.

（II）解 由（I）AC⊥BO_1，OC⊥BO_1，知 BO_1⊥平面 AOC.

设 OC∩O_1B=E，过点 E 作 EF⊥AC 于 F，连结 O_1F（如图 4），则 EF 是 O_1F 在平面 AOC 内的射影，由三垂线定理得 O_1F⊥AC.

所以∠O_1FE 是二面角 O—AC—O_1 的平面角.

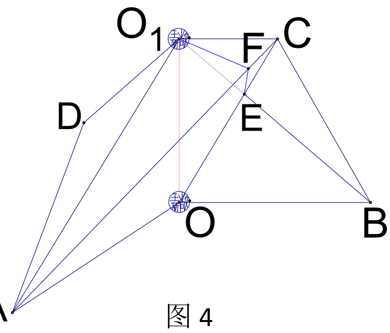


图 4

由题设知 OA=3，$OO_1=\sqrt{3}$，O_1C=1，

所以

$$O_1A=\sqrt{OA^2+OO_1^2}=2\sqrt{3}, AC=\sqrt{O_1A^2+O_1C^2}=\sqrt{13},$$

从而 $O_1F=\dfrac{O_1A\cdot O_1C}{AC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$， 又 $O_1E=OO_1\cdot\sin30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\angle O_1FE=\dfrac{O_1E}{O_1F}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. 即二面角 O—AC—$O_1$ 的大小是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

19．解：（I）因为函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都过点（t，0），所以 $f(t)=0$，

即 $t^3+at=0$. 因为 $t\neq 0$, 所以 $a=-t^2$.

$g(t)=0$, 即 $bt^2+c=0$, 所以 $c=ab$.

又因为 $f(x)$，$g(x)$ 在点（t，0）处有相同的切线，所以 $f'(t)=g'(t)$.

而 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$, 所以 $3t^2+a=2bt$.

将 $a=-t^2$ 代入上式得 $b=t$. 因此 $c=ab=-t^3$. 故 $a=-t^2$，$b=t$，$c=-t^3$.

（II）解法一 $y=f(x)-g(x)=x^3-t^2x-tx^2+t^3, y'=3x^2-2tx-t^2=(3x+t)(x-t)$.

当 $y'=(3x+t)(x-t)<0$ 时，函数 $y=f(x)-g(x)$ 单调递减.

由 $y'<0$，若 $t>0$, 则 $-\dfrac{t}{3}<x<t$；若 $t<0$, 则 $t<x<-\dfrac{t}{3}$.

由题意，函数 $y=f(x)-g(x)$ 在（－1，3）上单调递减，则

$(-1,3)\subset(-\frac{t}{3},t)$或$(-1,3)\subset(t,-\frac{t}{3}).$

所以$t\geq 3$或$-\frac{t}{3}\geq 3$.即$t\leq -9$或$t\geq 3.$

又当$-9<t<3$时，函数 $y=f(x)-g(x)$ 在（－1，3）上单调递减.

所以t的取值范围为$(-\infty,-9]\cup[3,+\infty).$

解法二：$y=f(x)-g(x)=x^3-t^2x-tx^2+t^3, y'=3x^2-2tx-t^2=(3x+t)(x-t)$

因为函数 $y=f(x)-g(x)$ 在（－1，3）上单调递减，且 $y'=(3x+t)(x-t)$ 是（－1，3）上的抛物线，

所以$\begin{cases} y'|_{x=-1}\leq 0, \\ y'|_{x=3}\leq 0. \end{cases}$ 即$\begin{cases} (-3+t)(-1-t)\leq 0. \\ (9+t)(3-t)\leq 0. \end{cases}$解得$t\leq -9$或$t\geq 3.$

所以t的取值范围为$(-\infty,-9]\cup[3,+\infty).$

20．解：某单位的 4 个部门选择 3 个景区可能出现的结果数为 3^4. 由于是任意选择，这些结果出现的可能性都相等.

（I）3 个景区都有部门选择可能出现的结果数为$C_4^2\cdot 3!$（从 4 个部门中任选 2 个作为 1 组，另外 2 个部门各作为 1 组，共 3 组，共有$C_4^2=6$种分法，每组选择不同的景区，共有 3！种选法），记“3 个景区都有部门选择”为事件 A_1，那么事件 A_1 的概率为

P（A_1）$=\frac{C_4^2\cdot 3!}{3^4}=\frac{4}{9}.$

（II）解法一：分别记“恰有 2 个景区有部门选择”和“4 个部门都选择同一个景区”为事件 A_2 和 A_3，则事件 A_3 的概率为 P（A_3）$=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{27}$，事件 A_2 的概率为

P（A_2）=1－P（A_1）－P（A_3）$=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{27}=\frac{14}{27}.$

解法二：恰有 2 个景区有部门选择可能的结果为$3(C_4^1\cdot 2!+C_4^2)$.（先从 3 个景区任意选定 2 个，共有$C_3^2=3$种选法，再让 4 个部门来选择这 2 个景区，分两种情况：第一种情况，从 4 个部门中任取 1 个作为 1 组，另外 3 个部门作为 1 组，共 2 组，每组选择 2 个不同的景区，共有$C_4^1\cdot 2!$种不同选法. 第二种情况，从 4 个部门中任选 2 个部门到 1 个景区，另外 2 个部门在另 1 个景区，共有 C_4^2种不同选法）. 所以 P（A_2）=

$$\frac{3(C_4^2\cdot 2!+C_4^2)}{3^4}=\frac{14}{27}.$$

21.（Ⅰ）证法一：因为A、B分别是直线 *l*：$y=ex+a$ 与 x 轴、y轴的交点，

所以A、B的坐标分别是 $(-\frac{a}{e},0),(0,a)$.

由 $\begin{cases} y=ex+a, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-c, \\ y=\frac{b^2}{a}. \end{cases}$ 这里 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

所以点M的坐标是（$-c,\frac{b^2}{a}$）.

由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得 $(-c+\frac{a}{e},\frac{b^2}{a})=\lambda(\frac{a}{e},a)$.

即 $\begin{cases} \frac{a}{e}-c=\lambda\frac{a}{e} \\ \frac{b^2}{a}=\lambda a \end{cases}$，解得 $\lambda=1-e^2$

证法二：因为A、B分别是直线 *l*：$y=ex+a$ 与 x 轴、y轴的交点，所以A、B的坐标分别是 $(-\frac{a}{e},0),(0,a)$. 设M的坐标是 (x_0,y_0),

由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得 $(x_0+\frac{a}{e},y_0)=\lambda(\frac{a}{e},a)$,

所以 $\begin{cases} x_0=\frac{a}{e}(\lambda-1) \\ y_0=\lambda a. \end{cases}$

因为点M在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

即 $\frac{[\frac{a}{e}(\lambda-1)]^2}{a^2}+\frac{(\lambda a)^2}{b^2}=1$, 所以 $\frac{(1-\lambda)^2}{e^2}+\frac{\lambda^2}{1-e^2}=1$.

$e^4-2(1-\lambda)e^2+(1-\lambda)^2=0$,

解得 $e^2=1-\lambda$ 即 $\lambda=1-e^2$.

（Ⅱ）当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$c=\frac{1}{2}$，所以 $a=2c$.

由△MF_1F_2的周长为6，得$2a+2c=6.$

所以$a=2,c=1,b^2=a^2-c^2=3.$

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$

（III）解法一：因为$PF_1\perp l$，所以$\angle PF_1F_2=90°+\angle BAF_1$为钝角，要使△$PF_1F_2$为等腰三角形，必有$|PF_1|=|F_1F_2|$，即$\frac{1}{2}|PF_1|=c.$

设点F_1到l的距离为d，由$\frac{1}{2}|PF_1|=d=\frac{|e(-c)+0+a|}{\sqrt{1+e^2}}=\frac{|a-ec|}{\sqrt{1+e^2}}=c,$

得$\frac{1-e^2}{\sqrt{1+e^2}}=e.$

所以$e^2=\frac{1}{3},$于是$\lambda=1-e^2=\frac{2}{3}.$

即当$\lambda=\frac{2}{3}$时,△PF_1F_2为等腰三角形.

解法二：因为$PF_1\perp l$，所以$\angle PF_1F_2=90°+\angle BAF_1$为钝角，要使△$PF_1F_2$为等腰三角形，必有$|PF_1|=|F_1F_2|$，

设点P的坐标是(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}\frac{y_0-0}{x_0+c}=-\frac{1}{e}\\ \frac{y_0+0}{2}=e\frac{x_0-c}{2}+a.\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=\frac{e^2-3}{e^2+1}c,\\ y_0=\frac{2(1-e^2)a}{e^2+1}.\end{cases}$

由$|PF_1|=|F_1F_2|$得$[\frac{(e^2-3)c}{e^2+1}+c]^2+[\frac{2(1-e^2)a}{e^2+1}]^2=4c^2,$

两边同时除以$4a^2$，化简得$\frac{(e^2-1)^2}{e^2+1}=e^2.$

从而$e^2=\frac{1}{3}.$

于是$\lambda=1-e^2=\frac{2}{3}$.　　即当$\lambda=\frac{2}{3}$时，△$PF_1F_2$为等腰三角形.