2008年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）函数$y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$的定义域为（　　）

A．$\{x|x\geq 0\}$　B．$\{x|x\geq 1\}$　C．$\{x|x\geq 1\}\cup\{0\}$　D．$\{x|0\leq x\leq 1\}$

【考点】33：函数的定义域及其求法．

【分析】偶次开方的被开方数一定非负．$x(x-1)\geq 0$，$x\geq 0$，解关于x的不等式组，即为函数的定义域．

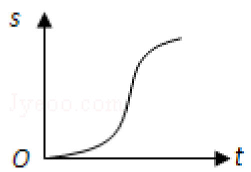
【解答】解：由$x(x-1)\geq 0$，得$x\geq 1$，或$x\leq 0$．

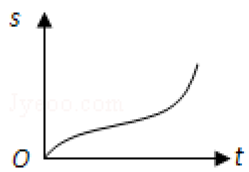
又因为$x\geq 0$，所以$x\geq 1$，或$x=0$；所以函数的定义域为$\{x|x\geq 1\}\cup\{0\}$

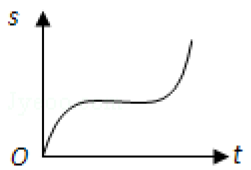
故选：C．

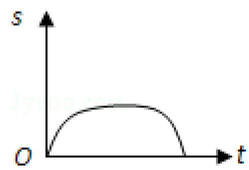
【点评】定义域是高考必考题通常以选择填空的形式出现，通常注意偶次开方一定非负，分式中分母不能为0，对数函数的真数一定要大于0，指数和对数的底数大于0且不等于1．另外还要注意正切函数的定义域．

2．（5分）汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，若把这一过程中汽车的行驶路程s看作时间t的函数，其图象可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

【考点】3A：函数的图象与图象的变换．

【专题】16：压轴题；31：数形结合．

【分析】由已知中汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，汽车的行驶路程s看作时间t的函数，我们可以根据实际分析函数值S（路程）与自变量t（时间）之间变化趋势，分析四个答案即可得到结论.

【解答】解：由汽车经过启动后的加速行驶阶段，

路程随时间上升的速度越来越快，

故图象的前边部分为凹升的形状；

在汽车的匀速行驶阶段，

路程随时间上升的速度保持不变

故图象的中间部分为平升的形状；

在汽车减速行驶之后停车阶段，

路程随时间上升的速度越来越慢，

故图象的前边部分为凸升的形状；

分析四个答案中的图象，

只有A答案满足要求，

故选：A.

【点评】从左向右看图象，如果图象是凸起上升的，表明相应的量增长速度越来越慢；如果图象是凹陷上升的，表明相应的量增长速度越来越快；如果图象是直线上升的，表明相应的量增长速度保持不变；如果图象是水平直线，表明相应的量保持不变，即不增长也不降低；如果图象是凸起下降的，表明相应的量降低速度越来越快；如果图象是凹陷下降的，表明相应的量降低速度越来越慢；如果图象是直线下降的，表明相应的量降低速度保持不变.

曹宝辉高中物理 www.caobaohuiwuli.com

3．（5分）在△ABC中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$．若点D满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　B．$\frac{5}{3}\overrightarrow{c}-\frac{2}{3}\overrightarrow{b}$　　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{b}-\frac{1}{3}\overrightarrow{c}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$

【考点】9B：向量加减混合运算.

【分析】把向量用一组向量来表示，做法是从要求向量的起点出发，尽量沿着已知向量，走到要求向量的终点，把整个过程写下来，即为所求．本题也可以根据D点把BC分成一比二的两部分入手.

【解答】解：∵由$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，

∴$3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}$，

∴$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{c}+\frac{2}{3}\overrightarrow{b}$.

故选：A.

【点评】用一组向量来表示一个向量，是以后解题过程中常见到的，向量的加减运算是用向量解决问题的基础，要学好运算，才能用向量解决立体几何问题，三角函数问题，好多问题都是以向量为载体的

4．（5分）设a∈R，且$(a+i)^2i$为正实数，则a=（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．﹣1

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义．

【分析】注意到a+bi（a，b∈R）为正实数的充要条件是a＞0，b=0

【解答】解：$(a+i)^2i=(a^2+2ai-1)i=-2a+(a^2-1)i>0$，a=﹣1．故选D．

【点评】本题的计算中，要注意到相应变量的范围．

5．（5分）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则它的前10项的和S_{10}=（　　）

A．138　　B．135　　C．95　　D．23

【考点】83：等差数列的性质；85：等差数列的前n项和．

【专题】11：计算题．

【分析】本题考查的知识点是等差数列的性质，及等差数列前n项和，根据$a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$我们构造关于基本量（首项及公差）的方程组，解方程组求出基本量（首项及公差），进而代入前n项和公式，即可求解．

【解答】解：∵$(a_3+a_5)-(a_2+a_4)=2d=6$，

∴$d=3$，$a_1=-4$，

∴$S_{10}=10a_1+\frac{10\times(10-1)d}{2}=95$.

故选：C．

【点评】在求一个数列的通项公式或前n项和时，如果可以证明这个数列为等差数列，或等比数列，则可以求出其基本项（首项与公差或公比）进而根据等差或等比数列的通项公式，写出该数列的通项公式，如果未知这个数列的类型，则可以判断它是否与某个等差或等比数列有关，间接求其通项公式．

6．（5分）若函数y=f（x）的图象与函数$y=\ln\sqrt{x}+1$的图象关于直线y=x对称，则f（x）=（　　）

A．e^{2x-2}　　B．e^{2x}　　C．e^{2x+1}　　D．e^{2x+2}

【考点】4R：反函数．

【专题】11：计算题．

【分析】由函数y=f（x）的图象与函数$y=\ln\sqrt{x}+1$的图象关于直线y=x对称知这两个函数互为反函数，故只要求出函数y=f（x）的反函数即可，欲求原函数的反函数，即从原函数$y=\ln\sqrt{x}+1$中反解出x，后再进行x，y互换，即得反函数的解析式．

【解答】解：$\because y-1=\ln\sqrt{x}$，$\therefore\sqrt{x}=e^{y-1}$，$\therefore x=(e^{y-1})^2=e^{2y-2}$，改写为：$y=e^{2x-2}$

∴答案为A．

【点评】本题主要考查了互为反函数图象间的关系及反函数的求法．

7．（5分）已知曲线$y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线与直线ax+y+1=0垂直，则a的值为（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．－2

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】求出函数的导数，切线的斜率，由两直线垂直的条件，即可得到a的值．

【解答】解：$\because y=\frac{x+1}{x-1}$，

$\therefore y'=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$，

$\therefore$曲线$y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线的斜率$k=-\frac{1}{2}$，

$\because$曲线$y=\frac{x+1}{x-1}$在点（3，2）处的切线与直线ax+y+1=0垂直，

$\therefore$直线ax+y+1=0的斜率$k'=-a\times(-\frac{1}{2})=-1$，即a=﹣2．

故选：D．

【点评】本题考查导数的几何意义的求法，考查导数的运算，解题时要认真审题，仔细解答，注意直线与直线垂直的性质的灵活运用．

8．（5分）为得到函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象，只需将函数y=sin2x的图象（　　）

A．向左平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位　　B．向右平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位

C．向左平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位　　D．向右平移$\frac{5\pi}{6}$个长度单位

【考点】HJ：函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】11：计算题．

【分析】先根据诱导公式将函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$化为正弦的形式，再根据左加右减的原则进行平移即可得到答案．

【解答】解：$\because y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin2(x+\frac{5\pi}{12})$，

只需将函数y=sin2x的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位得到函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的图象．

故选：A．

【点评】本题主要考查诱导公式和三角函数的平移．属基础题．

9．（5分）设奇函数f（x）在（0，+∞）上为增函数，且f（1）=0，则不等式$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$的解集为（　　）

A．（﹣1，0）∪（1，+∞） B．（﹣∞，﹣1）∪（0，1）

C．（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞） D．（﹣1，0）∪（0，1）

【考点】3N：奇偶性与单调性的综合．

【专题】16：压轴题．

【分析】首先利用奇函数定义与$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$得出x与f（x）异号，

然后由奇函数定义求出f（﹣1）=﹣f（1）=0，

最后结合f（x）的单调性解出答案．

【解答】解：由奇函数f（x）可知$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{2f(x)}{x}<0$，即x与f（x）异号，

而f（1）=0，则f（﹣1）=﹣f（1）=0，

又f（x）在（0，+∞）上为增函数，则奇函数f（x）在（﹣∞，0）上也为增函数

，

当0＜x＜1时，f（x）＜f（1）=0，得$\frac{f(x)}{x}<0$，满足；

当x＞1时，f（x）＞f（1）=0，得$\frac{f(x)}{x}>0$，不满足，舍去；

当﹣1＜x＜0时，f（x）＞f（﹣1）=0，得$\frac{f(x)}{x}<0$，满足；

当x＜﹣1时，f（x）＜f（﹣1）=0，得$\frac{f(x)}{x}>0$，不满足，舍去；

所以x的取值范围是﹣1＜x＜0或0＜x＜1．

故选：D．

【点评】本题综合考查奇函数定义与它的单调性．

10．（5分）若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$与圆$x^2+y^2=1$有公共点，则（　　）

A．$a^2+b^2\le 1$ B．$a^2+b^2\ge 1$ C．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$ D．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

【考点】J9：直线与圆的位置关系．

【分析】用圆心到直线的距离小于或等于半径，可以得到结果．

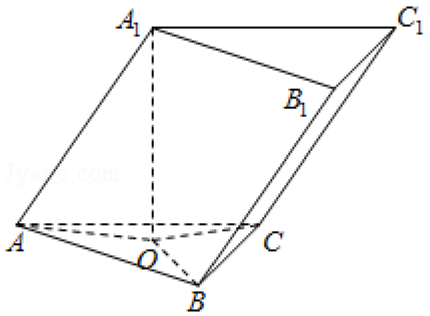
【解答】解：直线与圆有公共点，即直线与圆相切或相交得：d≤r

$d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\leqslant 1$，$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$，

故选：D．

【点评】本题考查点到直线的距离公式，直线和圆的位置关系，是基础题．

11．（5分）已知三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面ABC内的射影为△ABC的中心，则AB_1与底面ABC所成角的正弦值等于（　　）



A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

【考点】LP：空间中直线与平面之间的位置关系．

【专题】11：计算题；31：数形结合；4R：转化法；5G：空间角．

【分析】法一：由题意可知三棱锥A_1﹣ABC为正四面体，设棱长为2，求出AB_1及三棱锥的高，由线面角的定义可求出答案；

法二：先求出点A_1到底面的距离A_1D的长度，即知点B_1到底面的距离B_1E的长度，再求出AE的长度，在直角三角形AEB_1中求AB_1与底面ABC所成角的正切，再由同角三角函数的关系求出其正弦．

【解答】解：（法一）因为三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面ABC内的射影为△ABC的中心，设为D，

所以三棱锥A_1﹣ABC为正四面体，设棱长为2，

则△AA_1B_1是顶角为120°等腰三角形，

所以$AB_1=2\times 2\times \sin 60°=2\sqrt{3}$，$A_1D=\sqrt{2^2-(\frac{2}{3}\times\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以AB_1与底面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{A_1D}{AB_1}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$；

（法二）由题意不妨令棱长为2，点B_1到底面的距离是B_1E，

如图，A_1在底面ABC内的射影为△ABC的中心，设为D，

故$DA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由勾股定理得$A_1D=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$故$B_1E=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

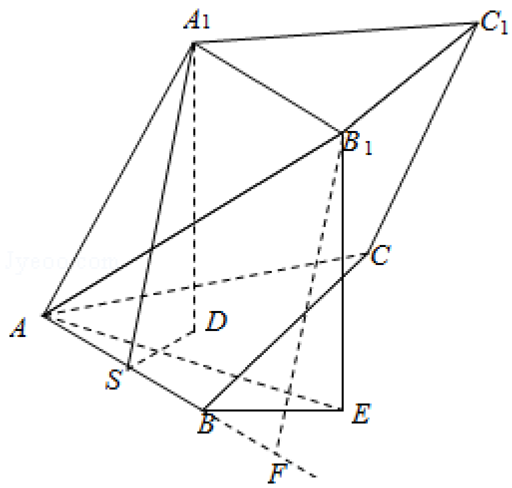
如图作$A_1S\perp AB$于中点S，过B1作AB的垂线段，垂足为F，

$BF=1$，$B_1F=A_1S=\sqrt{3}$，$AF=3$，

在直角三角形B_1AF中用勾股定理得：$AB_1=2\sqrt{3}$，

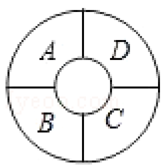
所以AB_1与底面ABC所成角的正弦值$\sin\angle B_1AE=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

故选：B．



【点评】本题考查了几何体的结构特征及线面角的定义，还有点面距与线面距的转化，考查了转化思想和空间想象能力．

12．（5分）如图，一环形花坛分成A，B，C，D四块，现有4种不同的花供选种，要求在每块里种1种花，且相邻的2块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）



A．96　　B．84　　C．60　　D．48

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率．

【专题】16：压轴题．

【分析】这道题比起前几年出的高考题要简单些，只要分类清楚没有问题，分为三类：分别种两种花、三种花、四种花，分这三类来列出结果．

【解答】解：分三类：种两种花有A_4^2种种法；

种三种花有$2A_4^3$种种法；

种四种花有A_4^4种种法．

共有$A_4^2+2A_4^3+A_4^4=84$．

故选：B．

【点评】本题也可以这样解：按A﹣B﹣C﹣D顺序种花，可分A、C同色与不同色有4×3×（1×3+2×2）=84．

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

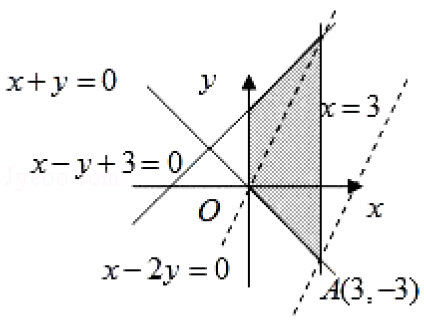
13．（5分）若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y+3\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，则z=2x﹣y的最大值为__9__．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；13：作图题．

【分析】首先作出可行域，再作出直线l_0：y=2x，将l_0平移与可行域有公共点，直线y=2x﹣z在y轴上的截距最小时，z有最大值，求出此时直线y=2x﹣z经过的可行域内的点的坐标，代入z=2x﹣y中即可．

【解答】解：如图，作出可行域，作出直线l_0：y=2x，将l_0平移至过点A处时，函数z=2x﹣y有最大值9．



【点评】本题考查线性规划问题，考查数形结合思想．

14．（5分）已知抛物线$y=ax^2-1$的焦点是坐标原点，则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为__2__．

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】先根据抛物线$y=ax^2-1$的焦点坐标为坐标原点，求得a，得到抛物线方程，进而可知与坐标轴的交点的坐标，进而可得答案．

【解答】解：由抛物线$y=ax^2-1$的焦点坐标为$(0,\frac{1}{4a}-1)$坐标原点得，

$a=\frac{1}{4}$，则$y=\frac{1}{4}x^2-1$

与坐标轴的交点为（0，﹣1），（﹣2，0），（2，0）

，则以这三点围成的三角形的面积为$\frac{1}{2}\times4\times1=2$

故答案为2

【点评】本题主要考查抛物线的应用．考查了学生综合运用所学知识，解决实际问题的能力．

15．（5分）在△ABC中，AB=BC，$\cos B=-\frac{7}{18}$．若以A，B为焦点的椭圆经过点C，则该椭圆的离心率e=__$\frac{3}{8}$__．

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】设AB=BC=1，$\cos B=-\frac{7}{18}$，则$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{25}{9}$，由此可知$2a=\frac{8}{3}$，$2c=1$，从而求出该椭圆的离心率．

【解答】解：设AB=BC=1，$\cos B=-\frac{7}{18}$，则$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{25}{9}$，

$\therefore AC=\frac{5}{3}$，$2a=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$，$2c=1$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{8}$．

答案：$\frac{3}{8}$．

【点评】本题考查椭圆的性质及应用，解题时要注意的正确计算．

16．（5分）等边三角形ABC与正方形ABDE有一公共边AB，二面角C﹣AB﹣D的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N分别是AC，BC的中点，则EM，AN所成角的余弦值等于_$\frac{1}{6}$_．

【考点】LM：异面直线及其所成的角；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】先找出二面角的平面角，建立边之间的等量关系，再利用向量法将所求异面直线用基底表示，然后利用向量的所成角公式求出所成角即可．

【解答】解：设AB=2，作CO⊥面ABDE，

OH⊥AB，则CH⊥AB，∠CHO为二面角C﹣AB﹣D的平面角

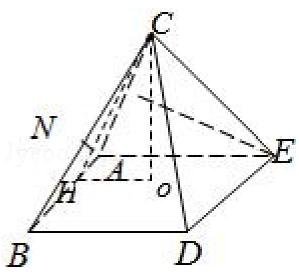
$CH=\sqrt{3}$，$OH=CH\cdot\cos\angle CHO=1$，

结合等边三角形ABC与正方形ABDE可知此四棱锥为正四棱锥，

则$AN=EM=CH=\sqrt{3}$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$，$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$，

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}$

故EM，AN所成角的余弦值$\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{EM}|}=\frac{1}{6}$故答案为：$\frac{1}{6}$



【点评】本小题主要考查异面直线所成的角，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题．

三、解答题（共6小题，满分70分）

17．（10分）设△ABC的内角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，且acosB﹣bco

$sA=\frac{3}{5}c$.

（Ⅰ）求$\frac{tanA}{tanB}$的值；

（Ⅱ）求tan（A﹣B）的最大值．

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HP：正弦定理．

【分析】本题考查的知识点是正弦定理及两角和与差的正切函数，

（Ⅰ）由正弦定理的边角互化，我们可将已知中$acosB-bcosA=\frac{3}{5}c$，进行转化得到sinAcosB=4cosAsinB，再利用弦化切的方法即可求$\frac{tanA}{tanB}$的值．

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结论，结合角A，B，C为△ABC的内角，我们易得tanA=4tanB＞0，则tan（A﹣B）可化为$\frac{3}{cotB+4tanB}$，再结合基本不等式即可得到tan（A﹣B）的最大值．

【解答】解：（Ⅰ）在△ABC中，$acosB-bcosA=\frac{3}{5}c$，

由正弦定理得

$sinAcosB-sinBcosA=\frac{3}{5}sinC=\frac{3}{5}sin(A+B)=\frac{3}{5}sinAcosB+\frac{3}{5}cosAsinB$

即sinAcosB=4cosAsinB，

则$\frac{tanA}{tanB}=4$；

（Ⅱ）由$\frac{tanA}{tanB}=4$得

tanA=4tanB＞0

$tan(A-B)=\frac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}=\frac{3tanB}{1+4tan^2B}=\frac{3}{cotB+4tanB}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{cotB\bullet 4tanB}}=\frac{3}{4}$

当且仅当$4tanB=cotB$，$tanB=\frac{1}{2}$，$tanA=2$时，等号成立，

故当$tanA=2$，$tanB=\frac{1}{2}$时，

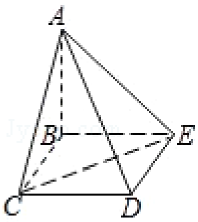
tan（A﹣B）的最大值为$\frac{3}{4}$．

【点评】在解三角形时，正弦定理和余弦定理是最常用的方法，正弦定理多用于边角互化，使用时要注意一般是等式两边是关于三边的齐次式．

18．（12分）四棱锥A﹣BCDE中，底面BCDE为矩形，侧面ABC⊥底面BCDE，BC=2，$CD=\sqrt{2}$，AB=AC．

（Ⅰ）证明：AD⊥CE；

（Ⅱ）设CE与平面ABE所成的角为45°，求二面角C﹣AD﹣E的大小．



【考点】LY：平面与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（1）取BC中点F，证明CE⊥面ADF，通过证明线面垂直来达到证明线线垂直的目的．

（2）在面AED内过点E作AD的垂线，垂足为G，由（1）知，CE⊥AD，则∠CGE即为所求二面角的平面角，△CGE中，使用余弦定理求出此角的大小．

【解答】解：（1）取BC中点F，连接DF交CE于点O，

∵AB=AC，∴AF⊥BC．

又面ABC⊥面BCDE，∴AF⊥面BCDE，∴AF⊥CE．

再根据 $\tan\angle CED=\tan\angle FDC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得∠CED=∠FDC．

又∠CDE=90°，∴∠OED+∠ODE=90°，

∴∠DOE=90°，即CE⊥DF，∴CE⊥面ADF，∴CE⊥AD．

（2）在面ACD内过C点作AD的垂线，垂足为G．

∵CG⊥AD，CE⊥AD，∴AD⊥面CEG，∴EG⊥AD，

则∠CGE即为所求二面角的平面角．

作CH⊥AB，H为垂足．

∵平面ABC⊥平面BCDE，矩形BCDE中，BE⊥BC，故BE⊥平面ABC，CH⊂平面ABC，

故BE⊥CH，而AB∩BE=B，故CH⊥平面ABE，

∴∠CEH=45°为CE与平面ABE所成的角．

∵$CE=\sqrt{6}$，∴$CH=EH=\sqrt{3}$．

直角三角形CBH中，利用勾股定理求得BH=$\sqrt{CB^2-CH^2}=\sqrt{4-3}=1$，∴AH=AB﹣BH=AC﹣1；

直角三角形ACH中，由勾股定理求得$AC^2=CH^2+AH^2=3+(AC-1)^2$，∴AB=AC=2．

由面ABC⊥面BCDE，矩形BCDE中CD⊥CB，可得CD⊥面ABC，

故△ACD为直角三角形，AD=$\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，

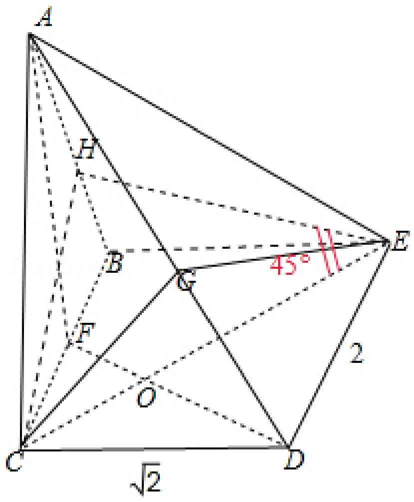
故CG=$\frac{AC\cdot CD}{AD}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，DG=$\sqrt{CD^2-CG^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$EG=\sqrt{DE^2-DG^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}$，又 $CE=\sqrt{6}$，

则$\cos\angle CGE=\frac{CG^2+GE^2-CE^2}{2CG\cdot GE}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∴$\angle CGE=\pi-\arccos(\frac{\sqrt{10}}{10})$，

即二面角C﹣AD﹣E的大小$\pi-\arccos(\frac{\sqrt{10}}{10})$．



【点评】本题主要考查通过证明线面垂直来证明线线垂直的方法，以及求二面角的大小的方法，属于中档题．

19．（12分）已知函数f（x）=﹣x^2+ax+1﹣lnx．

（Ⅰ）当a=3时，求函数f（x）的单调递增区间；

（Ⅱ）若f（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$）上是减函数，求实数a的取值范围．

【考点】3D：函数的单调性及单调区间；3E：函数单调性的性质与判断．

【专题】16：压轴题．

【分析】（1）求单调区间，先求导，令导函数大于等于0即可．

（2）已知f（x）在区间（0，$\frac{1}{2}$）上是减函数，即f′（x）≤0在区间（0，$\frac{1}{2}$）上恒成立，然后用分离参数求最值即可．

【解答】解：（Ⅰ）当a=3时，f（x）=﹣x^2+3x+1﹣lnx

$\therefore f'(x)=-2x+3-\frac{1}{x}=\frac{-(2x^2-3x+1)}{x}$

解f′（x）＞0，

即：$2x^2$﹣3x+1＜0

函数f（x）的单调递增区间是$(\frac{1}{2},\ 1)$．

（Ⅱ）f′（x）=﹣2x+a﹣$\frac{1}{x}$，

∵f（x）在$(0,\ \frac{1}{2})$上为减函数，

∴x∈$(0,\ \frac{1}{2})$时﹣2x+a﹣$\frac{1}{x}$≤0恒成立．

即a≤2x+$\frac{1}{x}$恒成立．

设$g(x)=2x+\frac{1}{x}$，则$g'(x)=2-\frac{1}{x^2}$

∵x∈$(0,\ \frac{1}{2})$时，$\frac{1}{x^2}>4$，

∴g′（x）＜0，

∴g（x）在$(0,\ \frac{1}{2})$上递减，

∴g（x）＞g（$\frac{1}{2}$）=3，

∴a≤3．

【点评】本题考查函数单调性的判断和已知函数单调性求参数的范围，此类问题一般用导数解决，综合性较强．

20．（12分）已知5只动物中有1只患有某种疾病，需要通过化验血液来确定患病的动物．血液化验结果呈阳性的即为患病动物，呈阴性即没患病．下面是两种化验方法：

方案甲：逐个化验，直到能确定患病动物为止．

方案乙：先任取3只，将它们的血液混在一起化验．若结果呈阳性则表明患病动物为这3只中的1只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外2只中任取1只化验．

（Ⅰ）求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

（Ⅱ）ξ表示依方案乙所需化验次数，求ξ的期望．

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【分析】（1）由题意得到这两种方案的化验次数，算出在各个次数下的概率，写出化验次数的分布列，求出方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率．

（2）根据上一问乙的化验次数的分布列，利用期望计算公式得到结果．

【解答】解：（Ⅰ）若乙验两次时，有两种可能：

①先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好一次验中概率为：

$$\frac{C_4^2A_3^3}{A_5^3}\times\frac{1}{A_3^1}=\frac{6\times6}{3\times4\times5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

②先验三只结果为阴性，再从其它两只中验出阳性（无论第二次试验中有没有，均可以在第二次结束）

$$\frac{A_4^3A_2^1}{A_5^3A_2^2}=\frac{24}{5\times3\times4}=\frac{2}{5},$$

∴乙只用两次的概率为$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

若乙验三次时，只有一种可能：

先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好二次验中概率为在三次验出时概率为$\frac{2}{5}$

∴甲种方案的次数不少于乙种次数的概率为：

$$\frac{3}{5}\times(1-\frac{1}{5})+\frac{2}{5}(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5})=\frac{12}{25}+\frac{6}{25}=\frac{18}{25}$$

（Ⅱ）ξ表示依方案乙所需化验次数，

∴ξ的期望为Eξ=2×0.6+3×0.4=2.4．

【点评】期望是概率论和数理统计的重要概念之一，是反映随机变量取值分布的特征数，学习期望将为今后学习概率统计知识做铺垫．同时，它在市场预测，经济统计，风险与决策等领域有着广泛的应用，为今后学习数学及相关学科产生深远的影响．

21．（12分）双曲线的中心为原点O，焦点在x轴上，两条渐近线分别为l_1，l_2，经过右焦点F垂直于l_1的直线分别交l_1，l_2于A，B两点．已知$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，且$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．

（Ⅰ）求双曲线的离心率；

（Ⅱ）设AB被双曲线所截得的线段的长为4，求双曲线的方程．

【考点】KB：双曲线的标准方程；KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】（1）由2个向量同向，得到渐近线的夹角范围，求出离心率的范围，再用勾股定理得出直角三角形的2个直角边的长度比，联想到渐近线的夹角，求出渐近线的斜率，进而求出离心率．

（2）利用第（1）的结论，设出双曲线的方程，将AB方程代入，运用根与系数的关系及弦长公式，求出待定系数，即可求出双曲线方程．

【解答】解：（1）设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$c^2=a^2+b^2$，由$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{FA}$同向，

∴渐近线的倾斜角范围为（0，$\frac{\pi}{4}$），

∴渐近线斜率为：$k_1=\frac{b}{a}<1$∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1<1$，∴$1<e^2<2$．

∵$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，∴$|OB|+|OA|=2|AB|$，

∴$|AB|^2=(|OB|-|OA|)(|OB|+|OA|)=(|OB|-|OA|)\cdot 2|AB|$，

∴$|AB|=2(|OB|-|OA|)$∴$\begin{cases}|OB|-|OA|=\frac{1}{2}|AB|,\\|OA|+|OB|=2|AB|\end{cases}$

∴$|OA|=\frac{3}{4}|AB|$∴$|OA|^2=\frac{9}{16}|AB|^2$，

可得：$\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{4}{3}$，而在直角三角形OAB中，

注意到三角形OAF也为直角三角形，即$\tan\angle AOB=\frac{4}{3}$，

而由对称性可知：OA的斜率为$k=\tan\frac{1}{2}\angle AOB$，

$\therefore\frac{2k}{1-k^2}=\frac{4}{3}$，$\therefore 2k^2+3k-2=0$，$\therefore k=\frac{1}{2}$（$k=-2$舍去）；

$\therefore\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$\therefore e^2=\frac{5}{4}$，$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（2）由第（1）知，$a=2b$，可设双曲线方程为$\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\therefore c=\sqrt{5}b$.

由于AB的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle AOB$，故AB的斜率为$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle AOB\right)=-\cot\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right)=-2$，

$\therefore$AB的直线方程为

$y=-2(x-\sqrt{5}b)$，代入双曲线方程得：$15x^2-32\sqrt{5}bx+84b^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{32\sqrt{5}b}{15}$，$x_1\bullet x_2=\frac{84b^2}{15}$，

$\therefore 4=\sqrt{1+4}\bullet\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\bullet x_2}=\sqrt{5}\bullet\sqrt{\left(\frac{32\sqrt{5}b}{15}\right)^2-4\bullet\frac{84b^2}{15}}$，即$16=\frac{32^2\bullet b^2}{9}-112b^2$，

$\therefore b^2=9$，所求双曲线方程为：$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

【点评】做到边做边看，从而发现题中的巧妙，如据$\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{4}{3}$，联想到对应的是2渐近线的夹角的正切值，属于中档题.

22．（12分）设函数$f(x)=x-x\ln x$．数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$．

（Ⅰ）证明：函数$f(x)$在区间$(0,1)$是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（Ⅲ）设$b\in(a_1,1)$，整数$k\geqslant\frac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；RG：数学归纳法.

【专题】16：压轴题.

【分析】（1）首先求出函数的导数，然后令$f'(x)=0$，解出函数的极值点，最后根据导数判断函数在区间（0，1）上的单调性，从而进行证明.

（2）由题意数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，求出$a_{n+1}=a_n-a_n\ln a_n$，然后利用归纳法进行证明；

（3）由题意$f(x)=x-x\ln x$，$a_{n+1}=f(a_n)$可得$a_{k+1}=a_k-b-a_k$，然后进行讨论求解.

【解答】解：（Ⅰ）证明：∵$f(x)=x-x\ln x$，

∴$f'(x)=-\ln x$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)=-\ln x>0$

故函数$f(x)$在区间（0，1）上是增函数；

（Ⅱ）证明：（用数学归纳法）

（i）当$n=1$时，$0<a_1<1$，$a_1\ln a_1<0$，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1>a_1$，

∵函数$f(x)$在区间（0，1）是增函数且函数$f(x)$在$x=1$处连续，

∴$f(x)$在区间$(0,1]$是增函数，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1<1$，即$a_1<a_2<1$成立，

（ii）假设当$x=k$（$k\in N^+$）时，$a_k<a_{k+1}<1$成立，

即$0<a_1\le a_k<a_{k+1}<1$，

那么当$n=k+1$时，由$f(x)$在区间$(0,1]$是增函数，$0<a_1\le a_k<a_{k+1}<1$，

得$f(a_k)<f(a_{k+1})<f(1)$，

而$a_{n+1}=f(a_n)$，

则$a_{k+1}=f(a_k)$，$a_{k+2}=f(a_{k+1})$，$a_{k+1}<a_{k+2}<1$，

也就是说当$n=k+1$时，$a_n<a_{n+1}<1$也成立，

根据（i）、（ii）可得对任意的正整数n，$a_n<a_{n+1}<1$恒成立.

（Ⅲ）证明：由$f(x)=x-x\ln x$，$a_{n+1}=f(a_n)$可得

$a_{k+1}=a_k-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\ln a_i$，

1）若存在某$i\le k$，满足$a_i\le b$，则由（Ⅱ）知：$a_{k+1}-b>a_i-b\ge 0$，

2）若对任意$i\le k$，都有$a_i>b$，则$a_{k+1}=a_k-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln a_i=$

$a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln b\ge a_1-b_1-ka_1\ln b=0$，

即$a_{k+1}>b$成立.

【点评】此题主要考查多项式函数的导数，函数单调性的判定，函数最值，函数、方程与不等式等基础知识及数学归纳法的应用，一般出题者喜欢考查学生的运算求解能力、推理论证能力及分析与解决问题的能力，要出学生会用数形结合的思想、分类与整合思想，化归与转化思想、有限与无限的思想来解决问题.