2004年广东高考数学真题及答案

满分150分

第Ⅰ卷

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

函数求导公式

$(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$

$f'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$，其中 $u=\varphi(x)$

锥体体积公式

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示底面积，h 表示高

球的体积公式

$V_{球体}=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一．选择题（共12小题，每题5分，计60分）

（1）已知平面向量 $\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(x,-3)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x=

（A） -3　　（B） -1　　（C） 1　　（D） 3

（2）已知 $A=\{x\,|\,|2x+1|>3\}$，$B=\{x\,|\,x^2+x\leq 6\}$，则 $A\cap B=$

（A）$[-3,-2)\cup(1,2]$　　（B）$[-3,-2)\cup(1,+\infty)$

（C）$(-3,-2]\cup[1,2)$　　（D）$(-\infty,-3]\cup(1,2]$

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+2}{x^2-4}-\frac{2}{x-2} & (x>2)\\ a & (x\leq 2)\end{cases}$ 在 x=2 处连续，则 a=

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\frac{1}{3}$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{3}{n+1}-\cdots+\frac{2n-1}{n+1}-\frac{2n}{n+1}\right)$ 的值为

（A） -1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

（5）函数 f（x）$=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 是

（A）周期为 π 的偶函数　　（B）周期为 π 的奇函数

（C）周期为 2π 的偶函数　　（D）周期为 2π 的奇函数

（6）一台 X 型号自动机床在一小时内不需要工人照看的概率为 0.8000，有四台这种型号的自动机床各自独立工作，则在一小时内至多 2 台机床需要工人照看的概率是

（A）0.1536　　（B） 0.1808　　（C） 0.5632　　（D） 0.9728

（7）在棱长为 1 的正方体上，分别用过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体，则截去 8 个三棱锥后，剩下的凸多面体的体积是

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{7}{6}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{5}{6}$

（8）若双曲线 $2x^2-y^2=k$（k＞0）的焦点到它相对应的准线的距离是 2，则 k=

（A） 6　　（B） 8　　（C） 1　　（D） 4

（9）当 0＜x＜$\frac{\pi}{4}$时，函数 f（x）＝$\frac{\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x-\sin^2 x}$的最小值是

（A） 4　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）2　　（D）$\frac{1}{4}$

（10）变量 x、y 满足下列条件：$\begin{cases}2x+y\geq 12\\2x+9y\geq 36\\2x+3y=24\\x\geq 0,y\geq 0\end{cases}$，则使 z=3x+2y 的值最小的（x，y）是

（A）（4.5，3）　（B）（3，6）　（C）（9，2）　（D）（6，4）

（11）若 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则

（A） $f(-1)>f(0)>f(1)$　　（B） $f(0)>f(1)>f(-1)$

（C） $f(1)>f(0)>f(-1)$　　（D） $f(0)>f(-1)>f(1)$

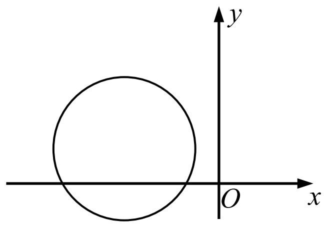
（12）如右下图，定圆半径为 a，圆心为（b ，c）， 则直线 ax+by+c=0 与直线 x－y+1=0 的交点在

（A）第四象限

（B）第三象限

（C）第二象限

（D）第一象限

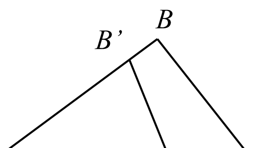


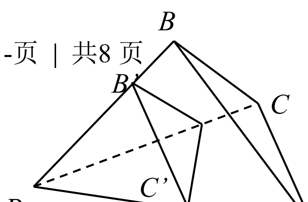
二. 填空题（共 4 小题，每题 4 分，计 16 分）

（13）某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成，现从中选出 2 人担任正副班长，其中至少有 1 名女生当选的概率是__________________（用分数作答）

（14）已知复数 z 与 $(z+2)^2-8i$ 均是纯虚数，则 z ＝ ______.

（15）由图（1）有面积关系：$\frac{S_{\Delta PA'B'}}{S_{\Delta PAB}}=\frac{PA'\cdot PB'}{PA\cdot PB}$，则由图（2）有体积关系：$\frac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=$_______.





（16）函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-1)$（x＞0）的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

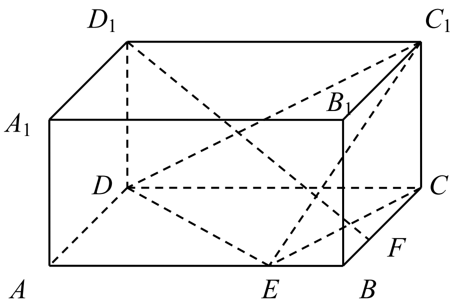
三. 解答题（共 6 小题，74 分）

（17）（12 分）已知α，β，γ成公比为 2 的等比数列（α∈[0，2π]），且 sinα，sinβ，sinγ也成等比数列. 求α，β，γ的值.

（18）（12 分）如右下图，在长方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 AB= 4， AD =3， AA_1= 2. E、F 分别是线段 AB、BC 上的点，且 EB= FB=1.

（Ⅰ）求二面角 C—DE—C_1 的正切值;

（Ⅱ）求直线 EC_1 与 FD_1 所成的余弦值.



（19）（12 分）设函数 $f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|$（x＞0）.

（Ⅰ）证明: 当 0＜a＜b ，且 $f(a)=f(b)$ 时，ab＞1;

（Ⅱ）点 P（x_0，y_0）（0＜x_0＜1 ）在曲线 $y=f(x)$ 上，求曲线在点 P 处的切线与 x 轴和 y 轴的正向所围成的三角形面积表达式（用 x_0 表达）.

（20）（12 分）某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响，正东观测点听到的时间比其他两观测点晚 4s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1020m. 试确定该巨响发生的位置.（假定当时声音传播的速度为 340m/s ，相关各点均在同一平面上）

（21）（12 分）设函数 $f(x)=x-\ln(x+m)$，其中常数 m 为整数.

（Ⅰ）当 m 为何值时，$f(x)\geqslant 0$;

（Ⅱ）定理：若函数 g（x） 在[a，b]上连续，且 g（a）与 g（b）异号，则至少存在一点 x_0∈（a，b)，使 g（x_0）=0.

试用上述定理证明：当整数 m＞1 时，方程 f（x） = 0，在[$e^{-m}-m$ ，$e^{2m}-m$]内有两个实根.

（22）（14 分）设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 相交于 A、B 两点，l 又与双曲线 $x^2-y^2=1$ 相交于 C、D 两点，C、D 三等分线段 AB. 求直线 l 的方程.

参考答案

一、选择题

CACAB　　DDAAB　　DB

二、填空题：

（13）$\frac{5}{7}$　（14）$-2i$　(15) $\frac{PA'\cdot PB'\cdot PC'}{PA\cdot PB\cdot PC}$　　(16) $e^{2x}+2e^{x}\quad(x\in R)$

三、解答题

17．解：∵α，β，γ成公比为 2 的等比数列，∴β=2α，γ=4α

∵sinα，sinβ，sinγ成等比数列

$\therefore \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=2\cos^2\alpha-1$

即$2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=0$

解得$\cos\alpha=1$,或$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

当 cosα=1 时，sinα=0, 与等比数列的首项不为零，故 cosα=1 应舍去，

当$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\alpha\in[0,2\pi]$时,$\alpha=\frac{2\pi}{3}$或$\alpha=\frac{4\pi}{3}$,

所以$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{4\pi}{3},\gamma=\frac{8\pi}{3}$或$\alpha=\frac{4\pi}{3},\beta=\frac{8\pi}{3},\gamma=\frac{16\pi}{3}$

18．解：（I）以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正向建立空间直角坐标系，则有

D(0, 3, 0)、D_1(0, 3, 2)、E(3, 0, 0)、F(4, 1, 0)、C_1(4, 3, 2)

于是，$\overrightarrow{DE}=(3,-3,0),\overrightarrow{EC_1}=(1,3,2),\overrightarrow{FD_1}=(-4,2,2)$

设向量$\vec{n}=(x,y,z)$与平面 C_1DE 垂直，则有

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp\overrightarrow{DE}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{EC_1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-3y=0\\ x+3y+2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}z$$

$\therefore \vec{n}=(-\frac{z}{2},-\frac{z}{2},z)=\frac{z}{2}(-1,-1,2)$,其中$z>0$

取$\overrightarrow{n_0}=(-1,-1,2)$,则$\overrightarrow{n_0}$是一个与平面$C_1DE$垂直的向量,

$\because$ 向量$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$与平面$CDE$垂直,

$\therefore \overrightarrow{n_0}$与$\overrightarrow{AA_1}$所成的角$\theta$为二面角$C-DE-C_1$的平面角

$$\because \cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_0}\bullet\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{n_0}|\times|\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{-1\times0-1\times0+2\times2}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{0+0+4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（II）设 EC_1 与 FD_1 所成角为β，则

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{EC_1}\bullet\overrightarrow{FD_1}}{|\overrightarrow{EC_1}|\times|\overrightarrow{FD_1}|}=\frac{1\times(-4)+3\times2+2\times2}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\times\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$$

19.证明：(I)

$$\because f(x)=|1-\frac{1}{x}|=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, & x\in(0,1]\\ 1-\frac{1}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

故 f(x)在（0，1]上是减函数，而在（1，+∞）上是增函数，由 0<a<b 且 f(a)=f(b)得 0<a<1<b 和

$\frac{1}{a}-1=1-\frac{1}{b}$,即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Rightarrow 2ab=a+b>2\sqrt{ab}$

故$\sqrt{ab}>1$,即$ab>1$

（II）0<x<1 时，$y=f(x)=|1-\frac{1}{x}|=\frac{1}{x}-1,\therefore f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2},0<x_0<1$

曲线 y=f(x)在点 P（x_0，y_0）处的切线方程为：

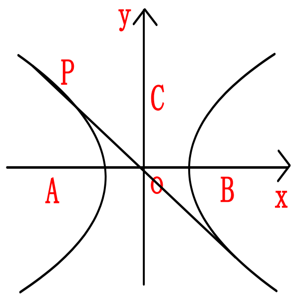
$$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0),即y=-\frac{x}{x_0^2}+\frac{2-x_0}{x_0}$$

∴切线与 x 轴、y 轴正向的交点为$(x_0(2-x_0),0)$和$(0,\frac{1}{x_0}(2-x_0))$

故所求三角形面积的表达式为：

$$A\ (x_0)=\frac{1}{2}x_0(2-x_0)\cdot\frac{1}{x_0}(2-x_0)=\frac{1}{2}(2-x_0)^2$$

20．解：如图，



以接报中心为原点 O，正东、正北方向为 x 轴、y 轴正向，建立直角坐标系．设 A、B、C 分别是西、东、北观测点，则 A（－1020，0），B（1020，0），C（0，1020）

设 P（x,y）为巨响为生点，由 A、C 同时听到巨响声，得|PA|=|PB|，故 P 在 AC 的垂直平分线 PO 上，PO 的方程为 y=－x，因 B 点比 A 点晚 4s 听到爆炸声，故|PB|－ |PA|=340×4=1360

由双曲线定义知 P 点在以 A、B 为焦点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，

依题意得 a=680, c=1020,

$\therefore b^2=c^2-a^2=1020^2-680^2=5\times 340^2$

故双曲线方程为$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times 340^2}=1$

用 y=－x 代入上式，得 $x=\pm 680\sqrt{5}$，∵|PB|>|PA|,

$\therefore x=-680\sqrt{5}, y=680\sqrt{5}$,即$P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$,故$PO=680\sqrt{10}$

答：巨响发生在接报中心的西偏北 45°，距中心 $680\sqrt{10}m$ 处.

21.（I）解：函数 f(x)=x-ln(x+m),x∈(-m,+∞)连续，且

$f'(x)=1-\frac{1}{x+m}$,令$f'(x)=0$,得$x=1-m$

当 x∈(-m,1-m)时,f ′（x）<0,f(x)为减函数,f(x)>f(1-m)

当 x∈(1-m, +∞)时,f ′（x）>0,f(x)为增函数,f(x)>f(1-m)

根据函数极值判别方法，f(1-m)=1-m 为极小值，而且

对 x∈(-m, +∞)都有 f(x)≥f(1-m)=1-m

故当整数 m≤1 时，f(x) ≥1-m≥0

(II)证明：由（I）知，当整数 m>1 时，f(1-m)=1-m<0,

函数 f(x)=x-ln(x+m),在$[e^{-m}-m,1-m]$ 上为连续减函数.

$f(e^{-m}-m)=e^{-m}-m-\ln(e^{-m}-m+m)=e^{-m}>0$

当整数$m>1$时,$f(e^{-m}-m)$与$f(1-m)$异号,

由所给定理知，存在唯一的 $x_1\in(e^{-m}-m,1-m)$,使$f(x_1)=0$

而当整数 m>1 时，

$$f(e^{2m}-m)=e^{2m}-3m>(1+1)^{2m}-3m>1+2m+\frac{2m(2m-1)}{2}-3m>0$$

$(\because m>1\Rightarrow 2m-1>1,$ 上述不等式也可用数学归纳法证明)

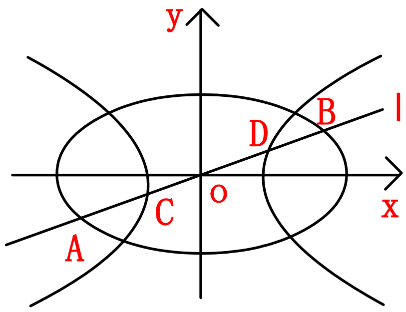
类似地，当整数 m>1 时，函数 f(x)=x-ln(x+m)，在 $[1-m,e^{-m}-m]$ 上为连续增函数且 f(1-m)与 $f(e^{2m}-m)$

异号，由所给定理知，存在唯一的 $x_2\in[1-m,e^{-m}-m,]$，使 $f(x_2)=0$

故当 m>1 时，方程 f(x)=0 在 $[e^{-m}-m,e^{2m}-m]$ 内有两个实根。

22．解：首先讨论 l 不与 x 轴垂直时的情况，设直线 l 的方程为 y=kx+b，如图所示，l 与椭圆、双曲线的交点为：

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$



依题意有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$，由

$$\begin{cases}y=kx+b\\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\end{cases}\text{得}(16+25k^2)x^2-2bkx+(25b^2-400)=0\ldots(1)$$

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{50bk}{16+25k^2}$$

$$\text{由}\begin{cases}y=kx+b\\ x^2-y^2=1\end{cases}\text{得}(1-k^2)x^2-2bkx-(b^2+1)=0\ldots(2)$$

若 $k=\pm1$，则与双曲线最多只有一个交点，不合题意，故 $k\neq\pm1$

$$\therefore x_3+x_4=\frac{2bk}{1-k^2}$$

由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}\Rightarrow x_3-x_1=x_2-x_4\Rightarrow x_1+x_2=x_3+x_4$

$\Rightarrow -\dfrac{50bk}{16+25k^2}=\dfrac{2bk}{1-k^2}\Rightarrow bk=0\Rightarrow k=0或b=0$

$(i)当k=0时,由(1)得x_{1,2}=\pm\dfrac{5}{4}\sqrt{16-b^2},由(2)得x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2+1}$

$由\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow x_2-x_1=3(x_4-x_3),即\dfrac{10}{4}\sqrt{16-b^2}=6\sqrt{b^2+1}\Rightarrow b=\pm\dfrac{16}{13}$

故 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{16}{13}$

(ii)当 b=0 时，由(1)得

$x_{1,2}=\pm\dfrac{20}{\sqrt{16+25k^2}},由(2)得x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

$由由\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow x_2-x_1=3(x_4-x_3)即\dfrac{40}{\sqrt{16+25k^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{1-k^2}}\Rightarrow k=\pm\dfrac{16}{25}$

故 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{16}{25}x$

再讨论 l 与 x 轴垂直的情况.

设直线 l 的方程为 x=c,分别代入椭圆和双曲线方程可解得，

$y_{1,2}=\pm\dfrac{4}{5}\sqrt{25-c^2},y_{3,4}=\pm\sqrt{c^2-1}$

$由|\overrightarrow{AB}|=3|\overrightarrow{CD}|\Rightarrow|y_2-y_1|=3|y_4-y_3|$

$即\dfrac{8}{5}\sqrt{25-c^2}=6\sqrt{c^2-1}\Rightarrow c=\pm\dfrac{25\sqrt{241}}{241}$

$故l的方程为x=\pm\dfrac{25\sqrt{241}}{241}$

综上所述，故 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{16}{13}$ 、 $y=\pm\dfrac{16}{25}x$ 和 $x=\pm\dfrac{25\sqrt{241}}{241}$