

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上、写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\right\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

【答案】A

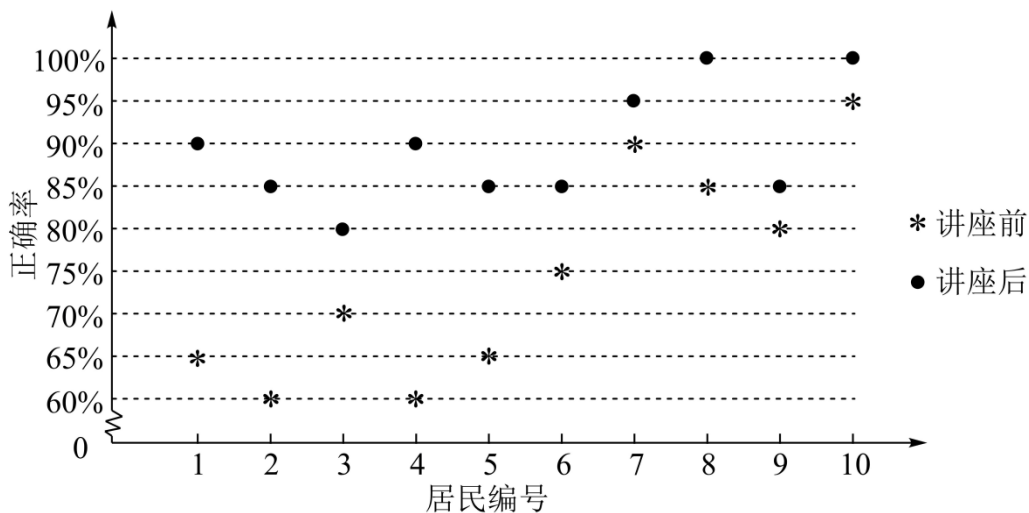
【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出.

【详解】因为 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{5}{2}\right\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选：A.

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则 ()

- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
- B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%
- C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差
- D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】 B

【解析】

【分析】 由图表信息, 结合中位数、平均数、标准差、极差的概念, 逐项判断即可得解.

【详解】 讲座前中位数为 $\frac{70\% + 75\%}{2} > 70\%$, 所以 A 错;

讲座后问卷答题的正确率只有一个是 80%, 4 个 85%, 剩下全部大于等于 90%, 所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%, 所以 B 对;

讲座前问卷答题的正确率更加分散, 所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差, 所以 C 错;

讲座后问卷答题的正确率的极差为 $100\% - 80\% = 20\%$,

讲座前问卷答题的正确率的极差为 $95\% - 60\% = 35\% > 20\%$, 所以 D 错.

故选: B.

3. 若 $z = 1 + i$. 则 $|iz + 3\bar{z}| = ()$

- A. $4\sqrt{5}$
- B. $4\sqrt{2}$
- C. $2\sqrt{5}$
- D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

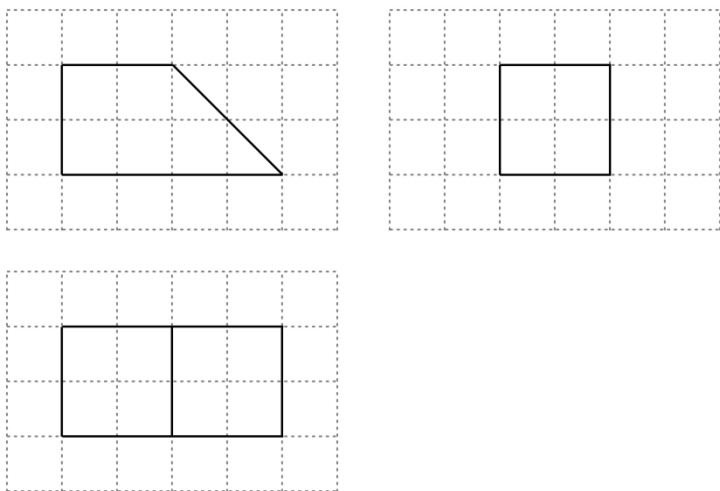
【分析】根据复数代数形式的运算法则，共轭复数的概念以及复数模的计算公式即可求出.

【详解】因为 $z = 1 + i$ ，所以 $iz + 3\bar{z} = i(1 + i) + 3(1 - i) = 2 - 2i$ ，所以 $|iz + 3\bar{z}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$.

故选：D.

4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为

()



A. 8

B. 12

C. 16

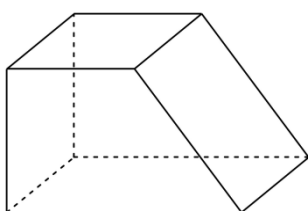
D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】由三视图还原几何体，再由棱柱的体积公式即可得解.

【详解】由三视图还原几何体，如图，



则该直四棱柱的体积 $V = \frac{2+4}{2} \times 2 \times 2 = 12$.

故选：B.

5. 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C , 若 C 关于 y 轴对称, 则 ω 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 先由平移求出曲线 C 的解析式, 再结合对称性得 $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即可求出 ω 的最小值.

【详解】 由题意知: 曲线 C 为 $y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, 又 C 关于 y 轴对称, 则

$$\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

解得 $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 故当 $k = 0$ 时, ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

故选: C.

6. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张, 则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 先列举出所有情况, 再从中挑出数字之积是 4 的倍数的情况, 由古典概型求概率即可.

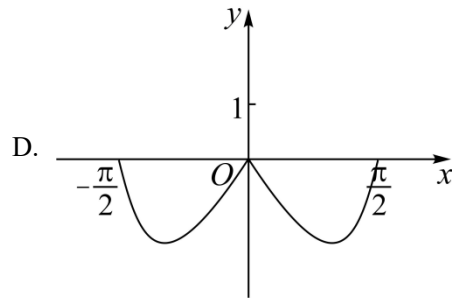
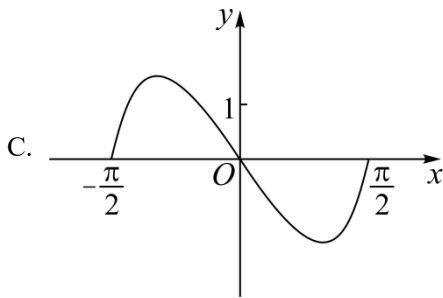
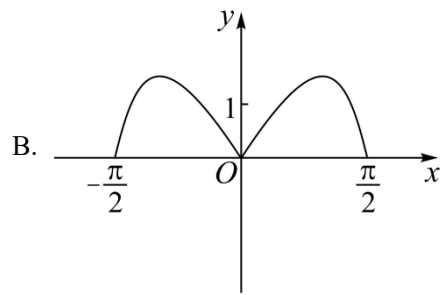
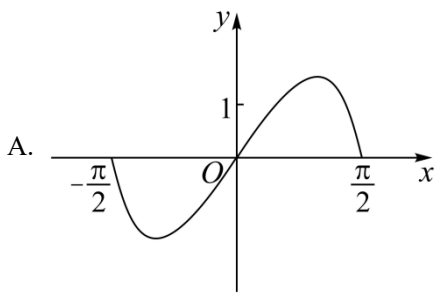
【详解】 从 6 张卡片中无放回抽取 2 张, 共有

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$ 15 种情况,

其中数字之积为 4 的倍数的有 $(1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (4, 6)$ 6 种情况, 故概率为 $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

故选: C.

7. 函数 $y = (3^x - 3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为 ()



【答案】 A

【解析】

【分析】 由函数的奇偶性结合指数函数、三角函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】 令 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{则 } f(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos(-x) = -(3^x - 3^{-x})\cos x = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数, 排除 BD;

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $3^x - 3^{-x} > 0, \cos x > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 排除 C.

故选: A.

8. 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) = (\quad)$

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据题意可知 $f(1) = -2, f'(1) = 0$ 即可解得 a, b , 再根据 $f'(x)$ 即可解出.

【详解】 因为函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 所以依题可知, $f(1) = -2, f'(1) = 0$, 而

$f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$, 所以 $b = -2, a - b = 0$, 即 $a = -2, b = -2$, 所以 $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, 因此函数 $f(x)$ 在

$(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, $x = 1$ 时取最大值, 满足题意, 即有 $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

故选: B.

9. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()

A. $AB = 2AD$

B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C. $AC = CB_1$

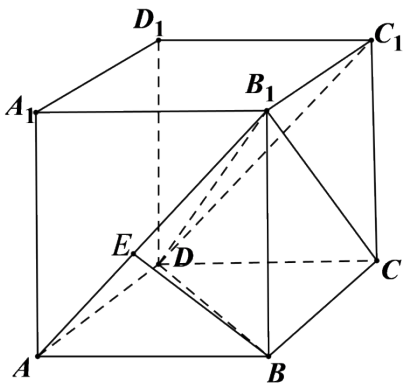
D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

【答案】D

【解析】

【分析】根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出.

【详解】如图所示:



不妨设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 依题以及长方体的结构特征可知, B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为

$\angle B_1DB$, B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle DB_1A$, 所以 $\sin 30^\circ = \frac{c}{B_1D} = \frac{b}{B_1D}$, 即 $b = c$,

$B_1D = 2c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 解得 $a = \sqrt{2}c$.

对于 A, $AB = a, AD = b, AB = \sqrt{2}AD$, A 错误;

对于 B, 过 B 作 $BE \perp AB_1$ 于 E , 易知 $BE \perp$ 平面 AB_1C_1D , 所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成角为 $\angle BAE$,

因为 $\tan \angle BAE = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\angle BAE \neq 30^\circ$, B 错误;

对于 C, $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c, CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}c, AC \neq CB_1$, C 错误;

对于 D, B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $\angle DB_1C$, $\sin \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1D} = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 而

$0 < \angle DB_1C < 90^\circ$, 所以 $\angle DB_1C = 45^\circ$. D 正确.

故选: D.

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π , 侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为

$V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = (\quad)$

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 设母线长为 l , 甲圆锥底面半径为 r_1 , 乙圆锥底面圆半径为 r_2 , 根据圆锥的侧面积公式可得 $r_1 = 2r_2$, 再结合圆心角之和可将 r_1, r_2 分别用 l 表示, 再利用勾股定理分别求出两圆锥的高, 再根据圆锥的体积公式即可得解.

【详解】 解: 设母线长为 l , 甲圆锥底面半径为 r_1 , 乙圆锥底面圆半径为 r_2 ,

$$\text{则 } \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l} = \frac{r_1}{r_2} = 2,$$

所以 $r_1 = 2r_2$,

$$\text{又 } \frac{2\pi r_1}{l} + \frac{2\pi r_2}{l} = 2\pi,$$

$$\text{则 } \frac{r_1 + r_2}{l} = 1,$$

$$\text{所以 } r_1 = \frac{2}{3}l, r_2 = \frac{1}{3}l,$$

$$\text{所以甲圆锥的高 } h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{4}{9}l^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}l,$$

$$\text{乙圆锥的高 } h_2 = \sqrt{l^2 - \frac{1}{9}l^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}l,$$

$$\text{所以 } \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{\frac{4}{9}l^2 \times \frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}l} = \sqrt{10}.$$

故选：C.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$, A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, B 为 C 的上顶点.

若 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$, 则 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据离心率及 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$, 解得关于 a^2, b^2 的等量关系式, 即可得解.

【详解】解: 因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}$, $b^2 = \frac{8}{9}a^2$,

A_1, A_2 分别为 C 的左右顶点, 则 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$,

B 为上顶点, 所以 $B(0, b)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-a, -b), \overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$, 因为 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$

所以 $-a^2 + b^2 = -1$, 将 $b^2 = \frac{8}{9}a^2$ 代入, 解得 $a^2 = 9, b^2 = 8$,

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

故选：B.

12. 已知 $9^m = 10, a = 10^m - 11, b = 8^m - 9$, 则 ()

- A. $a > 0 > b$ B. $a > b > 0$ C. $b > a > 0$ D. $b > 0 > a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指对互化以及对数函数的单调性即可知 $m = \log_9 10 > 1$, 再利用基本不等式, 换底公式可得

$m > \lg 11, \log_8 9 > m$, 然后由指数函数的单调性即可解出.

【详解】由 $9^m = 10$ 可得 $m = \log_9 10 = \frac{\lg 10}{\lg 9} > 1$ ，而

$\lg 9 \lg 11 < \left(\frac{\lg 9 + \lg 11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2 < 1 = (\lg 10)^2$ ，所以 $\frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}$ ，即 $m > \lg 11$ ，所以

$$a = 10^m - 11 > 10^{\lg 11} - 11 = 0.$$

又 $\lg 8 \lg 10 < \left(\frac{\lg 8 + \lg 10}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2 < (\lg 9)^2$ ，所以 $\frac{\lg 9}{\lg 8} > \frac{\lg 10}{\lg 9}$ ，即 $\log_8 9 > m$ ，

所以 $b = 8^m - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 0$ 。综上， $a > 0 > b$ 。

故选：A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (m, 3)$, $\vec{b} = (1, m+1)$. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $m =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{4}$ 或 -0.75

【解析】

【分析】直接由向量垂直的坐标表示求解即可.

【详解】由题意知： $\vec{a} \cdot \vec{b} = m + 3(m+1) = 0$ ，解得 $m = -\frac{3}{4}$.

故答案为： $-\frac{3}{4}$.

14. 设点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上，点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上，则 $\odot M$ 的方程为 _____.

【答案】 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

【解析】

【分析】设出点 M 的坐标，利用 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上，求得圆心及半径，即可得圆的方程.

【详解】解：∵点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上，

∴设点 M 为 $(a, 1-2a)$ ，又因为点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上，

∴点 M 到两点的距离相等且为半径 R ，

$$\therefore \sqrt{(a-3)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{a^2 + (-2a)^2} = R,$$

$$a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 = 5a^2, \text{ 解得 } a = 1,$$

$$\therefore M(1, -1), R = \sqrt{5},$$

⊙M 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

故答案为: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

15. 记双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值_____.

【答案】 2 (满足 $1 < e \leq \sqrt{5}$ 皆可)

【解析】

【分析】 根据题干信息, 只需双曲线渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 中 $0 < \frac{b}{a} \leq 2$ 即可求得满足要求的 e 值.

【详解】 解: $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 所以 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

结合渐近线的特点, 只需 $0 < \frac{b}{a} \leq 2$, 即 $\frac{b^2}{a^2} \leq 4$,

可满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \leq \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$,

又因为 $e > 1$, 所以 $1 < e \leq \sqrt{5}$,

故答案为: 2 (满足 $1 < e \leq \sqrt{5}$ 皆可)

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ, AD = 2, CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】 设 $CD = 2BD = 2m > 0$, 利用余弦定理表示出 $\frac{AC^2}{AB^2}$ 后, 结合基本不等式即可得解.

【详解】 设 $CD = 2BD = 2m > 0$,

则在 $\triangle ABD$ 中, $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos \angle ADB = m^2 + 4 + 2m$,

在 $\triangle ACD$ 中, $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC = 4m^2 + 4 - 4m$,

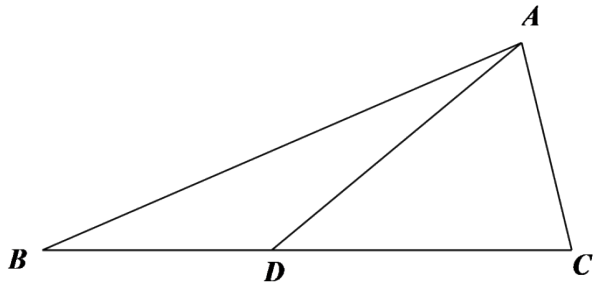
所以 $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4m^2 + 4 - 4m}{m^2 + 4 + 2m} = \frac{4(m^2 + 4 + 2m) - 12(1 + m)}{m^2 + 4 + 2m} = 4 - \frac{12}{(m+1) + \frac{3}{m+1}}$

$$\geq 4 - \frac{12}{2\sqrt{(m+1) \cdot \frac{3}{m+1}}} = 4 - 2\sqrt{3},$$

当且仅当 $m+1 = \frac{3}{m+1}$ 即 $m = \sqrt{3} - 1$ 时，等号成立，

所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取最小值时， $m = \sqrt{3} - 1$.

故答案为： $\sqrt{3} - 1$.



三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

(1) 根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率；

(2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \dots k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

【答案】(1) A, B 两家公司长途客车准点的概率分别为 $\frac{12}{13}, \frac{7}{8}$

(2) 有

【解析】

【分析】(1) 根据表格中数据以及古典概型的概率公式可求得结果;

(2) 根据表格中数据及公式计算 K^2 , 再利用临界值表比较即可得结论.

【小问 1 详解】

根据表中数据, A 共有班次 260 次, 准点班次有 240 次,

设 A 家公司长途客车准点事件为 M ,

$$\text{则 } P(M) = \frac{240}{260} = \frac{12}{13};$$

B 共有班次 240 次, 准点班次有 210 次,

设 B 家公司长途客车准点事件为 N ,

$$\text{则 } P(N) = \frac{210}{240} = \frac{7}{8}.$$

A 家公司长途客车准点的概率为 $\frac{12}{13}$;

B 家公司长途客车准点的概率为 $\frac{7}{8}$.

【小问 2 详解】

列联表

	准点班次数	未准点班次数	合计
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$
$$= \frac{500 \times (240 \times 30 - 210 \times 20)^2}{260 \times 240 \times 450 \times 50} \approx 3.205 > 2.706,$$

根据临界值表可知, 有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关.

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) -78 .

【解析】

【分析】(1) 依题意可得 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$, 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 作差即可得到 $a_n - a_{n-1} = 1$,

从而得证;

(2) 由 (1) 及等比中项的性质求出 a_1 , 即可得到 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和, 再根据二次函数的性质计算可得.

【小问 1 详解】

解: 因为 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$, 即 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} + (n-1)^2 = 2(n-1)a_{n-1} + (n-1)$ ②,

①-②得, $2S_n + n^2 - 2S_{n-1} - (n-1)^2 = 2na_n + n - 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)$,

即 $2a_n + 2n - 1 = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 1$,

即 $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 1$, $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得 $a_4 = a_1 + 3$, $a_7 = a_1 + 6$, $a_9 = a_1 + 8$,

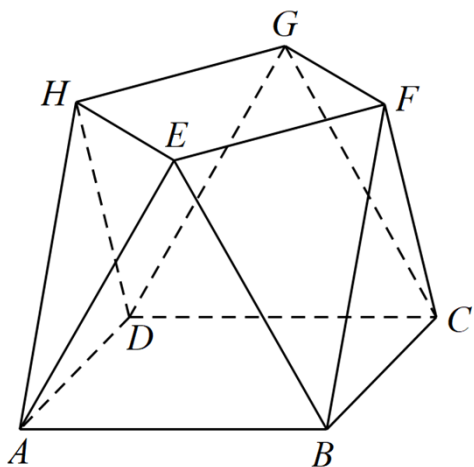
又 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 所以 $a_7^2 = a_4 \cdot a_9$,

即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3) \cdot (a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = -12$,

所以 $a_n = n - 13$, 所以 $S_n = -12n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{25}{2}n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{625}{8}$,

所以, 当 $n = 12$ 或 $n = 13$ 时 $(S_n)_{\min} = -78$.

19. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面 $ABCD$ 是边长为 8（单位：cm）的正方形， $\triangle EAB, \triangle FBC, \triangle GCD, \triangle HDA$ 均为正三角形，且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直。



- (1) 证明： $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ ；
 (2) 求该包装盒的容积（不计包装盒材料的厚度）。

【答案】 (1) 证明见解析；

(2) $\frac{640}{3}\sqrt{3}$.

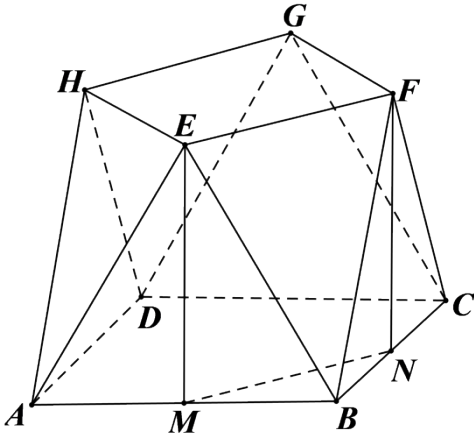
【解析】

【分析】 (1) 分别取 AB, BC 的中点 M, N ，连接 MN ，由平面知识可知 $EM \perp AB, FN \perp BC$ ， $EM = FN$ ，依题从而可证 $EM \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FN \perp$ 平面 $ABCD$ ，根据线面垂直的性质定理可知 $EM \parallel FN$ ，即可知四边形 $EMNF$ 为平行四边形，于是 $EF \parallel MN$ ，最后根据线面平行的判定定理即可证出；

(2) 再分别取 AD, DC 中点 K, L ，由 (1) 知，该几何体的体积等于长方体 $KMNL - EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B - MNFE$ 体积的 4 倍，即可解出。

【小问 1 详解】

如图所示：



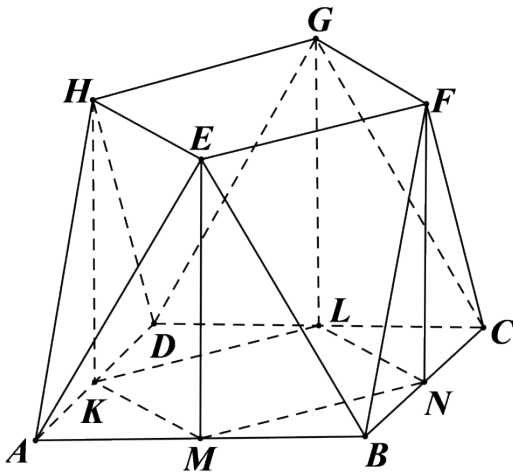
分别取 AB, BC 的中点 M, N ，连接 MN ，因为 $\triangle EAB, \triangle FBC$ 为全等的正三角形，所以

$EM \perp AB, FN \perp BC$ ， $EM = FN$ ，又平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $EAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ，

$EM \subset$ 平面 EAB ，所以 $EM \perp$ 平面 $ABCD$ ，同理可得 $FN \perp$ 平面 $ABCD$ ，根据线面垂直的性质定理可知 $EM \parallel FN$ ，而 $EM = FN$ ，所以四边形 $EMNF$ 为平行四边形，所以 $EF \parallel MN$ ，又 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$ ， $MN \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 。

【小问 2 详解】

如图所示：



分别取 AD, DC 中点 K, L ，由 (1) 知， $EF \parallel MN$ 且 $EF = MN$ ，同理有， $HE \parallel KM, HE = KM$ ，

$HG \parallel KL, HG = KL$ ， $GF \parallel LN, GF = LN$ ，由平面知识可知， $BD \perp MN$ ， $MN \perp MK$ ，

$KM = MN = NL = LK$ ，所以该几何体的体积等于长方体 $KMNL - EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B - MNFE$ 体积的 4 倍。

因为 $MN = NL = LK = KM = 4\sqrt{2}$ ， $EM = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ，点 B 到平面 $MNFE$ 的距离即为点 B 到直线 MN 的距离 d ， $d = 2\sqrt{2}$ ，所以该几何体的体积

$$V = (4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{3} + 4 \times \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 128\sqrt{3} + \frac{256}{3}\sqrt{3} = \frac{640}{3}\sqrt{3}.$$

20. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

(1) 若 $x_1 = -1$, 求 a ;

(2) 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 3 (2) $[-1, +\infty)$

【解析】

【分析】 (1) 先由 $f(x)$ 上的切点求出切线方程, 设出 $g(x)$ 上的切点坐标, 由斜率求出切点坐标, 再由函数值求出 a 即可;

(2) 设出 $g(x)$ 上的切点坐标, 分别由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及切点表示出切线方程, 由切线重合表示出 a , 构造函数, 求导求出函数值域, 即可求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

由题意知, $f(-1) = -1 - (-1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(-1) = 3 - 1 = 2$, 则 $y = f(x)$ 在点 $(-1, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2(x + 1)$,

即 $y = 2x + 2$, 设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2, g(x_2))$, $g'(x) = 2x$, 则 $g'(x_2) = 2x_2 = 2$, 解得 $x_2 = 1$, 则 $g(1) = 1 + a = 2 + 2$, 解得 $a = 3$;

【小问 2 详解】

$f'(x) = 3x^2 - 1$, 则 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y - (x_1^3 - x_1) = (3x_1^2 - 1)(x - x_1)$, 整理得 $y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3$,

设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2, g(x_2))$, $g'(x) = 2x$, 则 $g'(x_2) = 2x_2$, 则切线方程为

$y - (x_2^2 + a) = 2x_2(x - x_2)$, 整理得 $y = 2x_2x - x_2^2 + a$,

则 $\begin{cases} 3x_1^2 - 1 = 2x_2 \\ -2x_1^3 = -x_2^2 + a \end{cases}$, 整理得 $a = x_2^2 - 2x_1^3 = \left(\frac{3x_1^2 - 1}{2}\right)^2 - 2x_1^3 = \frac{9}{4}x_1^4 - 2x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}$,

令 $h(x) = \frac{9}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$, 则 $h'(x) = 9x^3 - 6x^2 - 3x = 3x(3x + 1)(x - 1)$, 令 $h'(x) > 0$, 解得

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ 或 } x > 1,$$

令 $h'(x) < 0$, 解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $0 < x < 1$, 则 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-1	↗

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, 故 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

21. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

【答案】 (1) $y^2 = 4x$;

(2) $AB: x = \sqrt{2}y + 4$.

【解析】

【分析】 (1) 由抛物线的定义可得 $|MF| = p + \frac{p}{2}$, 即可得解;

(2) 设点的坐标及直线 $MN: x = my + 1$, 由韦达定理及斜率公式可得 $k_{MN} = 2k_{AB}$, 再由差角的正切公式及基本不等式可得 $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设直线 $AB: x = \sqrt{2}y + n$, 结合韦达定理可解.

【小问 1 详解】

抛物线的准线为 $x = -\frac{p}{2}$, 当 MD 与 x 轴垂直时, 点 M 的横坐标为 p ,

此时 $|MF| = p + \frac{p}{2} = 3$, 所以 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$;

【小问 2 详解】

设 $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$, 直线 $MN: x = my + 1$,

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 可得 $y^2 - 4my - 4 = 0, \Delta > 0, y_1 y_2 = -4$,

由斜率公式可得 $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$, $k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}$,

直线 $MD: x = \frac{x_1 - 2}{y_1} \cdot y + 2$, 代入抛物线方程可得 $y^2 - \frac{4(x_1 - 2)}{y_1} \cdot y - 8 = 0$,

$\Delta > 0, y_1 y_3 = -8$, 所以 $y_3 = 2y_2$, 同理可得 $y_4 = 2y_1$,

所以 $k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{4}{2(y_1 + y_2)} = \frac{k_{MN}}{2}$

又因为直线 MN 、 AB 的倾斜角分别为 α, β ,

所以 $k_{AB} = \tan \beta = \frac{k_{MN}}{2} = \frac{\tan \alpha}{2}$,

若要使 $\alpha - \beta$ 最大, 则 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

设 $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当 $\frac{1}{k} = 2k$ 即 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

所以当 $\alpha - \beta$ 最大时, $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设直线 $AB: x = \sqrt{2}y + n$,

代入抛物线方程可得 $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$,

$\Delta > 0, y_3 y_4 = -4n = 4y_1 y_2 = -16$, 所以 $n = 4$,

所以直线 $AB: x = \sqrt{2}y + 4$.

【点睛】关键点睛: 解决本题的关键是利用抛物线方程对斜率进行化简, 利用韦达定理得出坐标间的关

系.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 曲线 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases} \quad (s \text{ 为参数}).$$

(1) 写出 C_1 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta - \sin\theta = 0$,

求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标, 及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

【答案】 (1) $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$;

(2) C_3, C_1 的交点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 2)$, C_3, C_2 的交点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(-1, -2)$.

【解析】

【分析】 (1) 消去 t , 即可得到 C_1 的普通方程;

(2) 将曲线 C_2, C_3 的方程化成普通方程, 联立求解即解出.

【小问 1 详解】

因为 $x = \frac{2+t}{6}$, $y = \sqrt{t}$, 所以 $x = \frac{2+y^2}{6}$, 即 C_1 的普通方程为 $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$.

【小问 2 详解】

因为 $x = -\frac{2+s}{6}$, $y = -\sqrt{s}$, 所以 $6x = -2 - y^2$, 即 C_2 的普通方程为 $y^2 = -6x - 2 (y \leq 0)$,

由 $2\cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta = 0$, 即 C_3 的普通方程为 $2x - y = 0$.

联立 $\begin{cases} y^2 = 6x - 2 (y \geq 0) \\ 2x - y = 0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 即交点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 2)$;

联立 $\begin{cases} y^2 = -6x - 2 (y \leq 0) \\ 2x - y = 0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$, 即交点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(-1, -2)$.

[选修 4-5: 不等式选讲]

23. 已知 a, b, c 均为正数, 且 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$, 证明:

(1) $a + b + 2c \leq 3$;

(2) 若 $b = 2c$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据 $a^2 + b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + (2c)^2$, 利用柯西不等式即可得证;

(2) 由 (1) 结合已知可得 $0 < a + 4c \leq 3$, 即可得到 $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$, 再根据权方和不等式即可得证.

【小问 1 详解】

证明: 由柯西不等式有 $[a^2 + b^2 + (2c)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + 2c)^2$,

所以 $a + b + 2c \leq 3$,

当且仅当 $a = b = 2c = 1$ 时, 取等号,

所以 $a + b + 2c \leq 3$;

【小问 2 详解】

证明: 因为 $b = 2c, a > 0, b > 0, c > 0$, 由 (1) 得 $a + b + 2c = a + 4c \leq 3$,

即 $0 < a + 4c \leq 3$, 所以 $\frac{1}{a+4c} \geq \frac{1}{3}$,

由权方和不等式知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{4c} \geq \frac{(1+2)^2}{a+4c} = \frac{9}{a+4c} \geq 3$,

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{4c}$, 即 $a = 1, c = \frac{1}{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

