

# 2004年云南高考文科数学真题及答案

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第I卷1至2页，第II卷3至10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第I卷

参考公式：

三角函数的和差化积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中  $c'$ 、 $c$  分别表示上、下底面周长， $l$  表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

### 一、选择题

(1) 设集合  $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$ ， $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$ ，

则集合  $M \cap N$  中元素的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

(2) 函数  $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$  的最小正周期是 ( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $4\pi$

(3) 记函数  $y = 1 + 3^{-x}$  的反函数为  $y = g(x)$ ，则  $g(10) = ( )$

- A. 2                      B. -2                      C. 3                      D. -1

(4) 等比数列  $\{a_n\}$  中， $a_2 = 9$ ， $a_5 = 243$ ，则  $\{a_n\}$  的前 4 项和为 ( )

- A. 81                      B. 120                      C. 168                      D. 192

(5) 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程是 ( )

- A.  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$                       B.  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$   
C.  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$                       D.  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

- (6)  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为 ( )
- A. 15                      B. -15                      C. 20                      D. -20
- (7) 设复数  $z$  的幅角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$ , 虚部为  $\sqrt{3}$ , 则  $z^2 =$  ( )
- A.  $-2 - 2\sqrt{3}i$                       B.  $-2\sqrt{3} - 2i$
- C.  $2 + 2\sqrt{3}i$                       D.  $2\sqrt{3} + 2i$
- (8) 设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 两条渐近线为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则双曲线的离心率  $e =$  ( )
- A. 5                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       D.  $\frac{5}{4}$
- (9) 不等式  $1 < |x+1| < 3$  的解集为 ( )
- A.  $(0, 2)$                       B.  $(-2, 0) \cup (2, 4)$
- C.  $(-4, 0)$                       D.  $(-4, -2) \cup (0, 2)$
- (10) 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为 ( )
- A.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$
- (11) 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3, BC = \sqrt{13}, AC = 4$ , 则边  $AC$  上的高为 ( )
- A.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$                       B.  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $3\sqrt{3}$
- (12) 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名教师, 则不同的分配方案共有 ( )
- A. 12 种                      B. 24 种                      C. 36 种                      D. 48 种

## 第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

(13) 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

(14) 用平面  $\alpha$  截半径为  $R$  的球, 如果球心到平面  $\alpha$  的距离为  $\frac{R}{2}$ , 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为\_\_\_\_\_.

(15) 函数  $y = \sin x - \frac{1}{2} \cos x (x \in R)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

(16) 设 P 为圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的动点, 则点 P 到直线  $3x - 4y - 10 = 0$  的距离的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

解方程  $4^x - 2^{x+2} - 12 = 0$ .

(18) (本小题满分 12 分)

已知  $\alpha$  为锐角, 且  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 求  $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$  的值.

(19) (本上题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $S_1^2 = 9S_2$ ,

$S_4 = 4S_2$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

20. (本小题满分 12 分)

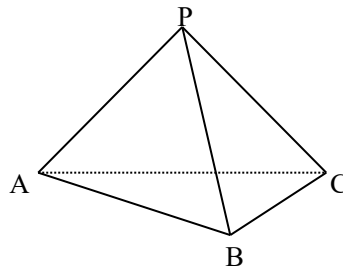
某村计划建造一个室内面积为  $800\text{m}^2$  的矩形蔬菜温室，在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留  $1\text{m}$  宽的通道，沿前侧内墙保留  $3\text{m}$  宽的空地。当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？

(21) (本小题满分 12 分)

三棱锥  $P-ABC$  中, 侧面  $PAC$  与底面  $ABC$  垂直,  $PA=PB=PC=3$ .

(1) 求证  $AB \perp BC$ ;

(2) 如果  $AB=BC=2\sqrt{3}$ , 求侧面  $PBC$  与侧面  $PAC$  所成二面角的大小.



(22) (本小题满分 14 分)

设椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1(-c,0)$  与  $F_2(c,0)(c > 0)$ , 且椭圆上存在点 P,

使得直线  $PF_1$  与直线  $PF_2$  垂直.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 设 L 是相应于焦点  $F_2$  的准线, 直线  $PF_2$  与 L 相交于点 Q. 若  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ ,

求直线  $PF_2$  的方程.

2004年普通高等学校招生全国统一考试  
数学(文史类)(老课程)参考答案

1—12 BCBBD AACDC BC

13.  $\{x | 1 < x \leq 2\}$       14.  $\frac{3}{16}$       15.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       16. 1

三、解答题

17. 本小题主要考查指数和对数的性质以及解方程的有关知识. 满分12分.

解:  $(2^x)^2 - 4(2^x) - 12 = 0.$

$$(2^x - 6)(2^x + 2) = 0.$$

$$2^x = 6, 2^x = -2 \text{ (无解)}. \text{ 所以 } x = \log_2 6.$$

18. 本小题主要考查同角三角函数的基本关系式、二倍角公式等基础知识以及三角恒等变形的能力. 满分12分.

解: 原式 =  $\frac{\sin \alpha \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha}.$

因为  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  时,  $\sin \alpha \neq 0, \cos 2\alpha \neq 0,$

所以 原式 =  $\frac{1}{2 \cos \alpha}.$

因为  $\alpha$  为锐角, 由  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 得  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

所以 原式 =  $\frac{\sqrt{5}}{4}.$

因为  $\alpha$  为锐角, 由  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  得  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

所以 原式 =  $\frac{\sqrt{5}}{4}.$

19. 本小题主要考查等差数列的通项公式, 前  $n$  项和公式等基础知识, 根据已知条件列方程以及运算能力. 满分 12 分.

解: 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$  及已知条件得

$$(3a_1 + 3d)^2 = 9(2a_1 + d), \quad \textcircled{1}$$

$$4a_1 + 6d = 4(2a_1 + d), \quad \textcircled{2}$$

由②得  $d = 2a_1$ , 代入①有  $a_1^2 = \frac{4}{9}a_1$

解得  $a_1 = 0$  或  $a_1 = \frac{4}{9}$ . 当  $a_1 = 0$  时,  $d = 0$ , 舍去.

因此  $a_1 = \frac{4}{9}, d = \frac{8}{9}$ .

故数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = \frac{4}{9} + (n-1) \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9}(2n-1)$ .

20. 本小题主要考查把实际问题抽象为数学问题, 应用不等式等基础知识和方法解决问题的能力. 满分 12 分.

解: 设矩形温室的左侧边长为  $a$  m, 后侧边长为  $b$  m, 则

$$ab = 800.$$

蔬菜的种植面积

$$S = (a-4)(b-2)$$

$$= ab - 4b - 2a + 8$$

$$= 808 - 2(a+2b).$$

所以  $S \leq 808 - 4\sqrt{2ab} = 648(m^2)$ .

当  $a=2b$ , 即  $a=40(m), b=20(m)$  时,  $S_{\text{最大值}} = 648(m^2)$ .

答: 当矩形温室的左侧边长为 40m, 后侧边长为 20m 时, 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积为 648m<sup>2</sup>.

21. 本小题主要考查两个平面垂直的性质、二面角等有关知识, 以有逻辑思维能力和空间想象能力. 满分 12 分.

(1) 证明: 如果, 取  $AC$  中点  $D$ , 连结  $PD$ 、 $BD$ .

因为  $PA=PC$ , 所以  $PD \perp AC$ ,

又已知面  $PAC \perp$  面  $ABC$ ,

所以  $PD \perp$  面  $ABC$ ,  $D$  为垂足.

因为  $PA=PB=PC$ ,

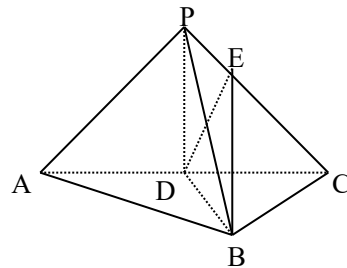
所以  $DA=DB=DC$ , 可知  $AC$  为  $\triangle ABC$  外接圆直径,

因此  $AB \perp BC$ .

(2) 解: 因为  $AB=BC$ ,  $D$  为  $AC$  中点, 所以  $BD \perp AC$ .

又面  $PAC \perp$  面  $ABC$ ,

所以  $BD \perp$  平面  $PAC$ ,  $D$  为垂足.



作  $BE \perp PC$  于  $E$ , 连结  $DE$ ,  
 因为  $DE$  为  $BE$  在平面  $PAC$  内的射影,  
 所以  $DE \perp PC$ ,  $\angle BED$  为所求二面角的平面角.

在  $Rt\triangle ABC$  中,  $AB=BC=2\sqrt{3}$ , 所以  $BD=\sqrt{6}$ .

在  $Rt\triangle PDC$  中,  $PC=3$ ,  $DC=\sqrt{6}$ ,  $PD=\sqrt{3}$ ,

$$\text{所以 } DE = \frac{PD \cdot DC}{PC} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}.$$

$$\text{因此, 在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } \tan \angle BED = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

$$\angle BED = 60^\circ,$$

所以侧面  $PBC$  与侧面  $PAC$  所成的二面角为  $60^\circ$ .

22. 本小题主要考查直线和椭圆的基本知识, 以及综合分析和解题能力. 满分 14 分.

解: (1) 由题设有  $m > 0, c = \sqrt{m}$ .

设点  $P$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ , 由  $PF_1 \perp PF_2$ , 得  $\frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{y_0}{x_0 + c} = -1$ ,

$$\text{化简得 } x_0^2 + y_0^2 = m. \quad \textcircled{1}$$

将①与  $\frac{x_0^2}{m+1} + y_0^2 = 1$  联立, 解得  $x_0^2 = \frac{m^2 - 1}{m}, y_0^2 = \frac{1}{m}$ .

由  $m > 0, x_0^2 = \frac{m^2 - 1}{m} \geq 0$ , 得  $m \geq 1$ .

所以  $m$  的取值范围是  $m \geq 1$ .

(2) 准线  $L$  的方程为  $x = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ . 设点  $Q$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ , 则  $x_1 = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ .

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} - \frac{x_1 - c}{c - x_0} = \frac{\frac{m+1}{\sqrt{m}} - \sqrt{m}}{\sqrt{m} - x_0}. \quad \textcircled{2}$$

将  $x_0 = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m}}$  代入②, 化简得  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{m - \sqrt{m^2 - 1}} = m + \sqrt{m^2 - 1}$ .

由题设  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ , 得  $m + \sqrt{m^2 - 1} = 2 - \sqrt{3}$ , 无解.

将  $x_0 = -\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$  代入②，化简得

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{1}{m + \sqrt{m^2-1}} = m - \sqrt{m^2-1}.$$

由题设  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ ，得  $m - \sqrt{m^2-1} = 2 - \sqrt{3}$ .

解得  $m=2$ .

从而  $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = \sqrt{2}$ , 得到  $PF_2$  的方程

$$y = \pm(\sqrt{3}-2)(x - \sqrt{2}).$$