2006年江苏高考数学真题及答案

一．　选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的。

1．已知$a\in R$，函数$f(x)=\sin x-|a|,x\in R$为奇函数，则$a=$

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）± 1

2．圆$(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=1$的切线方程中有一个是

（A）$x-y=0$　　（B）$x+y=0$　　（C）$x=0$　　（D）$y=0$

3．某人5次上班途中所花的时间（单位：分钟）分别为$x,y,10,11,9$，已知这组数据的平均数为10，方差为2，则$|x-y|$的值为

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4．为了得到函数$y=2\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}),x\in R$的图象，只需把函数$y=2\sin x,x\in R$的图象上所有的点

（A）向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍（纵坐标不变）

（B）向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍（纵坐标不变）

（C）向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的3倍（纵坐标不变）

（D）向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的3倍（纵坐标不变）

5．$(\sqrt{x}-\frac{1}{3x})^{10}$的展开式中含$x$的正整数指数幂的项数是

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）6

6．已知两点$M(-2,0),N(2,0)$，点P为坐标平面内的动点，满足$|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=0$，则动点$P(x,y)$的轨迹方程为

（A）$y^2=8x$　　（B）$y^2=-8x$　　（C）$y^2=4x$　　（D）$y^2=-4x$

7．若A、B、C为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有

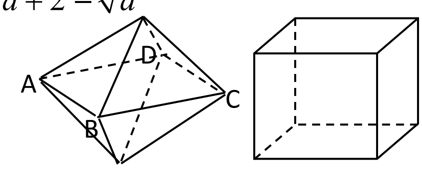
（A）$A\subseteq C$　　(B) $C\subseteq A$　　(C) $A\neq C$　　(D) $A=\varnothing$

8．设a,b,c是互不相等的正数，则下列不等式中不恒成立的是

（A）$|a-b|\le|a-c|+|b-c|$　　（B）$a^2+\frac{1}{a^2}\ge a+\frac{1}{a}$

（C）$|a-b|+\frac{1}{a-b}\ge 2$　　（D）$\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\le\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$

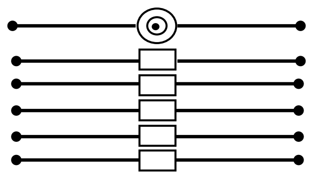
9．两个相同的正四棱锥组成如图1所示的几何体，可放入棱长为1的正方体内，使正四棱锥的底面ABCD与正方体的某一面平行，且各顶点均在正方体的面上，则这样的几何体体积的可能值有



（A）1个　　（B）2个

（C）3个　　（D）无穷多个

10．右图中有一信号源和五个接收器。接收器与信号源在一个串联线路中时，就能接收到信号，否则就不能接收到信号。若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组，将右端的六个接线点也随机地平均分成三组，再把所得六组中每级的两个接线点用导线连接，则这五个接收器能同时接收到信号的概率是



（A）$\dfrac{4}{45}$　　（B）$\dfrac{1}{36}$　　（C）$\dfrac{4}{15}$　　（D）$\dfrac{8}{15}$

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。不需要写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上。

11．在ΔABC中，已知$BC=12, A=60°, B=45°$，则 AC=______________

12．设变量x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y\le 2\\ x-y\ge -1\\ x+y\ge 1\end{cases}$，则$z=2x+3y$的最大值为______________

13．今有 2 个红球、3 个黄球、4 个白球，同色球不加以区分，将这 9 个球排成一列有种不同的方法（用数字作答）。

14．$\cot 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-2\cos 40°=$_____________

15．对正整数n，设曲线$y=x^n(1-x)$在$x=2$处的切线与y轴交点的纵坐标为a_n，则数列$\{\dfrac{a_n}{n+1}\}$的前n和的公式是_____________

16．不等式$\log_2(x+\dfrac{1}{x}+6)\le 3$的解集为___________________

三．解答题：本大题共 5 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或深处步骤。

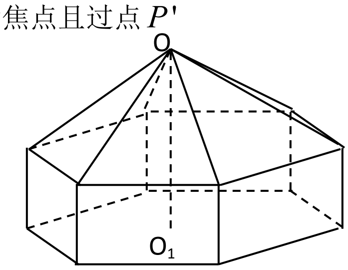
17.（本小题满分 12 分，第一小问满分 5 分，第二小问满分 7 分）

已知三点$P(5,2), F_1(-6,0), F_2(6,0)$

⑴求以F_1,F_2为焦点且过点 P 的椭圆的标准方程；

⑵设点P,F_1,F_2关于直线$y=x$的对称点分别为P',F_1',F_2'求以F_1',F_2'为焦点且过点P'的双曲线的标准方程。

18.（本小题满分 14 分）



请您设计一个帐篷，它下部的形状是高为$1m$的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为$3m$的正六棱锥（如右图所示）。试问当帐篷的顶点O到底面中心O_1的距离为多少时，帐篷的体积最大？

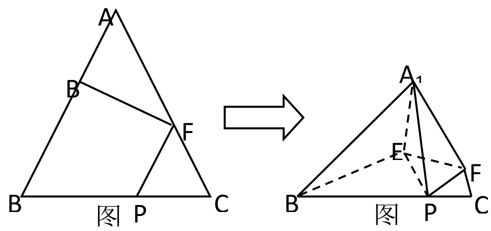
19.（本小题满分 14 分，第一小问满分 4 分，第二小问满分 5 分，第三小问满分 5 分）

在正ΔABC中，E、F、P 分别是 AB、AC、BC 边上的点，满足 AE：EB=CF：FA=CP：PB =1：2（如图 1），将△AEF 沿 EF 折起到△A_1EF 的位置，使二面角A_1-EF-B成直二面角，连结 A_1B、A_1P（如图 2）

⑴求证：$A_1E\perp$平面 BEP；

⑵求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小；

⑶求二面角$B-A_1P-F$的大小（用反三角函数值表示）。



20.（本小题满分 16 分，第一小问满分 4 分，第二小问满分 6 分，第三小问满分 6 分）

设a为实数，记函数$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值为$g(a)$

⑴设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求t的取值范围，并把$f(x)$表示成t的函数$m(t)$；

⑵求$g(a)$；

⑶试求满足$g(a)=g(\dfrac{1}{a})$的所有实数a

21．（本小题满分 14 分）

设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足：

$$b_n = a_n - a_{n+2}, c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

证明$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列且$b_n \le b_{n+1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$

2006年江苏高考数学真题参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的。

1．已知$a \in R$，函数$f(x) = \sin x - |a|$，$x \in R$为奇函数，则$a =$（A）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．± 1

2．圆$(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 1$的切线方程中有一个是（C）

A．$x - y = 0$　　B．$x + y = 0$　　C．$x = 0$　　D．$y = 0$

3．某人 5 次上班途中所花时间（单位：分钟）分别为x、y、10、11、9。已知这组数据的平均数为 10，方差为 2，则$|x - y|$的值为（D）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．为了得到函数$y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}), x \in R$的图象，只需把函数$y = 2\sin x, x \in R$的图象上的所有点（C）

A．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍（纵坐标不变）

B．向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍（纵坐标不变）

C．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍（纵坐标不变）

D．向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍（纵坐标不变）

5．$(\sqrt{x} - \frac{1}{3x})^{10}$的展开式中含$x$的正整数指数幂的项数是（B）

A．0　　B．2　　C．4　　D．6

6．已知两点 M（-2，0）、N（2，0），点 P 为坐标平面内的动点，满足$|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}| + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$则动点$P(x, y)$的轨迹方程为（B）

A．$y^2 = 8x$　　B．$y^2 = -8x$　　C．$y^2 = 4x$　　D．$y^2 = -4x$

7．若 A、B、C 为三个集合，$A \cup B = B \cap C$，则一定有（A）

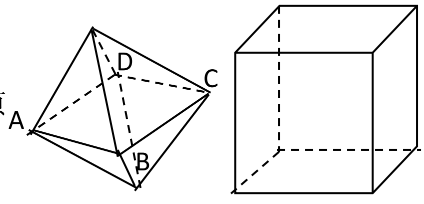
A．$A \subseteq C$　　B．$C \subseteq A$　　C．$A \ne C$　　D．$A = \phi$

8．设a、b、c是互不相等的正数，则下列不等式中不恒成立的是（C）

A．$|a - b| \le |a - c| + |b - c|$　　B．$a^2 + \frac{1}{a^2} \ge a + \frac{1}{a}$

C．$|a - b| + \frac{1}{a - b} \ge 2$　　D．$\sqrt{a+3} - \sqrt{a+1} \le \sqrt{a+2} - \sqrt{a}$

9．两个相同的正四棱锥组成如图 1 所示的几何体，可放入棱长为 1 的正方体内，使正四棱锥的底面 ABCD 与正方体的某一个面平行，且各顶点均在正

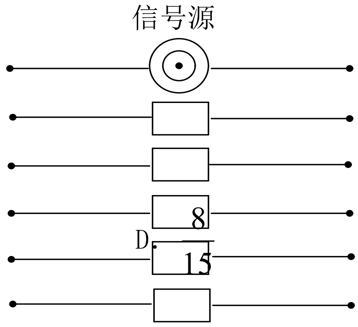


方体的面上，则这样的几何体体积的可能值有（D）

A．1 个　　　　B．2 个

C．3 个　　　　D．无穷多个

图 1



10．右图中有一个信号源和 5 个接收器，接收器与信号源在同一个串联线路中时，就能接收到信号，否则就不能收到信号。若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组，再把所得六组中每组的两个接线点用导线连接，则这五个接收器能同时接收到信号的概率是（D）

A．$\dfrac{4}{45}$　　B．$\dfrac{1}{36}$　　C．$\dfrac{4}{15}$　　D．$\dfrac{8}{15}$

二、填空题 本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上。

11．在△ABC 中，已知 BC=12，A=60°，B=45°，则 AC=$\underline{\quad 4\sqrt{6}\quad}$。

12．设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\le 2\\ x-y\ge -1\\ x+y\ge 1\end{cases}$，则 $z=2x+3y$ 的最大值为 $\underline{18}$。

13．今有 2 个红球、3 个黄球、4 个白球，同色球不加以区分，将这 9 个球排成一列有 $\underline{1260}$ 种不同的方法（用数字作答）。

14．$\cot 20^\circ\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ\tan 70^\circ-2\cos 40^\circ=\underline{\quad 2\quad}$。

15．对正整数 n，设曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 x＝2 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为 a_n，则数列 $\{\dfrac{a_n}{n+1}\}$ 的前 n 项和的公式是 $\underline{\quad 2^{n+1}-2\quad}$。

16．不等式 $\log_2(x+\dfrac{1}{x}+6)\le 3$ 的解集为 $\underline{(-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2})\cup\{1\}}$。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 12 分，第一小问满分 5 分，第二小问满分 7 分）

已知三点 P（5，2）、F_1（－6，0）、F_2（6，0）。

（Ⅰ）求以 F_1、F_2 为焦点且过点 P 的椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设点 P、F_1、F_2 关于直线 y＝x 的对称点分别为 P'、F_1'、F_2'，求以 F_1'、F_2' 为焦点且过点 P' 的双曲线的标准方程。

[**考点分析：本题主要考查椭圆与双曲线的基本概念、标准方程、几何性质等基础知识和基本运算能力**]

[**解**]（I）由题意，可设所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，其半焦距 $c=6$。

$2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{11^2+2^2}+\sqrt{1^2+2^2}=6\sqrt{5}$，　　$\therefore a=3\sqrt{5}$，

$b^2=a^2-c^2=45-36=9$，故所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

（II）点 P（5，2）、F_1（－6，0）、F_2（6，0）关于直线 y＝x 的对称点分别为：

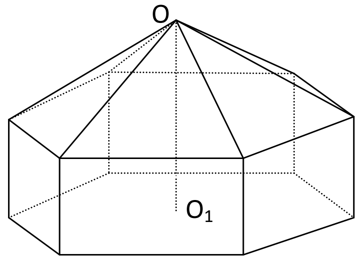
$P'(2,5)$、F_1'（0，-6）、F_2'（0，6）

设所求双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\ (a_1>0,b_1>0)$，由题意知半焦距 $c_1=6$，

$2a_1=\left\|P'F_1'|-|P'F_2'|\right\|=\left|\sqrt{11^2+2^2}-\sqrt{1^2+2^2}\right|=4\sqrt{5}$，　　$\therefore a_1=2\sqrt{5}$，

${b_1}^2={c_1}^2-{a_1}^2=36-20=16$，故所求双曲线的标准方程为$\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{x^2}{16}=1$。

18.（本小题满分 14 分）



请您设计一个帐篷。它下部的形状是高为 1m 的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为 3m 的正六棱锥（如右图所示）。试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 o_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大？

[**考点分析: 本题主要考查利用导数研究函数的最值的基础知识，以及运用数学知识解决实际问题的能力**]

[**解**]设 OO_1 为 x m，则$1<x<4$

由题设可得正六棱锥底面边长为：$\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$，（单位：$m$）

故底面正六边形的面积为：$6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(8+2x-x^2)$，（单位：$m^2$）

帐篷的体积为：

$\mathrm{V}(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\dfrac{1}{3}(x-1)+1\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$（单位：$m^3$）

求导得$\mathrm{V}'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$。

令$\mathrm{V}'(x)=0$，解得$x=-2$（不合题意，舍去），$x=2$，

当$1<x<2$时，$\mathrm{V}'(x)>0$，$\mathrm{V}(x)$为增函数；

当$2<x<4$时，$\mathrm{V}'(x)<0$，$\mathrm{V}(x)$为减函数。

$\therefore$当$x=2$时，$\mathrm{V}(x)$最大。

答：当 OO_1 为 2 m 时，帐篷的体积最大，最大体积为$16\sqrt{3}$ m^3。

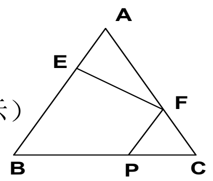
19.（本小题满分 14 分，第一小问满分 4 分，第二小问满分 5 分，第三小问满分 5 分）

在正三角形 ABC 中，E、F、P 分别是 AB、AC、BC 边上的点，满足 AE:EB＝CF:FA＝CP:PB＝1:2（如图 1）。将△AEF 沿 EF 折起到ΔA_1EF的位置，使二面角 A_1－EF－B 成直二面角，连结 A_1B、A_1P（如图 2）

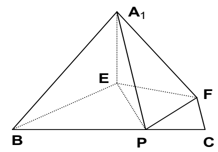
（Ⅰ）求证：A_1E⊥平面 BEP；

（Ⅱ）求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小；

（Ⅲ）求二面角 B－A_1P－F 的大小（用反三角函数表示）



图



图

[**解**]不妨设正三角形的边长为 3，则

（I）在图 1 中，取 BE 的中点 D，连结 DF，

∵AE∶EB=CF∶FA=1∶2，∴AF=AD=2，而∠A=60°，∴△ADF 为正三角形。

又 AE=DE=1，∴EF⊥AD。

在图 2 中，A_1E⊥EF，BE⊥EF，∴∠A_1EB 为二面角 A_1－EF－B 的一个平面角，

由题设条件知此二面角为直二面角，∴A_1E⊥BE。

又 BE⋂EF=E，∴A_1E⊥面 BEF，即 A_1E⊥面 BEP。

（II）在图 2 中，∵A_1E 不垂直于 A_1B，∴A_1E 是面 A_1BP 的斜线，又 A_1E⊥面 BEP，∴A_1E⊥BP，∴BP 垂直于 A_1E 在面 A_1BP 内的射影（三垂线定理的逆定理）

设 A_1E 在面 A_1BP 内的射影为 A_1Q，且 A_1Q 交 BP 于 Q，

则∠EA_1Q 就是 A_1E 与面 A_1BP 所成的角，且 BP⊥A_1Q。

在△EBP 中，∵BE=BP=2，∠EBP=60°，∴△EBP 为正三角形，∴BE=EP。

又 A_1E⊥面 BEP，∴$A_1B=A_1P$，∴Q 为 BP 的中点，且 EQ=$\sqrt{3}$，而 $A_1E=1$，

∴在 Rt△A_1EQ 中，$\tan\angle A_1EQ=\dfrac{EQ}{A_1E}=\sqrt{3}$，即直线 A_1E

与面 A_1BP 所成角为 60°。

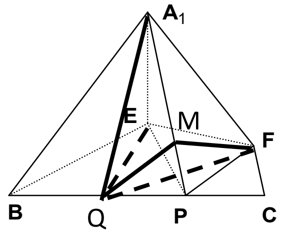


图 3

（III）在图 3 中，过 F 作 FM 于 M，连结 QM、QF。

∵CF=CP=1，∠C=60°，∴△FCP 为正三角形，故 PF=1，

又 PQ=$\dfrac{1}{2}$BP=1，∴PF=PQ……①

∵A_1E⊥面 BEP，EQ=EF=$\sqrt{3}$，∴$A_1F=A_1Q$，

∴△A_1FP≅△A_1QP，故∠A_1PF=∠A_1PQ……②

由①②及 MP 为公共边知△FMP≅△QMP，故∠QMP=∠FMP=90o，且 MF=MQ，

∴∠FMQ 为二面角 B－A_1P－F 的一个平面角。

在 Rt△A_1QP 中，$A_1Q=A_1F=2$，PQ=1，∴$A_1P=\sqrt{5}$，

∵MQ⊥A_1P，∴MQ=$\dfrac{A_1Q\cdot PQ}{A_1P}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，∴MF=$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

在△FCQ 中，FC=1，QC=2，∠C=60°，由余弦定理得 QF=$\sqrt{3}$，

在△FMQ 中，$\cos\angle FMQ=\dfrac{MF^2+MQ^2-QF^2}{2MF\cdot MQ}=-\dfrac{7}{8}$，

∴二面角 B－A_1P－F 的的大小为 $\pi-\arccos\dfrac{7}{8}$。

[注]此题还可以用向量法来解。（略）

20.（本小题满分 16 分，第一小问 4 分，第二小问满分 6 分，第三小问满分 6 分）

设 a 为实数，记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$。

（Ⅰ）设 t＝$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$

（Ⅱ）求 $g(a)$

（Ⅲ）试求满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a

[考点分析：本题主要考查函数、方程等基本知识，考查分类讨论的数学思想方法和综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力]

[**解**]（I）∵$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，

∴要使 t 有意义，必须 $1+x\ge 0$ 且 $1-x\ge 0$，即 $-1\le x\le 1$

∵$t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，且 $t\ge 0$……①　　∴t 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$。

由①得：$\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$，∴$m(t)=a(\dfrac{1}{2}t^2-1)+t=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$。

（II）由题意知 $g(a)$ 即为函数 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值，

∵直线 $t=-\dfrac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴，∴可分以下几种情况进行讨论：

（1）当 $a>0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向上的抛物线的一段，

由 $t=-\dfrac{1}{a}<0$ 知 $m(t)$ 在 $t\in[\sqrt{2},2]$ 上单调递增，故 $g(a)=m(2)=a+2$；

（2）当 $a=0$ 时，$m(t)=t$，$t\in[\sqrt{2},2]$，有 $g(a)$=2；

（3）当 $a<0$ 时，，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向下的抛物线的一段，

若$t=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$即$a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，

若$t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$即$a\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]$时，$g(a)=m(-\frac{1}{a})=-a-\frac{1}{2a}$，

若$t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$即$a\in(-\frac{1}{2},0)$时，$g(a)=m(2)=a+2$。

综上所述，有$g(a)=\begin{cases}a+2 & (a>-\frac{1}{2})\\ -a-\frac{1}{2a} & ,(-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le-\frac{1}{2})\\ \sqrt{2} & (a\le-\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$。

（III）当$a>-\frac{1}{2}$时，$g(a)=a+2>\frac{3}{2}>\sqrt{2}$；

当$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le-\frac{1}{2}$时，$-a\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$-\frac{1}{2a}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$，$\therefore -a\ne-\frac{1}{2a}$，

$g(a)=-a-\frac{1}{2a}>2\sqrt{(-a)\cdot(-\frac{1}{2a})}=\sqrt{2}$，故当$a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$g(a)>\sqrt{2}$；

当$a>0$时，$\frac{1}{a}>0$，由$g(a)=g(\frac{1}{a})$知：$a+2=\frac{1}{a}+2$，故$a=1$；

当$a<0$时，$a\cdot\frac{1}{a}=1$，故$a\le-1$或$\frac{1}{a}\le-1$，从而有$g(a)=\sqrt{2}$或$g(\frac{1}{a})=\sqrt{2}$，

要使$g(a)=g(\frac{1}{a})$，必须有$a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{a}\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$-\sqrt{2}\le a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时，$g(a)=\sqrt{2}=g(\frac{1}{a})$。

综上所述，满足$g(a)=g(\frac{1}{a})$的所有实数 a 为：$-\sqrt{2}\le a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$a=1$。

21.（本小题满分 14 分）

设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足：$b_n=a_n-a_{n+2}$，$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$（$n$=1, 2, 3, …），

证明：$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列且$b_n\le b_{n+1}$（n=1, 2, 3, …）

[**考点分析：本题主要考查等差数列、充要条件等基础知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力**]

[**证明**] 1° 必要性：设数列$\{a_n\}$是公差为d_1的等差数列，则：

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}-a_{n+3})-(a_n-a_{n+2})=(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+3}-a_{n+2})=d_1-d_1=0$，

$\therefore b_n\le b_{n+1}$（$n$=1, 2, 3, …）成立；

又$c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}-a_n)+2(a_{n+2}-a_{n+1})+3(a_{n+3}-a_{n+2})=6d_1$（常数）（$n$=1, 2, 3, …）

$\therefore$数列$\{c_n\}$为等差数列。

2° 充分性：设数列$\{c_n\}$是公差为d_2的等差数列，且$b_n\le b_{n+1}$（n=1, 2, 3, …），

$\because c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$……①　　　$\therefore c_{n+2}=a_{n+2}+2a_{n+3}+3a_{n+4}$……②

①－②得：$c_n-c_{n+2}=(a_n-a_{n+2})+2(a_{n+1}-a_{n+3})+3(a_{n+2}-a_{n+4})=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}$

$\because c_n - c_{n+2} = (c_n - c_{n+1}) + (c_{n+1} - c_{n+2}) = -2d_2$

$\therefore b_n + 2b_{n+1} + 3b_{n+2} = -2d_2$……③　从而有 $b_{n+1} + 2b_{n+2} + 3b_{n+3} = -2d_2$……④

④－③得：$(b_{n+1} - b_n) + 2(b_{n+2} - b_{n+1}) + 3(b_{n+3} - b_{n+2}) = 0$……⑤

$\because (b_{n+1} - b_n) \geq 0$，$b_{n+2} - b_{n+1} \geq 0$，$b_{n+3} - b_{n+2} \geq 0$，

$\therefore$由⑤得：$b_{n+1} - b_n = 0$（n=1, 2, 3, …），

由此，不妨设 $b_n = d_3$（n=1, 2, 3, …），则 $a_n - a_{n+2} = d_3$（常数）

故 $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} = 4a_n + 2a_{n+1} - 3d_3$……⑥

从而 $c_{n+1} = 4a_{n+1} + 2a_{n+2} - 3d_3 = 4a_{n+1} + 2a_n - 5d_3$……⑦

⑦－⑥得：$c_{n+1} - c_n = 2(a_{n+1} - a_n) - 2d_3$，

故 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(c_{n+1} - c_n) + d_3 = \dfrac{1}{2}d_2 + d_3$（常数）（$n$=1, 2, 3, …），

$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

综上所述：$\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是 $\{c_n\}$ 为等差数列且 $b_n \leq b_{n+1}$（n=1, 2, 3, …）。