2002年重庆高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．第Ⅰ卷1至2页．第Ⅱ卷3至9页．共150分．考试时间120分钟．

第Ⅰ卷(选择题共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

2．复数 $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ 的值是

A．$-i$　　B．i　　C．-1　　D．1

3．不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是

A．$\{x\,|\,0\le x<1\}$　　B．$\{x\,|\,x<0$ 且 $x\ne -1\}$

C．$\{x\,|\,-1<x<1\}$　　D．$\{x\,|\,x<1$ 且 $x\ne -1\}$

4．在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是

A．$(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\cup(\pi,\dfrac{5\pi}{4})$　　B．$(\dfrac{\pi}{4},\pi)$

C．$(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4})$　　D．$(\dfrac{\pi}{4},\pi)\cup(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2})$

5．设集合 $M=\{x\,|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in Z\}$，$N=\{x\,|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in Z\}$，则

A．$M=N$　　B．$M\subset N$　　C．$M\supset N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

6．点 $P(1,0)$ 到曲线 $\begin{cases}x=t^2\\ y=2t\end{cases}$（其中参数 $t\in R$）上的点的最短距离为

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

7．一个圆锥和一个半球有公共底面，如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等，那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

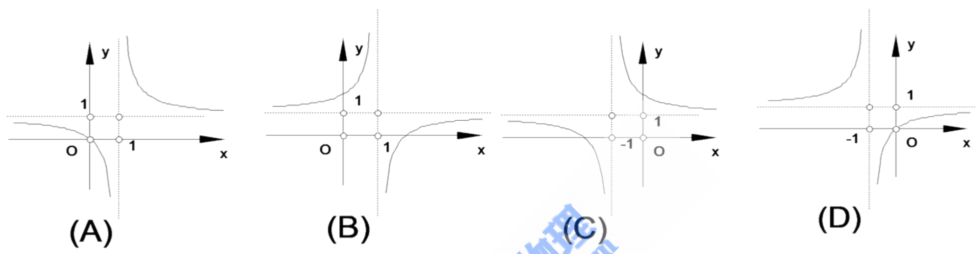
8．正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$，则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是

A．$90°$　　B．$60°$　　C．$45°$　　D．$30°$

9．函数 $y=x^2+bx+c$ （$\in[0,+\infty)$）是单调函数的充要条件是

A．$b\geq 0$　　B．$b\leq 0$　　C．$b>0$　　D．$b<0$

10．函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图象是



11．从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有

A．8 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．20 种

12．据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》：“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7．3%”，如果“十•五”期间（2001 年—2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到“十•五”末我国国内年生产总值约为

A．115000 亿元　　B．120000 亿元　　C．127000 亿元　　D．135000 亿元

第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线．

13．函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值这和为 3，则 $a=$______

14．椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$，那么 $k=$__________

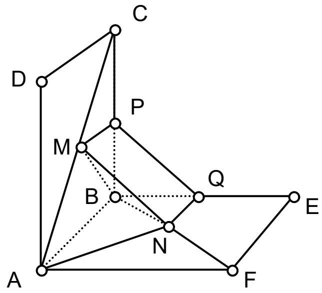
15．$(x^2+1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是____________

16．已知 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4})=$____

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知$\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求$\sin\alpha$、$tg\alpha$的值.

18.如图,正方形$ABCD$、$ABEF$的边长都是1,而且平面$ABCD$、$ABEF$互相垂直.点M在AC上移动，点N在BF上移动，若$CM=BN=a$（$0<a<\sqrt{2}$）



（1）求MN的长;

（2）a为何值时，MN的长最小;

（3）当MN的长最小时，求面MNA与面MNB所成二面角α的大小.

19．设点P到点$(-1,0)$、$(1,0)$距离之差为$2m$，到x、y轴的距离之比为2，求m的取值范围.

20．某城市2001年末汽车保有量为30万辆，预计此后每年报废上一年末汽车保有量的6%，并且每年新增汽车数量相同.为保护城市环境，要求该城市汽车保有量不超过60万辆，那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

21．设a为实数，函数$f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in R$

（1）讨论$f(x)$的奇偶性;

（2）求$f(x)$的最小值.

22．设数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=a_n{}^2-na_n+1$，$n=1,2,3,\cdots$

（I）当$a_1=2$时，求a_2,a_3,a_4并由此猜测a_n的一个通项公式;

（II）当$a_1\ge 3$时，证明对所的$n\ge 1$，有

（i）$a_n\ge n+2$

（ii）$\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\dfrac{1}{1+a_3}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}\le\dfrac{1}{2}$

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	C	B	B	C	B	A	B	B	C

二、填空题

（13）2　　（14）1　　（15）1008　　（16）$\frac{7}{2}$

三、解答题

（17）解：由$\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$，得

$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha=0$

$2\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)=0$

$\because \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$2\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)=0$　$\therefore \sin\alpha+1\neq 0$，$\cos^2\alpha\neq= 0$

$\therefore 2\sin\alpha-1=0$，即$\sin\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

（18）解（I）作$MP\ /\!/\ AB$交BC于点P，$NQ\ /\!/\ AB$交BE于点Q，连结PQ，依题意可得$MP\ /\!/\ NQ$，且$MP=NQ$，即$MNQP$是平行四边形.

$\therefore MN=PQ$

由已知$CM=BN=a$，$CB=AB=BE=1$

$\therefore AC=BF=\sqrt{2}$，$CP=BQ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$MN = PQ = \sqrt{(1-CP)^2 + BQ^2} =$$

$$= \sqrt{(1-\frac{a}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}})^2}$$

$$= \sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \qquad (0 < a < \sqrt{2})$$

（II）由（I）

$$MN = \sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

所以，当$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$时，$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

即当M、N分别为AC、BF的中点时，MN的长最小，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（III）取MN的中点G，连结AG、BG，

$\because AM = AN, BM = BN$，$G$为$MN$的中点

$\therefore AG \perp MN, BG \perp MN$，即$\angle AGB$即为二面角的平面角$\alpha$

又$AG = BG = \frac{\sqrt{6}}{4}$，所以，由余弦定理有

$$\cos\alpha = \frac{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{4})^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

故所求二面角为$\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$

（19）解：设点P的坐标为(x, y)，依题设得$\frac{|y|}{|x|} = 2$，即$y = \pm 2x$，$x \neq 0$

因此，点$P(x, y)$、$M(-1,0)$、$N(1,0)$三点不共线，得

$$||PM| - |PN|| < |MN| = 2$$

$$\because ||PM| - |PN|| = 2|m| > 0$$

$$\therefore 0 < |m| < 1$$

因此，点P在以M、N为焦点，实轴长为$2|m|$的双曲线上，故

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{1-m^2}=1$$

将 $y=\pm 2x$ 代入 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{1-m^2}=1$，并解得

$x^2=\frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}$，因 $1-m^2>0$

所以 $1-5m^2>0$

解得 $0<|m|<\frac{\sqrt{5}}{5}$

即 m 的取值范围为 $(-\frac{\sqrt{5}}{5},0)\cup(0,\frac{\sqrt{5}}{5})$

（20）解：设 2001 年末汽车保有量为 b_1 万辆，以后各年末汽车保有量依次为 b_2 万辆，b_3 万辆，…，每年新增汽车 x 万辆，则

$b_1=30$，$b_2=b_1\times 0.94+x$

对于 $n>1$，有

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=b_n\times 0.94+x\\&=b_{n-1}\times 0.94^2+(1+0.94)x\\&\cdots\end{aligned}$$

所以 $b_{n+1}=b_1\times 0.94^n+x(1+0.94+0.94^2+\cdots+0.94^n)$

$$=b_1\times 0.94^n+\frac{1-0.94^n}{0.06}x$$

$$=\frac{x}{0.06}+(30-\frac{x}{0.06})\times 0.94^n$$

当 $30-\frac{x}{0.06}\geq 0$，即 $x\leq 1.8$ 时

$b_{n+1}\leq b_n\leq\cdots\leq b_1=30$.

当 $30-\frac{x}{0.06}<0$，即 $x>1.8$ 时

数列 $\{b_n\}$ 逐项增加，可以任意靠近 $\frac{x}{0.06}$

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}[\frac{x}{0.06}+(30-\frac{x}{0.06})\times 0.94^{n-1}]=\frac{x}{0.06}$$

因此，如果要求汽车保有量不超过 60 万辆，即

$b_n \le 60$（$n=1,2,3,\cdots$）

则 $\dfrac{x}{0.06} \le 60$，即 $x \le 3.6$ 万辆

综上，每年新增汽车不应超过 3.6 万辆.

（21）解：（I）当 $a=0$ 时，函数 $f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$

此时，$f(x)$ 为偶函数

当 $a \ne 0$ 时，$f(a)=a^2+1$，$f(-a)=a^2+2|a|+1$，

$f(a) \ne f(-a)$，$f(a) \ne -f(-a)$

此时 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数

（II）（i）当 $x \le a$ 时，$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+a+\dfrac{3}{4}$

当 $a \le \dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为

$f(a)=a^2+1$.

若 $a > \dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}+a$，且 $f(\dfrac{1}{2}) \le f(a)$.

（ii）当 $x \ge a$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=(x+\dfrac{1}{2})^2-a+\dfrac{3}{4}$

若 $a \le -\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}-a$，且 $f(-\dfrac{1}{2}) \le f(a)$

若 $a > -\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，从而函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为

$f(a)=a^2+1$.

综上，当 $a \le -\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}-a$

当 $-\dfrac{1}{2} < a \le \dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 a^2+1

当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}+a$.

（22）解（I）由 $a_1=2$，得 $a_2={a_1}^2-a_1+1=3$

由 $a_2=3$，得 $a_3={a_2}^2-2a_2+1=4$

由 $a_3=4$，得 $a_4={a_3}^2-3a_3+1=5$

由此猜想a_n的一个通项公式：$a_n=n+1$（$n\ge 1$）

（II）（i）用数学归纳法证明：

①当$n=1$时，$a_1\ge 3=1+2$，不等式成立.

②假设当$n=k$时不等式成立，即$a_k\ge k+2$，那么

$a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\ge(k+2)(k+2-k)+1=2k+5\ge k+3$.

也就是说，当$n=k+1$时，$a_{k+1}\ge(k+1)+2$

据①和②，对于所有$n\ge 1$，有$a_n\ge n+2$.

（ii）由$a_{n+1}=a_n(a_n-n)+1$及（i），对$k\ge 2$，有

$a_k=a_{k-1}(a_{k-1}-k+1)+1$

$\ge a_{k-1}(k-1+2-k+1)+1=2a_{k-1}+1$

……

$a_k\ge 2^{k-1}a_1+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^{k-1}(a_1+1)-1$

于是$\dfrac{1}{1+a_k}\le\dfrac{1}{1+a_1}\cdot\dfrac{1}{2^{k-1}}$，$k\ge 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\le\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\le\frac{2}{1+a_1}\le\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}$$