2006年辽宁高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率P，那么n次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，选择一个符合题目要求的选项.

（1）设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合B的个数是

（A）1　　（B）3　　（C）4　　（D）8

（2）设 $f(x)$ 是R上的任意函数，则下列叙述正确的是

（A）$f(x)f(-x)$ 是奇函数　　（B）$f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

（C）$f(x)-f(-x)$ 是偶函数　　（D）$f(x)+f(-x)$ 是偶函数

（3）给出下列四个命题：

①垂直于同一直线的两条直线互相平行.

②垂直于同一平面的两个平面互相平行.

③若直线 l_1,l_2 与同一平面所成的角相等，则 l_1,l_2 互相平行.

④若直线 l_1,l_2 是异面直线，则与 l_1,l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域，表示该区域的不等式组是

（A）$\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\ge 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　（B）$\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　（C）$\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　（D）$\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\ge 3\\0\le x\le 3\end{cases}$

（5）设 $\oplus$ 是R上的一个运算，A 是R的非空子集．若对任意 $a,b\in A$，有 $a\oplus b\in A$，则称A对运算 $\oplus$ 封闭.下列数集对加法、减法、乘法和法（除数不等于零）四则运算都封闭的是

（A）自然数集　　（B）整数集　　（C）有理数集　　（D）无理数集

（6）$\triangle ABC$的三内角 A,B,C，所对边的长分别为a,b,c，设向量 $p(a+c,b)$、$q=(b-a,c-a)$. 若 $p /\!/ q$，，则角 C的大小为

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

（7）与方程$y=e^{2x}-2e^{x}+1\ \ (x\geq 0)$的曲线关于直线$y=x$对称的曲线的方程为

（A）$y=\ln(1+\sqrt{x})$　　（B）$y=\ln(1-\sqrt{x})$

（C）$y=-\ln(1+\sqrt{x})$　　（D）$y=-\ln(1-\sqrt{x})$

（8）曲线$\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{6-m}=1(m<6)$与曲线$\dfrac{x^2}{5-n}+\dfrac{y^2}{9-n}=1(5<n<9)$的

（A）焦距相等　　（B）离心率相等　　（C）焦点相同　　（D）准线相同

（9）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,$前 n 项和为S_n，若数列$\{a_n+1\}$也是等比数列，则S_n等于

（A）$2^{n+1}-2$　　（B）3n　　（C）2n　　（D）3^n-1

（10）直线$y=2k$与曲线$9k^2x^2+y^2=18k^2|x|(k\in R,且k\neq 0)$的公共点的个数为

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（11）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}|\sin x-\cos x|$,则$f(x)$的值域是

（A）[－1，1]　　（B）$[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$　　（C）$[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$　　（D）$[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

（12）设 O（0，0），A（1，0），B（0，1），点 P 是线段 AB 上的一个动点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$. 若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geq\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，则实数$\lambda$的取值范围是

（A）$\dfrac{1}{2}\leq\lambda\leq 1$　　（B）$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\lambda\leq 1$

（C）$\dfrac{1}{2}\leq\lambda\leq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\lambda\leq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

（13）设$g(x)=\begin{cases}e^x,x\leq 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$则$g(g(\dfrac{1}{2}))=$______________.

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{4}{5}-\frac{6}{7})+(\frac{4}{5^2}-\frac{6}{7^2})+\cdots+(\frac{4}{5^n}-\frac{6}{7^n})}{(\frac{5}{6}-\frac{4}{5})+(\frac{5}{6^2}-\frac{4}{5^2})+\cdots+(\frac{5}{6^n}-\frac{4}{5^n})}$=________________.

(15) 5 名乒乓球队员中，有 2 名老队员和 3 名新队员，现从中选出 3 名队员排成 1,2,3 号参加团体比赛，则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员，且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排法有___________种.（以数作答）

(16) 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为α，则 $\cos\alpha$ =___________.

三．解答题：本大题共小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17)（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x, x\in R.$求：

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合；

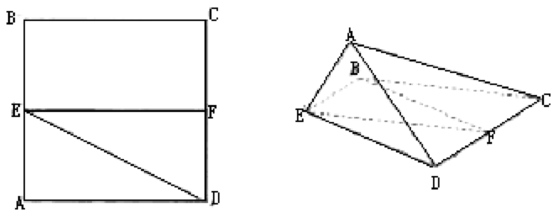
（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的单调增区间.

(18)（本小题满分 12 分）

已知正方形 *ABCD*，*E*、*F* 分别是边 *AB*、*CD* 的中点，将△*ADE* 沿 *DE* 折起，如图所示，记二面角 *A*—*DE*—*C* 的大小为 $\theta(0<\theta<\pi)$.

（Ⅰ）证明 *BF*// 平面 *ADE*;

（Ⅱ）若△*ACD* 为正三角形，试判断点 A 在平面 BCDE 内的射影 G 是否在直线 EF 上，证明你的结论，并求角θ的余弦值.



(19)（本小题满分 12 分）

现有甲、乙两个项目，对甲项 … 万元、1.17 万元的概率分别为$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$；… 次调整中，价格下降的概率都是 $p(0<p<1)$，设乙项目产品价格在一年内进行 2 次独立的调整，记乙项目产品价格在一年内的下降次数为ξ对乙项目每投资十万元，ξ取 0、1、2 时，一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元. 随机变量ξ_1，ξ_2分别表示对甲、乙两项目各投资十万元一年后的利润.

（Ⅰ）求ξ_1，ξ_2的概率分布和数学期望 $E\xi_1$，$E\xi_2$;

（Ⅱ）当 $E\xi_1<E\xi_2$时，求 p 的取值范围.

(20)（本小题满分 14 分）

已知点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1x_2\neq 0)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的两个动点，O

是坐标原点，向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$满足$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x^2)x-(y_1+y_2)y=0$.

（Ⅰ）证明线段 AB 是圆 C 的直径;

（Ⅱ）当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，求 p 的值.

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$，其中$a,b,c$是以$d$为公差的等差数列，且$a>0,d>0$.

设 x_0为$f(x)$ 的极小值点. 在$[1-\dfrac{2b}{m},0]$上，$f'(x)$在x_1处取得最大值，在 x_2 取得最小值. 将 $(x_0,f(x_0)),(x_1,f'(x_1)),(x_2,f'(x_2))$依次记为$A,B,C$.

（Ⅰ）求 x_0 的值;

（Ⅱ）若△ABC 有一条边平行于 x 轴，且面积为 2+$\sqrt{3}$，求 a,d 的值.

（22）（本小题满分 2 分）

已知 $f_0(x)=x^n,f_1(x)=\dfrac{f'_{n-1}(x)}{f_{n-1}(1)}$，其中$k\le n(n,k\in N_+)$. 设

$$F(x)=C_n^0f_0(x^2)+C_n^1f_1(x^2)+\cdots+C_n^mf_m(x^2)+\cdots+C_n^nf_n(x^2),x\in[-1,1].$$

（Ⅰ）写出 $f_1(1)$;

（Ⅱ）证明：对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，情有$|F(x_1)-F(x_2)|\le 2^{n-1}(n+2)-n-1$.

2006 年辽宁高考理科数学真题参考答案

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

（1）C （2）D （3）D （4）A （5）C （6）B

（7）A （8）A （9）C （10）D （11）C （12）B

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

（13）$\dfrac{1}{2}$ （14）－1 （15）48 （16）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

三、解答题

（17）本小题考查三角公式、三角函数的性制裁及已知三角函数值求角等基础知识，考查综合运用三角函数有关知识的能力. 满分 12 分

（I）解法一：$\because f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+\dfrac{3(1+\cos 2x)}{2}$

$$=2+\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}).$$ ……

4 分

$\therefore$ 当$2x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即$x=k\pi+\dfrac{\pi}{8}(k\in Z)$时,$f(x)$取得最大值$2+\sqrt{2}$.

因此，$f(x)$ 取得最大值的自变量 x 的集合是 $\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\in Z\}$. ……8 分

解法二：$\because f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin 2x+2\cos^2 x$

$$=1+\sin 2x+1+\cos 2x$$

$$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}).$$ ……4 分

$\therefore$ 当$2x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即$x=k\pi+\dfrac{\pi}{8}(k\in Z)$时,$f(x)$取得最大值$2+\sqrt{2}$.

因此，$f(x)$ 取得最大值的自变量 x 的集合是 $\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\in Z\}$. ……8 分

（II）解：$f(x)=2+\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$.

由题意得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$,即

$$k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in Z).$$

因此，$f(x)$ 的单调增区间是$[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}]$. …………12 分

（18）本小题主要考查空间中的线面关系，解三角形等基础知识，考查空间想象能力和思维能力.

满分 12 分.

（I）证明：E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB、CD 的中点.

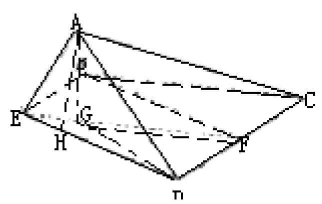
∴ED// FD，且 $EB=FD$,

∴四边形 EBFD 是平行四边形，

∴EF// ED.

∵$BD\subset$平面 AED，而 $BF\notin$平面 AED.

∴BF// 平面 AED. …………4 分



（II）解法一：点 A 在平面 BCDE 内的射影 G 在直线 EF 上，

过点 A 用 $AG\perp$平面 $BCDE$，垂足为 G，连结 GC，GD.

∵$\triangle ACD$ 为正三角形.

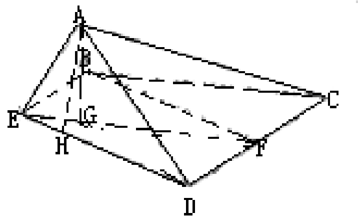
∴$AC=AD$,

∴$GC=GD$,

∴G 在 CD 的垂直平分线上，

又∵EF是CD的垂直平分线，
∴点A在平面$BCDE$内的射影G在直线EF上. …………4分
过G作$GH\perp ED$，垂足为H，连结AH，则$AH\perp DE$.
∴$\angle AHG$是二面角$A—DE—C$的平面角，即$\angle AHG=\theta$.
设除正方形$ABCD$的边长为$2a$，连结AF.

在折后图的$\triangle AEF$中，$AF=\sqrt{3}\ a$，$EF=2AE=2\ a$，



∴$\triangle AEF$为直角三角形，$AG\cdot EF=AE\cdot AF$，

∴$AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

在$Rt\triangle ADE$中，$AH\cdot DE=AD\cdot AE$，

∴$AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$，$\therefore GH=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$　$\therefore \cos\theta=\dfrac{GH}{AH}=\dfrac{1}{4}$. ………12分

解法二：点A在平面$BCDE$内的射影G在直线EF上.
连结AF，在平面AEF内过点A作$AG\perp EF$，垂足为G'
∵$\triangle ACD$为正三角形，F为CD的中点，
∴$AD\perp CD$.
又∵$EF\perp CD$，
∴$CD\perp$平面AEF，
∵$AG'\subset$平面AEF，
∴$CD\perp AG'$，
又∵$AG'\perp EF$，且$CD\cap EF=F$，$CD\subset$平面$BCDE$，$EF\subset$平面$BCDE$，
∴$AG\perp$平面$BCDE$，
∴G为A在平面$BCDE$内的射影G，
∴点A在平面$BCDE$内的射影G在直线EF上，
过G作$CH\perp ED$，垂足为H，连结AH，则$AH\perp DE$ …………8分
∴$\angle AHG$是二面角$A—DE—C$的平面角，即$\angle AHG=\theta$.
设原正方形$ABCD$的边长为$2a$.

在折后图的$\triangle AEF$中，$AF=\sqrt{3}a$，$EF=2AE=2a$，

∴$\triangle AEF$为直角三角形，$AG\cdot EF=AE\cdot AF$

∴$AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

在$Rt\triangle ADE$中，$AH\cdot DE=AD\cdot AE$，

∴$AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$，$\therefore GH=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$　$\therefore \cos\theta=\dfrac{GH}{AH}=\dfrac{1}{4}$. ………12分

解法三：点A在平面$BCDE$内的射影G在直线EF上.
连结AF，在平面AEF内过点A作$AG\perp EF$，垂足为G'
∵$\triangle ACD$为正三角形，F为CD的中点，
∴$AF\perp CD$.

又∵$EF\perp CD$,

∴$CD\perp$平面 AEF,

∵$CD\subset$平面 $BCDE$,

∴平面 $AEF\perp$平面 $BCDE$.

又∵平面 $AEF\cap$平面 $BCDE=DEF$，$AG'\perp EF$.

∴$AG'\perp$平面 $BCDE$，即 G' 为 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G,

∴点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上. ……………………8 分

过 G 作 $GH\perp DE$，垂足为 H，连结 AH，则 $AH\perp DE$,

∴$\angle AHG$ 是二面角 $A—DE—C$ 的平面角，即$\angle AHG=\theta$.

∴$\triangle AEF$ 为直角三角形，$AG\cdot EF=AE\cdot AF$

∴$AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AH\cdot DE=AD\cdot AE$,

∴$AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$，∴$GH=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$　∴$\cos\theta=\dfrac{GH}{AH}=\dfrac{1}{4}$. ………12 分

（19）本小题主要考查二项分布、分布列、数学期望等基础知识，考查学生运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

（Ⅰ）解法一：ξ_1 的概率分布为

ξ_1	1.2	1.18	1.17
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$E\xi_1=1.2\times\frac{1}{6}+1.18\times\frac{1}{2}+1.17\times\frac{1}{3}$

$=1.18$. …………3 分

由题设得 $\xi - B(2,p)$，即 ξ 的概率分布为

ξ_2	1.3	1.25	0.2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

…………6 分

所以 ξ_2 的数学

$E\xi_2=1.3\times(1-p)^2+1.25\times 2p(1-p)+0.2\times p^2$

$=1.3-(1-2p+p^2)+2.5\times(p-p^2)+0.2\times p^2$

$=-p^2-0.1p+1.3$. …………9 分

解法二：ξ_1 的概率分布为

ξ_1	1.2	1.18	1.17
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$E\xi_1=1.2\times\frac{1}{6}+1.18\times\frac{1}{2}+1.17\times\frac{1}{3}$

$=1.18$. …………3 分

设 A_i 表示事件“第 i 次调整，价格下降”（$i=1,2$），则

$P(\xi=0)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=(1-p)^2.$

$P(\xi=1)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)$

$=2p(1-p).$

$P(\xi=3)=P(A_1)P(A_2)=p^2.$

故ξ$_2$的概率分布为

ξ$_2$	1.3	1.25	0.2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

…………6 分

所以ξ$_2$的数学

Eξ$_2$=1.3×$(1-p)^2$+1.25×$2p(1-p)$+0.2×p^2

=1.3－$(1-2p+p^2)$+2.5×$(p-p^2)$+0.2×p^2

=－p^2－0.1p+1.3. …………9 分

（II）解：由$E\xi_1<E\xi_2$，得$-p^2-0.1p+1.3>1.18$，

整理得$(p+0.4)(p-0.3)<0$，

解得$-0.4<p<0.3.$

因为$0<p<1,$所以，当$E\xi_1<E\xi_2$时，p 的取值范围是$0<p<0.3.$…………12 分

（20）本小题主要考查平面向量的基本运算，圆与抛物线的方程，点到直线的距离等基础知识，以及综合运用解析几何知识解决问题的能力，满分 14 分.

（I）证法一：$\because|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|,$

$\therefore(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2,$即

$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2,$整理得

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0.$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0.$ ① ……3 分

设点 M（x，y）是以线段 AB 为直径的圆上的任意一点，则

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$

即$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

展开上式并将①代入得$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1-y_2)=0.$

故线段 AB 是圆 C 的直径.

证法二：$\because|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|,$

$\therefore (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2$,即

$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2$,整理得

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0.$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0.$ ① ……3 分

若直线（x，y）在以线 AB 为直径的圆上，则

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1(x\neq x_1,x\neq x_2)$$

去分母得 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0,$

点 $(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2)$ 满足上方程，展开并将①代入得

$$x^2+y^2=(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0,$$

所以线 AB 是圆 C 的直径. ……6 分

证法三：$\because |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$,

$\therefore (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2$,即

$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2$,整理得

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0.$ ① ……3 分

以 AB 为直径的圆的方程是

$$(x-\frac{x_1-x_2}{2})^2+(y-\frac{y_1-y_2}{2})^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)+(y_1-y_2)^2],$$

展开，并将①代入得 $x^2+y^2=(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.

所以线段 AB 是圆 C 的直径………………6 分

（II）解法一：设圆 C 的圆心为 C（x，y），则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

$\because y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2(p>0),$

$\therefore x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2},$

又 $\because x_1x_2+y_1y_2=0,$

$\therefore x_1x_2=-y_1y_2,$

$\therefore -y_1y_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2}$　　$\because x_1x_2\neq 0,$　　$\therefore y_1y_2=-4p^2.$

$\therefore y=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{4p}(y_1^2\neq y_2^2)$

$$=\frac{1}{4p}(y_1^2+y_2^2+2y_1y_2)-\frac{y_1y_2}{2p}=\frac{1}{p}(y^2+2p^2),$$

所以圆心的轨迹方程为：$y^2=px-2p^2.$　　………………11 分

设圆心 C 到直线 $x-2y=0$ 的距离为 d，则

$$d=\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}=\frac{|\frac{1}{p}(y^2+2p^2-2y|}{\sqrt{5}}=\frac{|(y-p)^2+p^2|}{\sqrt{5}p}$$

当 $y=p$ 时, d 有最小值 $\dfrac{p}{\sqrt{5}}$，由题设得 $\dfrac{p}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore p=2.$……14 分

解法二：设圆 C 的圆心为 C（x，y），则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

$\because y_1^2=2px_1, y_2^2=2px_2(p>0),$

$\therefore x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2},$

又 $\because x_1x_2+y_1y_2=0,$

$\therefore x_1x_2=-y_1y_2,$

$\because x_1x_2\neq 0,$　　$\therefore y_1y_2=-4p^2.$　………………9 分

$\because x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{4p}(y_1^2\neq y_2^2)$

$$=\frac{1}{4p}(y_1^2+y_2^2+2y_1y_2)-\frac{y_1y_2}{2p}=\frac{1}{p}(y^2+2p^2),$$

所以圆心的轨迹方程为：$y^2=px-2p^2.$　　………………11 分

设直线 $x-2y+2=0$ 与 $x-2y=0$ 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则

$m=\pm 2.$

因为$x-2y+2=0$与$y^2=px-2p^2$的公共点.

所以当$x-2y+2=0$与$y^2=px-2p^2$仅有一个公共点时，

该点到$x-2y=0$的距离最小，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \begin{cases} x-2y-2=0, & ② \\ y^2=px-2p^2. & ③ \end{cases}$

将②代入③得

$y^2-2py+2p^2-2p=0,$有

$\Delta=4p^2-4(2p^2-2p)=0.$

$\because p>0, \quad \therefore p=2.$ ………………14 分

解法三：设圆 C的圆心为 C（x，y），则

$$\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\frac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

若圆心 C到直线$x-2y=0$的距离为 d，那

$$d==\frac{|\frac{x_1+x_2}{2}-(y_1+y_2)|}{\sqrt{5}}$$

$\because y_1^2=2px_1, y_1^2=2px_2(p>0)$

$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}$ 又$\because x_1x_2+y_1y_2\neq 0,$ $x_1x_2=-y_1y_2$，

$\because x_1x_2\neq 0, \therefore y_1y_2=-4p^2.$……………………9 分

$$\therefore y=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{4p}(y_1^2\neq y_2^2)$$

$$=\frac{1}{4p}(y_1^2+y_2^2+2y_1y_2)-\frac{y_1y_2}{2p}=\frac{1}{p}(y^2+2p^2),$$

$$\therefore d=\frac{|\frac{1}{4p^2}(y_1^2+y_2^2)-4p(y_1+y_2)|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|y_1^2+y_2^2+2y_1y_2-4p(y_1+y_2)+8p^2|}{4\sqrt{5}p}$$

$$=\frac{(y_1+y_2-2p)^2+4p^2}{4\sqrt{5}p}.$$

当$y_1+y_2=2p$时,d有最小值$\frac{p}{\sqrt{5}}$，由题设得$\frac{p}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore p=2.$……14分

（21）本小题考查函数的导数，函数，函数极值的判定，闭区间上二次函数的最值，等差数列等基础知识的综合运用，考查用数形结合的数学思想分析问题，解决问题的能力.满分 12 分.

（I）解：$\because 2b=a+c$

$$\therefore f'(x)=ax^2+2bx+c=ax^2+(a+c)x+c=(x+1)(ax+c).$$

令$f_n'(x)=0$,得$x=1$或$x=-\frac{c}{a}$.　　　…………2 分

$\because a>0,d>0.$　　$\therefore 0<a<b<c,$　　　$\therefore \frac{c}{a}>1,-\frac{c}{a}<-1.$

当$-\frac{c}{a}<x<-1$时,$f'(x)<0,$

当$x>-1$时,$f'(x)>0,$

所以$f(x)$在 x=－1 处取极小值，即$x_0=-1$. ………………6 分

（II）解法一：$\because f'(x)=ax^2+2bx+c,a>0,$

$\therefore f'(x)$的图象开口向上，对称轴方程是$x=-\frac{b}{a}$，

$\frac{b}{a}>1$，知$|(1-\frac{2b}{a})-(-\frac{b}{a})|<|0-(-\frac{b}{a})|$，

$\therefore f'(x)$在[1－$\frac{2b}{a}$，0]上的最大值为$f'(0)=c$，即$x_1=0$，

又由$\frac{b}{a}>1$，知$-\frac{b}{a}=[1-\frac{b}{a},0]$，

$\therefore$当$x=-\frac{b}{a}$时,$f'(x)$取得最小值$f'(-\frac{b}{a})=-\frac{d^2}{a}$，即

$x_2=-\frac{b}{a}$，　$\because f(x_0)=f(1)=-\frac{1}{3}a$，

$\therefore A(-1,-\frac{1}{3}a),B(0,c),c(-\frac{b}{a},\frac{d^2}{a})$. ……………………9 分

由△ABC有一条边平行于 x 轴，得 AC 平行于 x 轴，所以

$-\frac{1}{3}a=-\frac{d^2}{a}$，即 $a^2=3d^2$.　　　　①

又由△ABC 的面积为 $2+\sqrt{3}$，得

$\frac{1}{2}(-1,\frac{b}{a})\cdot(c+\frac{a}{3})=2+\sqrt{3}$，

利用 $b=a+d,c=a+2d$，得 $\frac{2}{3}d+\frac{d^2}{a}=2+\sqrt{3}$.　　②

联立①，②可得 $d=3,a=3\sqrt{3}$.　……………………12 分

解法二：$\because f'(x)=ax^2+2bx+c,a>0$.

$\therefore f'(1-\frac{2b}{a})=0,f'0)=c$.

由 $c>0$ 知 $f'(x)$ 在 $[1-\frac{2b}{a},0)$ 上的最大值为 $f'(0)=c$. 即 $x_1=0$

由 $\frac{b}{a}>1$，知 $-\frac{b}{a}=[1-\frac{b}{a},0]$，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{b}{a}$ 时, $f'(x)$ 取得最小值 $f'(-\frac{b}{a})=-\frac{d^2}{a}$，即

$x_2=-\frac{b}{a}$，　$\because f(x_0)=f(1)=-\frac{1}{3}a$，

$\therefore A(-1,-\frac{1}{3}a),B(0,c),c(-\frac{b}{a},\frac{d^2}{a})$. ……………………9 分

由△ABC有一条边平行于 x 轴，得 AC 平行于 x 轴，所以

$-\frac{1}{3}a=-\frac{d^2}{a}$，即 $a^2=3d^2$.　　　　①

又由△ABC 的面积为 $2+\sqrt{3}$，得

$\frac{1}{2}(-1,\frac{b}{a})\cdot(c+\frac{a}{3})=2+\sqrt{3}$，

利用 $b=a+d,c=a+2d$，得 $\frac{2}{3}d+\frac{d^2}{a}=2+\sqrt{3}$.　　②

联立①，②可得 $d=3,a=3\sqrt{3}$.　……………………12 分

（22）本小题主要考查导数的基本计算，函数的性质，绝对值不等式及组合数性质等基础知识考查归纳推理能力以及综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

（I）解：由已知推得 $f_1(x)=(n-k+1)x^{n-1}$，从而有

$f_1(1)=n-k+1.$ …………3 分

（II）证法一：当 $-1\le x\le 1$ 时，

$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1,$

当 $x>0$时, $F'(x)>0$, 所以, $F(x)$在$[-1,1]$, 恒有

$|F(x_1)-F(x_2)|\le F(1)-F(0),$ ………………………………7 分

$F(1)-F(0)=C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\cdots+(n-k+1)C_n^1+\cdots+2C_n^{k-1}$

$=nC_n^{n-1}+(n-1)C_n^{n-2}+\cdots+(n-k+1)C_n^{n+1}+\cdots+2C_n^1+2C$

$\because (n-k+1)C_n^{n-k}=(n-k)C_n^{n-k}+C_n^{n-1}$

$$=(n-k)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}+C_n^k$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n--1-k)!k!}+C_n^k$$

$=nC_{n-1}^k+C_n^k\qquad(k=1,2,\cdots n-1),$ ………………10 分

$F(1)-F(0)=n(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})+(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})+C_n^0$

$=n(2^{n-1}-1)+2^n-1$

$=2^{n-1}(n+2)-n-1.$ …………………………12 分

因此结论成立.

证明法二：当 $-1\le x\le 1$ 时，

$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1,$

当 $x>0$时, $F'(x)>0$, 所以, $F(x)$在$[0,1]$是增函数.

又 $F(x)$ 是偶函数，所以 $F(x)$ 在[－1，0]上是减函数

所以对于任意的 x_1,x_2 在[－1, 1]，恒有

$|F(x_1)-F(x_2)|\le F(1)-F(0),$ ………………………………7 分

$F(1)-F(0)=C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\cdots+(n-k+1)C_n^1+\cdots+2C_n^{m-1}$

又$\because$ $F(1)-F(0)=2C_n^1+3C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}+C_n^0$

$\therefore 2(F(1)-F(0))=(n+2)(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})+2.$ ………………10 分

$\therefore F(1)-F(0)=2\frac{1}{}(n+2)(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})+1$

$$=(n-2)\cdot\frac{2^n-2}{2}+1$$

$=2^{n-1}(n+2)-n-1.$ …………………………12 分

因此结论成立.

证法三：当 $-1\le x\le 1$ 时，

$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1,$

当$x>0$时,$F'(x)>0$,所以,$F(x)$在$[0,1]$上是增函数.

又$F(x)$是偶函数，所以$F(x)$在[－1，0]上是减函数

所以对于任意的x_1,x_2在[－1, 1]，恒有

$|F(x_1)-F(x_2)|\le F(1)-F(0),$ ··································7 分

$C_n^kf_n(x^2)=(n-k+1)C_n^kx^{2(x-k)}$

$=(n-k)C_n^{n-k}x^{2(n-k)}+C_n^{n-k}x^{2(n-k)}$

由$(n-k)C_n^{n-k}\cdot(n-k)\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\ n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n--1-k)!k!}=nC_{n-k}^{n-1-k}$，得

$$F(x)=x^{2n}[C_{n-1}^{n-2}x^{2(n-2)}+C_{n-1}^{n-3}x^{2(n-1)}+\cdots+C_{n-1}^2]+x^{2n}+C_{n-1}^{n-3}x^{2(n-1)}+\cdots+C_n^0$$

$$=nx^2[(1+x^2)^{n-1}-x^{2(n-1)}]+(1+x^2)^n.$$ ··················10 分

$\therefore F(1)-F(0)=n(2^{n-1}-1)+2^n-1=2^{n-1}(n+2)-n-1.$ ····················12 分

因此结论成立.

证法四：当$-1\le x\le 1$时，

$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1,$

当$x>0$时,$F'(x)>0$,所以,$F(x)$在$[0,1]$上是增函数.

又$F(x)$是偶函数，所以$F(x)$在[－1，0]上是减函数

所以对于任意的x_1,x_2在[－1, 1]，恒有

$|F(x_1)-F(x_2)|\le F(1)-F(0),$ ··································7 分

$\because x[(1+x)^n-x^n]=x[C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^1x^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}x^2+C_n^{n-1}x+1]\cdot$

$$=C_n^1x^n+C_n^2x^{n-1}+\cdots+C_n^kx^{n-k+1}+\cdots+C_n^{n-2}x^3+C_n^{n-1}x^2+x$$

对上式两边求导，得

$[(1+x)^n-x^n]+x[n(1+x)^{n-1}-nx^{n-1}]$

$=nC_n^2x^{n-1}+(n-1)C_n^2x^{n-2}+\cdots+(n-k+1)C_n^1x^{n-k}+\cdots+3C_n^{n-2}x^n+2C_n^{n-1}x+1,$

$\therefore (1+x)^n+x[n(1+x)^{n-1}=nx^{n-1}]$

$=x^n+nC_n^1x^n+(n-1)C_n^2x^{n-2}+\cdots+(n-k+1)C_n^1x^{n-k}+\cdots+3C_n^{n-2}x^n+2C_n^{n-1}x+1,$

$\therefore F(x)=(1+x^2)^n+x^2[n(1+x^2)^{n-1}-nx^{2(n+1)}].$ ························10 分

$\therefore F(1)-F(0)=2^{n-1}(n+2)-n-1.$ ····················12 分

因此结论成立.