2007年山东高考理科数学真题及答案

一 选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，选择一个符合题目要求的选项。

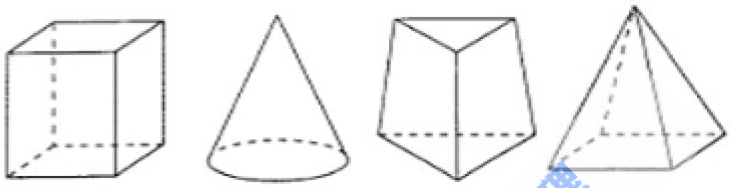
1 若$z=\cos\theta+i\sin\theta$（i为虚数单位），则$z^2=-1$的θ值可能是

（A）$\frac{\pi}{6}$ （B）$\frac{\pi}{4}$ （C）$\frac{\pi}{3}$ （D）$\frac{\pi}{2}$

2 已知集合$M=\{-1,1\}$，$N=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in Z\right.\right\}$，则$M\cap N=$

（A）$\{-1,1\}$ （B）$\{-1\}$ （C）$\{0\}$ （D）$\{-1,0\}$

3 下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是



①正方体 ②圆锥 ③三棱台 ④正四棱锥

（A）$(1),(2)$ （B）$(1),(3)$ （C）$(1),(4)$ （D）$(2),(4)$

4 设$a\in\left\{-1,1,\frac{1}{2},3\right\}$，则使函数$y=x^{\alpha}$的定义域为R且为奇函数的所有$\alpha$值为

（A）$1,3$ （B）$-1,1$ （C）$-1,3$ （D）$-1,1,3$

5 函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的最小正周期和最大值分别为

（A）$\pi,1$ （B）$\pi,\sqrt{2}$ （C）$2\pi,1$ （D）$2\pi,\sqrt{2}$

6 给出下列三个等式：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$。下列函数中不满足其中任何一个等式的是

（A）$f(x)=3^x$ （B）$f(x)=\sin x$ （C）$f(x)=\log_2 x$ （D）$f(x)=\tan x$

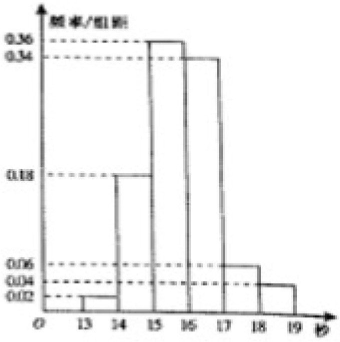
7 命题“对任意的$x\in R$，$x^3-x^2+1\le 0$”的否定是

（A）不存在$x\in R$，$x^3-x^2+1\le 0$ （B）存在$x\in R$，$x^3-x^2+1\le 0$

（C）存在$x\in R$，$x^3-x^2+1>0$ （D）对任意的$x\in R$，$x^3-x^2+1>0$

8 某班 50 名学生在一次百米测试中，成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间，将测试结果按如下方式分成六组：第一组，成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒；第二组，成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒；……第六组，成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒。右图是按上述分组方法得到的频率分布直方图。设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x，成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y，则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为

（A）$0.9,35$ （B） $0.9,45$ （C）$0.1,35$ （D） $0.1,45$



9 下列各小题中，p 是 q 的充要条件的是

（1） $p: m<2$ 或 $m>6$； $q: y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点。

（2） $p: \dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$; $q: y=f(x)$ 是函数。

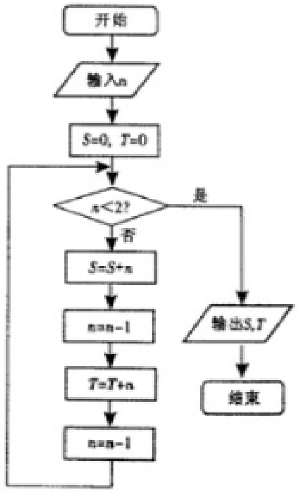
（3） $p: \cos\alpha=\cos\beta$; $q: \tan\alpha=\tan\beta$。

（4） $p: A\cap B=A$; $q: C_U B\subseteq C_U A$。

（A） $(1),(2)$ （B） $(2),(3)$ （C） $(3),(4)$ （D） $(1),(4)$

10 阅读右边的程序框图，若输入的 n 是 100，则输出的变量 S 和 T 的值依次是

（A） $2500,2500$ （B） $2550,2550$ （C） $2500,2550$ （D） $2550,2500$



11　在直角ΔABC中，CD是斜边AB上的高，则下列等式不成立的是

（A）$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$　（B）$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

（C）$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$　（D）$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$

12 位于坐标原点的一个质点 P 按下述规则移动：质点每次移动一个单位；移动的方向为向上或向右，并且向上、向右移动的概率都是$\dfrac{1}{2}$. 质点 P 移动 5 次后位于点$(2,3)$的概率为

（A）$(\dfrac{1}{2})^5$　（B）$C_5^2(\dfrac{1}{2})^5$　（C）$C_5^3(\dfrac{1}{2})^3$　（D）$C_5^2C_5^3(\dfrac{1}{2})^5$

第Ⅱ卷（共 90 分）

注意事项：

1. 用黑色或蓝色钢笔、圆珠笔直接答在试题卷上.
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

得　分	评卷人

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，答案须填在题中横线上.

(13)设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，$\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 60°，则$\left|\overrightarrow{OA}\right|$为____________.

(14)设 D 是不等式组$\begin{cases}x+2y\le 10,\\2x+y\ge 3,\\0\le x\le 4,\\y\ge 1\end{cases}$表示的平面区域，则 D 中的点 P（x, y）到直线 $x+y=10$ 距离的最大值是__________.

(15)与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+64=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是____.

(16)函数 $y=\log_a(x+3)-1(a>0, a\neq 1)$的图象恒过定点 A，若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上，其中

$mn>0$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为_______________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

得　分	评卷人

17（本小题满分 12 分）　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\ldots 3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}, n\in N^*$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(II) 设 $b_n=\frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18（本小题满分 12 分）设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数, 用随机变量 ξ 表示方程 $x^2+bx+c=0$ 实根的个数(重根按一个计).

(I) 求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率;

(II) 求 ξ 的分布列和数学期望;

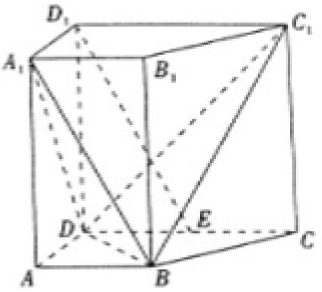
(III) 求在先后两次出现的点数中有 6 的条件下, 方程方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

19（本小题满分 12 分）如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知

$DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB \parallel DC$.

(I) 设 E 是 DC 的中点, 求证: $D_1E \parallel$ 平面 A_1BD;

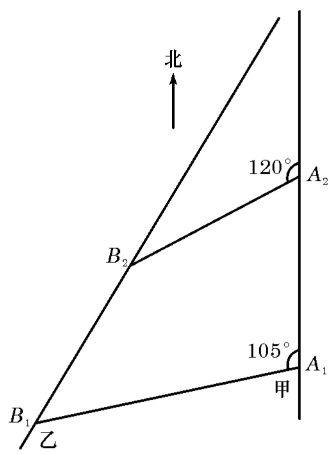
(II) 求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值.



得　分	评卷人

(20)(本小题满分 12 分)

如图，甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行，乙船按固定方向匀速直线航行.当甲船位于 A_1 处时，乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处,此时两船相距 20 海里.当甲船航行 20 分钟到达 A_1 处时，乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_1 处，此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里，问乙船每小时航行多少海里？



得　分	评卷人

（21）（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3；最小值为 1；

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $l_1y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点（A，B 不是左右顶点），且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点.求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

]

得　分	评卷人

(22)(本小题满分 14 分)

设函数 $f(x)=x^2+b\ \ln(x+1)$,其中 $b\neq 0$.

(Ⅰ)当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极值点；

（Ⅲ）证明对任意的正整数 n, 不等式 $\ln\left(\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)$ 都成立.

参考答案

1-12.【答案】：DBDAAB，CADDCB

13.【答案】：$\dfrac{\sqrt{21}}{2}p$

14.【答案】:$4\sqrt{2}$.

15.【答案】:. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

16.【答案】：8。

17【答案】:（I）$a_1+3a_2+3^2a_3+\ldots3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{3}$,

$$a_1+3a_2+3^2a_3+\ldots3^{n-2}a_{n-1}=\frac{n-1}{3}(n\ge2),$$

$$3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}-\frac{n-1}{3}=\frac{1}{3}(n\ge2).$$

$$a_n=\frac{1}{3^n}(n\ge2).$$

验证$n=1$时也满足上式，$a_n=\dfrac{1}{3^n}(n\in N^*)$.

（II）$b_n=n\cdot3^n$，

$$S_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\ldots n\cdot3^n$$

$$3S_n==1\cdot3^2+2\cdot3^3+3\cdot3^4+\ldots n\cdot3^{n+1}$$

$$-2S_n=3+3^2+3^3+3^n-n\cdot3^{n+1}$$

$$-2S_n=\frac{3-3^{n+1}}{1-3}-n\cdot3^{n+1},$$

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot3^{n+1}-\frac{1}{4}\cdot3^{n+1}+\frac{3}{4}\cdot$$

18【答案】:（I）基本事件总数为$6\times6=36$，

若使方程有实根，则$\Delta=b^2-4c\ge0$，即$b\ge2\sqrt{c}$。

当$c=1$时，$b=2,3,4,5,6$；

当$c=2$时，$b=3,4,5,6$；

当$c=3$时，$b=4,5,6$；

当$c=4$时，$b=4,5,6$；

当$c=5$时，$b=5,6$；

当$c=6$时，$b=5,6$，

目标事件个数为$5+4+3+3+2+2=19$,

因此方程$x^2+bx+c=0$ 有实根的概率为$\frac{19}{36}$.

(II)由题意知，$\xi=0,1,2$，则

$P(\xi=0)=\frac{17}{36}$，$P(\xi=1)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $P(\xi=2)=\frac{17}{36}$，

故ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{17}{36}$

ξ的数学期望$E\xi=0\times\frac{17}{36}+1\times\frac{1}{18}+2\times\frac{17}{36}=1$.

(III)记“先后两次出现的点数中有 5”为事件 M,“方程$ax^2+bx+c=0$ 有实根” 为事件 N，则$P(M)=\frac{11}{36}$，$P(MN)=\frac{7}{36}$，

$P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{7}{11}$.

19【答案】:(I)连结BE，则四边形$DABE$为正方形，

$\therefore BE=AD=A_1D_1$，且$BE \parallel AD \parallel A_1D_1$，

$\therefore$四边形A_1D_1EB为平行四边形，

$\therefore D_1E \parallel A_1B$.

$\because D_1E \not\subset$平面$A_1BD$，$A_1B \subset$平面$A_1BD$,

$\therefore D_1E \parallel$平面$A_1BD$.

(II) 以 D 为原点，DA, DC, DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴,建立空间直角坐标系，

不妨设$DA=1$，则$D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C_1(0,2,2), A_1(1,0,2)$.

$\therefore \overrightarrow{DA_1}=(1,0,2), \overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面A_1BD的一个法向量，

由$\vec{n}\perp\overrightarrow{DA_1},\vec{n}\perp\overrightarrow{DB}$得$\begin{cases}x+2y=0\\x+y=0\end{cases}$，

取$z=1$，则$\vec{n}=(-2,-2,1)$.

设$\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面$C_1BD$的一个法向量，

由$\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{DC},\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{DB}$得$\begin{cases}2y_1+2z_1=0\\x_1+y_1=0\end{cases}$，

取$z_1=1$, 则$\overrightarrow{m}=(1,-1,1)$.

$\cos<\overrightarrow{m},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

由于该二面角A_1-BD-C_1为锐角，

所以所求的二面角A_1-BD-C_1的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

20【答案】解如图，连结A_1B_2，$A_2B_2=10\sqrt{2}$，$A_1A_2=\dfrac{20}{60}\times30\sqrt{2}=10\sqrt{2}$，

$\Delta A_1A_2B_2$是等边三角形，$\angle B_1A_1B_2=105°-60°=45°$，

在$\Delta A_1B_2B_1$中，由余弦定理得

$$B_1B_2^2=A_1B_1^2+A_1B_2^2-2A_1B_1\cdot A_1B_2\cos45°$$
$$=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\times20\times10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=200,$$

$B_1B_2=10\sqrt{2}.$

因此乙船的速度的大小为$\dfrac{10\sqrt{2}}{20}\times60=30\sqrt{2}.$

答：乙船每小时航行$30\sqrt{2}$海里.

21【答案】(I)由题意设椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

$a+c=3,a-c=1$，$a=2,c=1,b^2=3$

$\therefore \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(II) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得

$(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$，

$\Delta=64m^2k^2-16(3+4k^2)(m^2-3)>0$， $3+4k^2-m^2>0$.

$x_1+x_2=-\dfrac{8mk}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$.

$y_1\cdot y_2=(kx_1+m)\cdot(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}$.

$\because$ 以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 $D(2,0)$, $k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$，

$\therefore \dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=-1$， $y_1y_2+x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0$，

$\dfrac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}+\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+\dfrac{16mk}{3+4k^2}+4=0$，

$7m^2+16mk+4k^2=0$，解得

$m_1=-2k,m_2=-\dfrac{2k}{7}$，且满足 $3+4k^2-m^2>0$.

当 $m=-2k$ 时，$l:y=k(x-2)$，直线过定点 $(2,0)$, 与已知矛盾；

当 $m=-\dfrac{2k}{7}$ 时，$l:y=k(x-\dfrac{2}{7})$，直线过定点 $(\dfrac{2}{7},0)$.

综上可知，直线 l 过定点，定点坐标为 $(\dfrac{2}{7},0)$.

22 **【答案】**(I) 函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$ 的定义域为 $\left(-1,+\infty\right)$.

$f'(x)=2x+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+b}{x+1}$，

令 $g(x)=2x^2+2x+b$，则 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上递增，在 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上递减，

$g(x)_{\min}=g(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+b$.

当$b>\frac{1}{2}$时，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{2}+b>0$，

$g(x)=2x^2+2x+b>0$在$\left(-1,+\infty\right)$上恒成立.

$\therefore f^{'}(x)>0,$

即当$b>\frac{1}{2}$时, 函数$f(x)$在定义域$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增。

（II）分以下几种情形讨论：

（1）由（I）知当$b>\frac{1}{2}$时函数$f(x)$无极值点.

（2）当$b=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\dfrac{2(x+\frac{1}{2})^2}{x+1}$，

$\therefore x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$时，$f^{'}(x)>0,$

$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f^{'}(x)>0,$

$\therefore b=\frac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$\left(-1,+\infty\right)$上无极值点。

（3）当$b<\frac{1}{2}$时，解$f^{'}(x)=0$得两个不同解$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$.

当$b<0$时，$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}<-1$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}>-1$，

$\therefore x_1\notin\left(-1,+\infty\right),x_2\in\left(-1,+\infty\right),$

此时$f(x)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一的极小值点$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$.

当$0<b<\frac{1}{2}$时，$x_1,x_2\in\left(-1,+\infty\right),$

$f^{'}(x)$在$\left(-1,x_1\right),\left(x_2,+\infty\right)$都大于0，$f^{'}(x)$在$(x_1,x_2)$上小于0，

此时$f(x)$有一个极大值点$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$和一个极小值点$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$.

综上可知，$b<0$时，$f(x)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一的极小值点$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$；

$0<b<\frac{1}{2}$时，$f(x)$有一个极大值点$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$和一个极小值点$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$；

$b\geq\frac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$\left(-1,+\infty\right)$上无极值点。

（III） 当$b=-1$时，$f(x)=x^2-\ln(x+1).$

令$h(x)=x^3-f(x)=x^3-x^2+\ln(x+1),$则

$h^{'}(x)=\frac{3x^3+(x-1)^2}{x+1}$在$\left[0,+\infty\right)$上恒正，

$\therefore h(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，恒有$h(x)>h(0)=0$.

即当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，有$x^3-x^2+\ln(x+1)>0,\ \ln(x+1)>x^2-x^3$，

对任意正整数n，取$x=\frac{1}{n}$得$\ln(\frac{1}{n}+1)>\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$