

2012上海高考数学试题（文科）答案与解析

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）

1. 计算： $\frac{3-i}{1+i}$ = _____（ i 为虚数单位）.

【答案】 $1-2i$

【解析】 $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-2i$

【点评】 本题着重考查复数的除法运算，首先将分子、分母同乘以分母的共轭复数，净分母实数化即可。

2. 若集合 $A = \{x \mid 2x - 1 > 0\}$, $B = \{x \mid |x| < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____ .

【答案】 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

【解析】 由集合A可得： $x > \frac{1}{2}$ ，由集合B可得： $-1 < x < 1$ ，所以， $A \cap B =$

$\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

【点评】 本题考查集合的概念和性质的运用，同时考查了一元一次不等式和绝对值不等的解法，解决此类问题，首先分清集合的元素的构成，然后，借助于数轴可得。

3. 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 2 \\ -1 & \cos x \end{vmatrix}$ 的最小正周期是_____ .

【答案】 π

【解析】 根据题得： $f(x) = \sin x \cos x + 2 = \frac{1}{2} \sin 2x + 2$

【点评】 本题主要考查行列式的基本运算、三角函数的周期性、二倍角公式.考纲中明确要求掌握二阶行列式的运算性质，属于容易题，难度较小.

4. 若 $\vec{a} = (2, 1)$ 是直线 l 的一个方向向量，则 l 的倾斜角的大小为_____

（结果用反三角函数值表示）.

【答案】 $\arctan \frac{1}{2}$

【解析】 设直线的倾斜角为 α ，则 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$.

【点评】 本题主要考查直线的方向向量、直线的倾斜角与斜率的关系、反三角函数的表示.直线的倾斜角的取值情况一定要注意,属于低档题,难度较小.

5.一个高为2的圆柱,底面周长为 2π ,该圆柱的表面积为_____.

【答案】 6π

【解析】 根据该圆柱的底面周长得底面圆的半径为 $r=1$,所以该圆柱的表面积为:

$$S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi.$$

【点评】 本题主要考查空间几何体的表面积公式.审清题意,所求的为圆柱的表面积,不是侧面积,也不是体积,其次,对空间几何体的表面积公式要记准记牢,属于中低档题.

6.方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $\log_2 3$

【解析】 根据方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$,化简得 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$,令

$$2^x = t (t > 0),$$

则原方程可化为 $t^2 - 2t - 3 = 0$,解得 $t = 3$ 或 $t = -1$ (舍),即

$$2^x = 3, x = \log_2 3. \text{所以原方程的解为 } \log_2 3.$$

【点评】 本题主要考查指数型方程、指数的运算、指数与对数形式的互化、换元法在求解数学问题中的运用.本题容易产生增根,要注意取舍,切勿随意处理,导致不必要的错误.本题属于中低档题目,难度适中.

7.有一列正方体,棱长组成以1为首项、 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,体积分别记为

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \underline{\quad}.$$

【答案】 $\frac{8}{7}$

【解析】 由正方体的棱长组成以1为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,可知它们的体积则

组成了一个以1为首项, $\frac{1}{8}$ 为公比的等比数列,因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}.$$

【点评】 本题主要考查无穷递缩等比数列的极限、等比数列的通项公式、等比数列的定义. 考查知识较综合.

8. 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的二项式展开式中, 常数项等于 ____.

【答案】 -20

【解析】 根据所给二项式的构成, 构成的常数项只有一项, 就是

$$T_4 = C_6^3 x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -20.$$

【点评】 本题主要考查二项式定理. 对于二项式的展开式要清楚, 特别注意常数项的构成. 属于中档题.

9. 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 若 $g(x) = f(x) + 2$ 且 $g(1) = 1$, 则 $g(-1) =$ ____.

【答案】 3

【解析】 因为函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 所以有 $f(-x) = -f(x)$, 即

$$g(1) = f(1) + 2, \text{ 又 } g(1) = 1, \text{ 所以, } f(1) = -1,$$

$$f(-1) = -f(1) = 1, g(-1) = f(-1) + 2 = 1 + 2 = 3.$$

【点评】 本题主要考查函数的奇偶性. 在运用此性质解题时要注意: 函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 所以有 $f(-x) = -f(x)$ 这个条件的运用, 平时要加强这方面的训练, 本题属于中档题, 难度适中.

10. 满足约束条件 $|x| + 2|y| \leq 2$ 的目标函数 $z = y - x$ 的最小值是 ____.

【答案】 -2

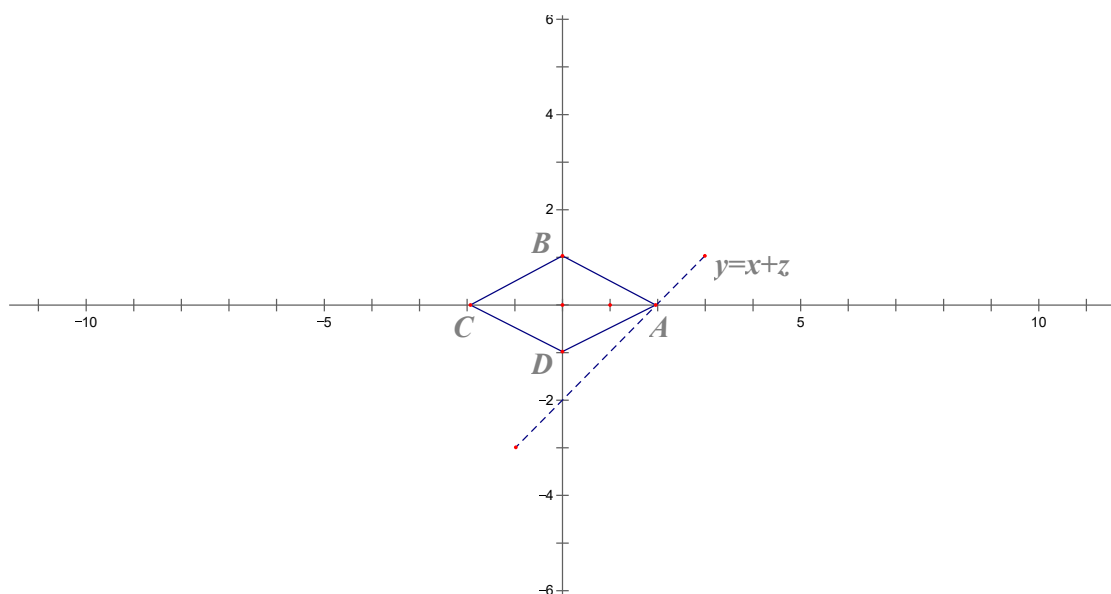
【解析】 根据题意得到 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 2y \leq 2; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \\ x - 2y \leq 2; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ -x + 2y \leq 2; \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ x + 2y \geq -2. \end{cases}$$

其可行域为平行四边形 $ABCD$ 区域，（包括边界）目标函数可以化成 $y = x + z$ ，

z 的最小值就是该直线在 y 轴上截距的最小值，当该直线过点 $A(2,0)$ 时， z 有最小

值，此时 $z_{\min} = -2$.



【点评】 本题主要考查线性规划问题，准确画出可行域，找到最优解，分析清楚当该

直线过点 $A(2,0)$ 时， z 有最小值，此时 $z_{\min} = -2$

，这是解题的关键，本题属于中档题，难度适中。

11. 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人只选择一个项目，则有且仅有两位同学选择的项目相同的概率是____（结果用最简分数表示）。

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 一共有27种取法，其中有且只有两个人选择相同的项目的取法共有18种，所以根据古典概型得到此种情况下的概率为 $\frac{2}{3}$.

【点评】 本题主要考查排列组合概率问题、古典概型.要分清基本事件数和基本事件总

数.本题属于中档题.

12.在矩形 $ABCD$ 中,边 AB 、 AD 的长分别为2、1,若 M 、 N 分别是边 BC 、

CD 上的点,且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____

【答案】 $[1,4]$

【解析】 以向量 \overrightarrow{AB} 所在直线为 x 轴,以向量 \overrightarrow{AD} 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系

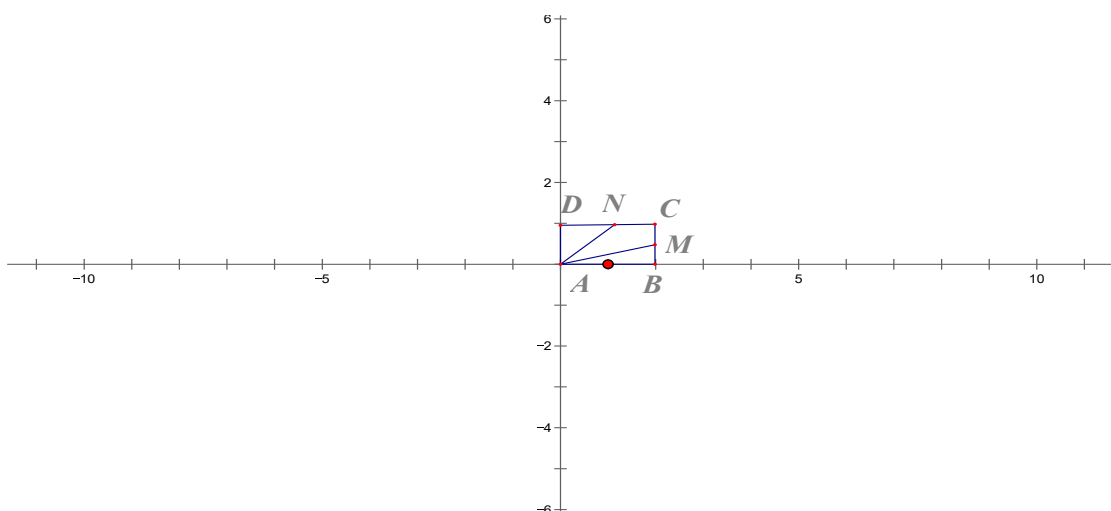
, 如图所示, 因为 $AB = 2, AD = 1$, 所以 $A(0,0), B(2,0), C(2,1), D(0,1)$. 设

$M(2,b), N(x,1), (0 \leq x \leq 2)$, 根据题意, $b = \frac{2-x}{2}$, 所以

$\overrightarrow{AN} = (x,1), \overrightarrow{AM} = (2, \frac{2-x}{2})$.

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}x + 1 (0 \leq x \leq 2)$, 所以 $1 \leq \frac{3}{2}x + 1 \leq 4$, 即

$1 \leq \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \leq 4$.



【点评】 本题主要考查平面向量的基本运算、概念、平面向量的数量积的运算律.做题时,要切实注意条件的运用.本题属于中档题,难度适中.

13.已知函数 $y = f(x)$ 的图像是折线段 ABC , 其中 $A(0,0)$ 、 $B(\frac{1}{2},1)$ 、 $C(1,0)$

, 函数 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图像与 x 轴围成的图形的面积为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 根据题意, 得到 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2, \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$,

从而得到 $y = xf(x) = \begin{cases} 2x^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 2x, \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ 所以围成的面积为

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}, \text{ 所以围成的图形的面积为 } \frac{1}{4}.$$

【点评】 本题主要考查函数的图象与性质, 函数的解析式的求解方法、定积分在求解平面图形中的运用. 突出体现数形结合思想, 本题综合性较强, 需要较强的分析问题和解决问题的能力, 在以后的练习中加强这方面的训练, 本题属于中高档试题, 难度较大.

14. 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+2} = f(a_n)$,

若 $a_{2010} = a_{2012}$, 则 $a_{20} + a_{11}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{3+13\sqrt{5}}{26}$

【解析】 据题 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 并且 $a_{n+2} = f(a_n)$, 得到 $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_n}$,

$a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_{2010} = a_{2012}$, 得到 $\frac{1}{1+a_{2010}} = a_{2010}$, 解得

$a_{2010} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去). 依次往前推得到

$$a_{20} + a_{11} = \frac{3+13\sqrt{5}}{26}.$$

【点评】 本题主要考查数列的概念、组成和性质、同时考查函数的概念. 理解条件

$a_{n+2} = f(a_n)$ 是解决问题的关键, 本题综合性强, 运算量较大, 属于中高档试题.

二、选择题(本大题共有4题, 满分20分)

15. 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根, 则 ()

A. $b = 2, c = 3$ B. $b = 2, c = -1$ C. $b = -2, c = -1$ D. $b = -2, c = 3$

【答案】 D

【解析】 根据实系数方程的根的特点知 $1 - \sqrt{2}i$ 也是该方程的另一个根, 所以

$1 + \sqrt{2}i + 1 - \sqrt{2}i = 2 = -b$, 即 $b = -2$, $(1 - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i) = 3 = c$, 故答

案选择D.

【点评】 本题主要考查实系数方程的根的问题及其性质、复数的代数形式的四则运算.

属于中档题, 注重对基本知识和基本技巧的考查, 复习时要特别注意.

16. 对于常数 m 、 n , “ $mn > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的曲线是椭圆”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的曲线表示椭圆, 常数 m, n 的取值为 $\begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \\ m \neq n, \end{cases}$ 所

以, 由 $mn > 0$ 得不到程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的曲线表示椭圆, 因而不充分; 反过来, 根

据该曲线表示椭圆, 能推出 $mn > 0$, 因而必要. 所以答案选择B.

【点评】 本题主要考查充分条件和必要条件、充要条件、椭圆的标准方程的理解. 根据方程的组成特征, 可以知道常数 m, n 的取值情况. 属于中档题.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 由正弦定理, 得 $\frac{a}{2R} = \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C$, 代入得到

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

由余弦定理的推理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$, 所以C为钝角, 所以该三角形为钝

角三角形.故选择A.

【点评】 本题主要考查正弦定理及其推理、余弦定理的运用.主要抓住所给式子的结构来选择定理, 如果出现了角度的正弦值就选择正弦定理, 如果出现角度的余弦值就选择余弦定理.本题属于中档题.

18. 若 $S_n = \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \dots + \sin \frac{n\pi}{7}$ ($n \in N^*$), 则在 S_1, S_2, \dots, S_{100} 中,

正数的个数是 ()

- A. 16 B. 72 C. 86 D. 100

【答案】 C

【解析】 依据正弦函数的周期性, 可以找其中等于零或者小于零的项.

【点评】 本题主要考查正弦函数的图象和性质和间接法解题.解决此类问题需要找到规律, 从题目出发可以看出来相邻的14项的和为0, 这就是规律, 考查综合分析问题和解决问题的能力.

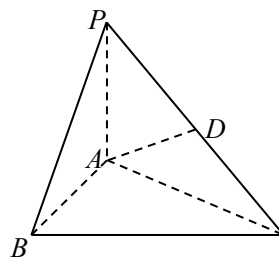
三、解答题 (本大题共有5题, 满分74分)

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , D 是

PC 的中点. 已知 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$,

$PA=2$. 求:

- (1) 三棱锥 $P-ABC$ 的体积; (6分)
- (2) 异面直线 BC 与 AD 所成的角的大小 (结果用反三角函数数值表示). (6分)



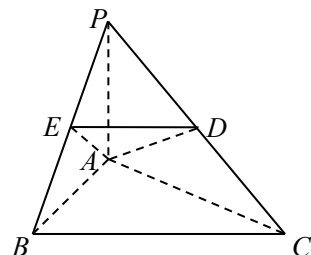
【解】 (1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, 2分

三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \times PA = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad 6分$$

- (2) 取 PB 的中点 E , 连接 DE 、 AE , 则 $ED \parallel BC$, 所以 $\angle ADE$ (或其补角) 是异面直线 BC 与 AD 所成的角. 8分

在三角形 ADE 中, $DE=2$, $AE=\sqrt{2}$, $AD=2$,



$$\cos \angle ADE = \frac{2^2+2^2-2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \angle ADE = \arccos \frac{3}{4}.$$

因此, 异面直线 BC 与 AD 所成的角的大小是 $\arccos \frac{3}{4}$. 12分

【点评】 本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系, 考查空间想象能力和推理论证能力. 综合考查空间中两条异面直线所成的角的求解, 同时考查空间几何体的体积公式的运用. 本题源于《必修2》立体几何章节复习题, 复习时应注重课本, 容易出现找错角的情况, 要考虑全面, 考查空间想象能力, 属于中档题.

20. 已知函数 $f(x) = \lg(x+1)$.

(1) 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$, 求 x 的取值范围; (6分)

(2) 若 $g(x)$ 是以2为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$, 求函数 $y = g(x)$ ($x \in [1, 2]$) 的反函数. (8分)

[解] (1) 由
$$\begin{cases} 2-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}, \text{ 得 } -1 < x < 1.$$

由 $0 < \lg(2-2x) - \lg(x+1) = \lg \frac{2-2x}{x+1} < 1$ 得 $1 < \frac{2-2x}{x+1} < 10$.

……3分

因为 $x+1 > 0$, 所以 $x+1 < 2-2x < 10x+10$, $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$.

由
$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases} \text{ 得 } -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}. \quad \text{……6分}$$

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $2-x \in [0, 1]$, 因此

$$y = g(x) = g(x-2) = g(2-x) = f(2-x) = \lg(3-x).$$

……10分

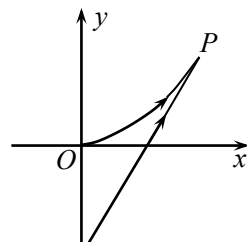
由单调性可得 $y \in [0, \lg 2]$.

因为 $x = 3 - 10^y$, 所以所求反函数是 $y = 3 - 10^x$, $x \in [0, \lg 2]$.

……14分

【点评】 本题主要考查函数的概念、性质等基础知识以及数形结合思想, 熟练掌握指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质是关键, 属于中档题.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位: 以失事船的当前位置为原点, 以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以1海里为单位长度), 则救援船恰在失事船的正南方向12海里



里A处,如图.现假设:①失事船的移动路径可视为抛物线

$y = \frac{12}{49}x^2$; ②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援; ③救

援船出发 t 小时后,失事船所在位置的横坐标为 $7t$.

(1)当 $t = 0.5$ 时,写出失事船所在位置 P 的纵坐标.若此时两船恰好会合,求救援船速度的大小和方向;(6分)

(2)问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船?(8分)

[解](1) $t = 0.5$ 时, P 的横坐标 $x_P = 7t = \frac{7}{2}$,代入抛物线方程 $y = \frac{12}{49}x^2$

中,得 P 的纵坐标 $y_P = 3$. ……2分

由 $|AP| = \frac{\sqrt{949}}{2}$,得救援船速度的大小为 $\sqrt{949}$ 海里/时. ……4分

由 $\tan \angle OAP = \frac{\frac{7}{2}}{3+12} = \frac{7}{30}$,得 $\angle OAP = \arctan \frac{7}{30}$,故救援船速度的方向为北偏东 $\arctan \frac{7}{30}$ 弧度. ……6分

(2)设救援船的时速为 v 海里,经过 t 小时追上失事船,此时位置为 $(7t, 12t^2)$.

由 $vt = \sqrt{(7t)^2 + (12t^2 + 12)^2}$,整理得 $v^2 = 144(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 337$. ……10分

因为 $t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2$,当且仅当 $t=1$ 时等号成立,

所以 $v^2 \geq 144 \times 2 + 337 = 25^2$,即 $v \geq 25$.

因此,救援船的时速至少是25海里才能追上失事船. ……14分

【点评】本题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识.选择恰当的函数模型是解决此类问题的关键,属于中档题.考查灵活运算数形结合、分类讨论的思想方法进行探究、分析与解决问题的能力.属于中档偏上题目,也是近几年高考的热点问题.

22.在平面直角坐标系 xOy 中,已知双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$.

(1)设 F 是 C 的左焦点, M 是 C 右支上一点.

若 $|MF| = 2\sqrt{2}$,求过 M 点的坐标;(5分) (2)过 C 的左顶点作 C 的两条渐近线的平行线,求这两组平行线围成的平行四边形的

面积;(5分)

(3)设斜率为 k ($|k| < \sqrt{2}$)的直线 l 交 C 于 P 、 Q 两点,若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切,

求证: $OP \perp OQ$;(6分)

[解](1)双曲线 $C: \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 = 1$,左焦点 $F(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$.

设 $M(x, y)$,则 $|MF|^2 = (x + \frac{\sqrt{6}}{2})^2 + y^2 = (\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$,

……2分

由 M 是右支上一点,知 $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $|MF| = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,得

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以 $M(\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\sqrt{2})$.

……5分

(2) 左顶点 $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 渐近线方程: $y = \pm\sqrt{2}x$.

过 A 与渐近线 $y = \sqrt{2}x$ 平行的直线方程为: $y = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$, 即

$$y = \sqrt{2}x + 1.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ y = \sqrt{2}x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

……8分

所求平行四边形的面积为 $S = |OA| |y| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

……10分

(3) 设直线 PQ 的方程是 $y = kx + b$. 因直线与已知圆相切, 故 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$,

$$\text{即 } b^2 = k^2 + 1 \quad (*).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + b \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (2 - k^2)x^2 - 2kbx - b^2 - 1 = 0.$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2kb}{2-k^2} \\ x_1x_2 = \frac{-1-b^2}{2-k^2} \end{cases}.$$

$y_1y_2 = (kx_1 + b)(kx_2 + b)$, 所以

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = (1 + k^2)x_1x_2 + kb(x_1 + x_2) + b^2$$

$$= \frac{(1+k^2)(-1-b^2)}{2-k^2} + \frac{2k^2b^2}{2-k^2} = \frac{-1+b^2-k^2}{2-k^2}.$$

由 (*) 知 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 所以 $OP \perp OQ$.

……16分

【点评】 本题主要考查双曲线的概念、标准方程、几何性质及其直线与双曲线的关系。特别要注意直线与双曲线的关系问题, 在双曲线当中, 最特殊的为等轴双曲线, 它的离心率为 $\sqrt{2}$, 它的渐近线为 $y = \pm x$, 并且相互垂直, 这些性质的运用可以大大节省解题时间, 本题属于中档题。

23. 对于项数为 m 的有穷数列数集 $\{a_n\}$, 记 $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($k=1, 2, \dots,$

m), 即 b_k

为 a_1, a_2, \dots, a_k 中的最大值, 并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如 1, 3, 2, 5, 5 的控制数列是

1, 3, 3, 5, 5.

(1) 若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为 2, 3, 4, 5, 5, 写出所有的 $\{a_n\}$; (4分)

(2) 设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列, 满足 $a_k + b_{m-k+1} = C$ (C 为常数, $k=1, 2, \dots, m$)

求证: $b_k = a_k$ ($k=1, 2, \dots, m$); (6分)

(3) 设 $m=100$, 常数 $a \in (\frac{1}{2}, 1)$. 若 $a_n = an^2 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$, $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列,

求 $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_{100} - a_{100})$.

[解] (1) 数列 $\{a_n\}$ 为: 2, 3, 4, 5, 1; 2, 3, 4, 5, 2; 2, 3, 4, 5, 3;

2, 3, 4, 5, 4; 2, 3, 4, 5, 5.4分

(2) 因为 $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $b_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$,

所以 $b_{k+1} \geq b_k$6分

因为 $a_k + b_{m-k+1} = C$, $a_{k+1} + b_{m-k} = C$,

所以 $a_{k+1} - a_k = b_{m-k+1} - b_{m-k} \geq 0$, 即 $a_{k+1} \geq a_k$.

.....8分

因此, $b_k = a_k$10分

(3) 对 $k = 1, 2, \dots, 25$, $a_{4k-3} = a(4k-3)^2 + (4k-3)$;

$a_{4k-2} = a(4k-2)^2 + (4k-2)$;

$a_{4k-1} = a(4k-1)^2 - (4k-1)$; $a_{4k} = a(4k)^2 - (4k)$.

比较大小, 可得 $a_{4k-2} > a_{4k-3}$12分

因为 $\frac{1}{2} < a < 1$, 所以 $a_{4k-1} - a_{4k-2} = (a-1)(8k-3) < 0$, 即

$$a_{4k-2} > a_{4k-1};$$

$$a_{4k} - a_{4k-2} = 2(2a-1)(4k-1) > 0, \text{ 即}$$

$$a_{4k} > a_{4k-2}.$$

$$\text{又 } a_{4k+1} > a_{4k},$$

$$\text{从而 } b_{4k-3} = a_{4k-3}, b_{4k-2} = a_{4k-2}, b_{4k-1} = a_{4k-2}, b_{4k} = a_{4k}.$$

……15分

$$\text{因此 } (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{100} - a_{100})$$

=

$$(b_3 - a_3) + (b_7 - a_7) + (b_{10} - a_{10}) + \cdots + (b_{4k-1} - a_{4k-1}) + \cdots + (b_{99} - a_{99})$$

=

$$(a_2 - a_3) + (a_6 - a_7) + (a_9 - a_{10}) + \cdots + (a_{4k-2} - a_{4k-1}) + \cdots + (a_{98} - a_{99})$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (a_{4k-2} - a_{4k-1}) = (1-a) \sum_{k=1}^{25} (8k-3) = 2525(1-a).$$

……18分

【点评】 本题主要考查数列的通项公式、等差、等比数列的基本性质等基础知识，本题属于信息给予题，通过定义“控制”数列，考查考生分析探究及推理论证的能力。综合考查数列的基本运算，数列问题一直是近几年的命题重点内容，应引起足够的重视。