

# 2005 年青海高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 10 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。
3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是

P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k

次的概率  $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

1. 函数  $f(x)=|\sin x+\cos x|$  的最小正周期是 ( )

- A.  $\frac{\pi}{4}$                       B.  $\frac{\pi}{2}$                       C.  $\pi$                       D.  $2\pi$

2. 正方体 ABCD—A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> 的中点。那么，正方体的过 P、Q、R 的截面图形是 ( )

- A. 三角形                      B. 四边形                      C. 五边形                      D. 六边形

3. 函数  $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} (x \leq 0)$  的反函数是 ( )

- A.  $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$                       B.  $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$   
C.  $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$                       D.  $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$

4. 已知函数  $y = \tan \omega x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内是减函数, 则 ( )

- A.  $0 < \omega \leq 1$       B.  $-1 \leq \omega < 0$       C.  $\omega \geq 1$       D.  $\omega \leq -1$

5. 设  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 若  $\frac{a+bi}{c+di}$  为实数, 则 ( )

- A.  $bc+ad \neq 0$       B.  $bc-ad \neq 0$       C.  $bc-ad=0$       D.  $bc+ad=0$

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 点  $M$  在双曲线上且  $MF_1 \perp x$  轴, 则  $F_1$  到直线  $F_2M$  的距离为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{5}$       B.  $\frac{5\sqrt{6}}{6}$       C.  $\frac{6}{5}$       D.  $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角  $A, B$  满足  $\tan A - \frac{1}{\sin 2A} = \tan B$ , 则有 ( )

- A.  $\sin 2A - \cos B = 0$       B.  $\sin 2A + \cos B = 0$   
C.  $\sin 2A - \sin B = 0$       D.  $\sin 2A + \sin B = 0$

8. 已知点  $A(\sqrt{3}, 1), B(0, 0), C(\sqrt{3}, 0)$ . 设  $\angle BAC$  的平分线  $AE$  与  $BC$  相交于  $E$ , 那么有  $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CE}$ , 其中  $\lambda$  等于 ( )

- A. 2      B.  $\frac{1}{2}$       C. -3      D.  $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合  $M = \{x | x^2 - 3x - 28 \leq 0\}$ ,  $N = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$ , 则  $M \cap N$  为 ( )

- A.  $\{x | -4 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 7\}$       B.  $\{x | -4 < x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x < 7\}$   
C.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$       D.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

10. 点  $P$  在平面上作匀速直线运动, 速度向量  $v = (4, -3)$  (即点  $P$  的运动方向与  $v$  相同, 且每秒移动的距离为  $|v|$  个单位. 设开始时点  $P$  的坐标为  $(-10, 10)$ , 则 5 秒后点  $P$  的坐标为 ( )

- A.  $(-2, 4)$       B.  $(-30, 25)$       C.  $(10, -5)$       D.  $(5, -10)$

11. 如果  $a_1, a_2, \dots, a_8$  为各项都大于零的等差数列, 公差  $d \neq 0$ , 则 ( )

- A.  $a_1 a_8 > a_4 a_5$       B.  $a_1 a_8 < a_4 a_5$       C.  $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$       D.  $a_1 a_8 = a_4 a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高最小值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}$       B.  $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$       C.  $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$       D.  $\frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}$

第II卷

注意事项:

1. 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
3. 本卷共 10 小题, 共 90 分。

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 圆心为 (1, 2) 且与直线  $5x-12y-7=0$  相切的圆的方程为\_\_\_\_\_.
14. 设  $\alpha$  为第四象限的角, 若  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$ , 则  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_.
15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有\_\_\_\_\_个.
16. 下面是关于三棱锥的四个命题:  
①底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.  
②底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥.  
③底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥.  
④侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥. 其中, 真命题的编号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的编号).

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = 2^{|x+1|-|x-1|}$ , 求使  $f(x) \geq 2\sqrt{2}x$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等差数列,  $\lg a_1, \lg a_2, \lg a_4$  成等差数列. 又

$$b_n = \frac{1}{a_{2^n}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

(I) 证明  $\{b_n\}$  为等比数列;

(II) 如果无穷等比数列  $\{b_n\}$  各项的和  $S = \frac{1}{3}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1$  和公差  $d$ .

(注: 无穷数列各项的和即当  $n \rightarrow \infty$  时数列前  $n$  项和的极限)

19. (本小题满分 12 分)

甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛

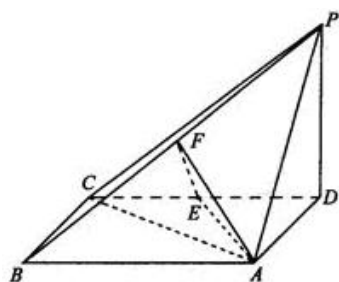
采用五局三胜制，即先胜三局的队获胜，比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令  $\xi$  为本场比赛的局数, 求  $\xi$  的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD=PD$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $CD$ 、 $PB$  的中点.

(I) 求证:  $EF \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 设  $AB = \sqrt{2} BC$ , 求  $AC$  与平面  $AEF$  所成的角的大小.



21. (本小题满分 14 分)

$P$ 、 $Q$ 、 $M$ 、 $N$  四点都在椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  上,  $F$  为椭圆在  $y$  轴正半轴上的焦点. 已知

$\overrightarrow{PF}$  与  $\overrightarrow{FQ}$  共线,  $\overrightarrow{MF}$  与  $\overrightarrow{FN}$  共线, 且  $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$ . 求四边形  $PMQN$  的面积的最小值和最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$ .

(I) 当  $x$  为何值时,  $f(x)$  取得最小值? 证明你的结论;

(II) 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上是单调函数, 求  $a$  的取值范围.

参考答案

1-6: CDBBCC 7-12: ACACBC

13.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ; 14.  $-\frac{3}{4}$ . 15. 192; 16. ①, ④

17. 本小题主要考查指数函数的性质、不等式性质和解法, 考查分析问题的能力和计算能力, 满分 12 分

解: 由于  $y = 2^x$  是增函数,  $f(x) \geq 2\sqrt{2}$  等价于  $|x+1| - |x-1| \geq \frac{3}{2}$  ①

(1) 当  $x \geq 1$  时,  $|x+1| - |x-1| = 2$ ,  $\therefore$  ①式恒成立。

(2) 当  $-1 < x < 1$  时,  $|x+1| - |x-1| = 2x$ , ①式化为  $2x \geq \frac{3}{2}$ , 即  $\frac{3}{4} \leq x < 1$

(3) 当  $x \leq -1$  时,  $|x+1| - |x-1| = -2$ , ①式无解

综上  $x$  的取值范围是  $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

18. 本小题主要考查等差数列、等比数列的基本知识以及运用这些知识的能力。满分 12 分。

(I) 证明:  $\because \lg a_1, \lg a_2, \lg a_4$  成等差数列,  $\therefore 2 \lg a_2 = \lg a_1 + \lg a_4$ , 即  $a_2^2 = a_1 a_4$

又设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ , 即  $d^2 = a_1 d$

$\because d \neq 0, \therefore d = a_1 \neq 0$ ,  $a_{2^n} = a_1 + (2^n - 1)d = 2^n d$ ,  $b_n = \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{2^n}$

这时  $\{b_n\}$  是首项  $b_1 = \frac{1}{2d}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列。

(II) 解: 如果无穷等比数列  $\{b_n\}$  的公比  $q = 1$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时其前  $n$  项和的极限不存在。

因而  $d = a_1 \neq 0$ , 这时公比  $q = \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = \frac{1}{2d}$ , 这样  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{\frac{1}{2d} [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}}$ 。

则  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2d} [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{d}$ 。

由  $S = \frac{1}{3}$  得公差  $d = 3$ , 首项  $a_1 = d = 3$ 。

19. 本小题考查离散型随机变量分布和数学期望等概念, 考查运用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分

解: 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6, 乙队胜甲队的概率为  $1 - 0.6 = 0.4$

比赛 3 局结束有两种情况: 甲队胜 3 局或乙队胜 3 局, 因而  $P(\xi = 3) = 0.6^3 + 0.4^3 = 0.28$

比赛 4 局结束有两种情况: 前 3 局中甲队胜 2 局, 第 4 局甲队胜; 或前 3 局中乙队胜 2 局, 第 4 局乙队胜。因而

$$P(\xi = 4) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_3^2 \times 0.4^2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.3744$$

比赛 5 局结束有两种情况: 前 4 局中甲队胜 2 局、乙队胜 2 局, 第 5 局甲胜或乙胜。因而

$$P(\xi=5) = C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 \times 0.6 + C_4^2 \times 0.4^2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.3456$$

所以  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	3	4	5
P	0.28	0.3744	0.3456

$$\xi \text{ 的期望 } E_\xi = 3 \times P(\xi=3) + 4 \times P(\xi=4) + 5 \times P(\xi=5) = 4.0656$$

20. 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识、及思维能力和空间想象能力。满分 12 分。

证明：(I) 证明：连结 EP， $\because PD \perp$  底面 ABCD，DE 在平面 ABCD 内， $\therefore PD \perp DE$ 。

又 CE=ED，PD=AD=BC， $\therefore Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle PDE$ ， $\therefore PE = BE$ 。

$\because$  F 为 PB 中点， $\therefore EF \perp PB$ 。由三垂线定理得  $PA \perp AB$ ， $\therefore$  在  $Rt\triangle PAB$  中，PF=AF。

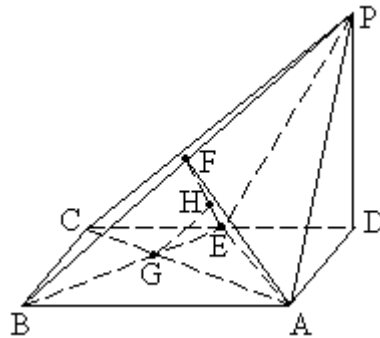
又 PE=BE=EA，

$\therefore Rt\triangle EFP \cong Rt\triangle EFA$ ， $\therefore EF \perp FA$ 。

$\because$  PB、FA 为平面 PAB 内的相交直线， $\therefore EF \perp$  平面 PAB。

(II) 解：不妨设 BC=1，则 AD=PD=1， $AB = \sqrt{2}$ ，

$$PA = \sqrt{2}，AC = \sqrt{3}$$



$\therefore \triangle PAB$  为等腰直角三角形，且  $PB=2$ ，F 为其斜边中点， $BF=1$ ，且  $AF \perp PB$ 。

$\because$  PB 与平面 AEF 内两条相交直线 EF、AF 都垂直， $\therefore PB \perp$  平面 AEF。

连结 BE 交 AC 于 G，作  $GH \parallel BP$  交 EF 于 H，则  $GH \perp$  平面 AEF， $\angle GAH$  为 AC 与平面 AEF 所成的角。

$$\text{由 } \triangle EGC \sim \triangle BGA \text{ 可知 } EG = \frac{1}{2}GB, EG = \frac{1}{3}EB, AG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

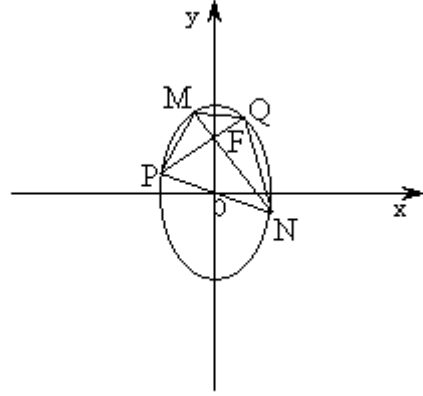
$$\text{由 } \triangle ECH \sim \triangle EBF \text{ 可知 } GH = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \angle GAH = \frac{GH}{AG} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\therefore AC \text{ 与平面 } AEF \text{ 所成的角为 } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

21. 本小题主要考查椭圆和直线的方程与性质，两条直线垂直的条件，两点间的距离，不等式的性质等基本知识及综合分析能力。满分 14 分。

解：如图，由条件知 MN 和 PQ 是椭圆的两条弦，相交于焦点 F (0, 1)，且 PQ ⊥ MN，直线 PQ、NM 中至少有一条存在斜率，不妨设 PQ 的斜率为 k。



又 PQ 过点 F (0, 1)，故 PQ 方程为  $y = kx + 1$ ，将此式代入椭圆方程得

$$(2 + k^2)x^2 + 2kx - 1 = 0$$

设 P、Q 两点的坐标分别为  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ ，

则

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}, \quad x_2 = \frac{-k + \sqrt{2k^2 + 2}}{2 + k^2}$$

$$\text{从而 } |PQ|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{8(1 + k^2)^2}{(2 + k^2)^2}, \quad \therefore |PQ| = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{2 + k^2}$$

$$(1) \text{ 当 } k \neq 0 \text{ 时, MN 的斜率为 } -\frac{1}{k}, \text{ 同上可推得 } |MN| = \frac{2\sqrt{2}(1 + (-\frac{1}{k})^2)}{2 + (-\frac{1}{k})^2}$$

$$\text{故四边形的面积 } S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = \frac{4(1 + k^2)(1 + \frac{1}{k^2})}{(2 + k^2)(2 + \frac{1}{k^2})} = \frac{4(2 + k^2 + \frac{1}{k^2})}{5 + 2k^2 + \frac{2}{k^2}}$$

$$\text{令 } u = k^2 + \frac{1}{k^2}, \text{ 得 } S = \frac{4(2 + u)}{5 + 2u} = 2(1 - \frac{1}{5 + 2u})$$

$$\text{因为 } u = k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2,$$

$$\text{当 } k = \pm 1 \text{ 时, } u = 2, S = \frac{16}{9}, \text{ 且 } S \text{ 是以 } u \text{ 为自变量的增函数,}$$

$$\text{所以 } \frac{16}{9} \leq S < 2.$$

$$(2) \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, MN 为椭圆长轴, } |MN| = 2\sqrt{2}, |PQ| = \sqrt{2},$$

$$S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |MN| = 2$$

综合 (1)、(2) 知，四边形 PMQN 面积的最大值为 2，最小值为  $\frac{16}{9}$ 。

22. 本小题主要考查导数的概念和计算, 应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力。  
满分 12 分。

解: (I) 对函数  $f(x)$  求导数, 得  $f'(x) = (x^2 - 2ax)e^x + (2x - 2a)e^x = [x^2 + 2(1-a)x - 2a]e^x$ .

已知  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$ .




(I) 当  $x$  为何值时,  $f(x)$  取得最小值? 证明你的结论;

(II) 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上是单调函数, 求  $a$  的取值范围.

令  $f'(x) = 0$ , 得  $[x^2 + 2(1-a)x - 2a]e^x = 0$ , 从而  $x^2 + 2(1-a)x - 2a = 0$ ,

解得  $x_1 = a - 1 - \sqrt{1+a^2}$ ,  $x_2 = a - 1 + \sqrt{1+a^2}$ , 其中  $x_1 < x_2$

当  $x$  变化时,  $f'(x), f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, x_1)$	$x_1$	$(x_1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

当  $f(x)$  在  $x = x_1$  处取到极大值, 在  $x = x_2$  处取到极小值。

当  $a \geq 0$  时,  $x_1 < -1$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  上为减函数, 在  $(x_2, +\infty)$  上为增函数,

而当  $x < 0$  时,  $f(x) = x(x - 2a)e^x > 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $f(x) = 0$ .

所以当  $x = a - 1 + \sqrt{1+a^2}$  时,  $f(x)$  取得最小值。

(II) 当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上为单调函数的充要条件是  $x_2 \geq 1$ ,

即  $a - 1 + \sqrt{1+a^2} \geq 1$ , 解得  $a \geq \frac{3}{4}$ 。

综上,  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上为单调函数的充要条件  $a \geq \frac{3}{4}$ 。

即  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 。