

绝密 ★ 启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 I 卷）

数学

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合  $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{-1, 0\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{-3, -1, 0\}$                       D.  $\{-1, 0, 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合 A，由交集的概念即可得解。

【详解】因为  $A = \{x \mid -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 且注意到  $1 < \sqrt[3]{5} < 2$ ,

从而  $A \cap B = \{-1, 0\}$ .

故选：A.

2. 若  $\frac{z}{z-1} = 1+i$ , 则  $z =$  ( )

- A.  $-1-i$                       B.  $-1+i$                       C.  $1-i$                       D.  $1+i$

【答案】C

【解析】

【分析】由复数四则运算法则直接运算即可求解。

【详解】因为  $\frac{z}{z-1} = \frac{z-1+1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} = 1+i$ ，所以  $z = 1 + \frac{1}{i} = 1-i$ 。

故选：C。

3. 已知向量  $\vec{a} = (0,1)$ ,  $\vec{b} = (2,x)$ ，若  $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$ ，则  $x = ( \quad )$

- A. -2                                      B. -1                                      C. 1                                      D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标运算可求  $x$  的值。

【详解】因为  $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$ ，所以  $\vec{b} \cdot (\vec{b} - 4\vec{a}) = 0$ ，

所以  $\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  即  $4 + x^2 - 4x = 0$ ，故  $x = 2$ ，

故选：D。

4. 已知  $\cos(\alpha + \beta) = m$ ,  $\tan \alpha \tan \beta = 2$ ，则  $\cos(\alpha - \beta) = ( \quad )$

- A.  $-3m$                                       B.  $-\frac{m}{3}$                                       C.  $\frac{m}{3}$                                       D.  $3m$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两角和的余弦可求  $\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta$  的关系，结合  $\tan \alpha \tan \beta$  的值可求前者，故可求  $\cos(\alpha - \beta)$  的值。

【详解】因为  $\cos(\alpha + \beta) = m$ ，所以  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m$ ，

而  $\tan \alpha \tan \beta = 2$ ，所以  $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$ ，

故  $\cos \alpha \cos \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = m$  即  $\cos \alpha \cos \beta = -m$ ，

从而  $\sin \alpha \sin \beta = -2m$ ，故  $\cos(\alpha - \beta) = -3m$ ，

故选：A。

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为  $\sqrt{3}$ ，则圆锥的体积为 ( )

- A.  $2\sqrt{3}\pi$                                       B.  $3\sqrt{3}\pi$                                       C.  $6\sqrt{3}\pi$                                       D.  $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆柱的底面半径为  $r$ ，根据圆锥和圆柱的侧面积相等可得半径  $r$  的方程，求出解后可求圆锥的体

积.

【详解】设圆柱的底面半径为 $r$ ，则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+3}$ ，

而它们的侧面积相等，所以 $2\pi r \times \sqrt{3} = \pi r \times \sqrt{3+r^2}$  即  $2\sqrt{3} = \sqrt{3+r^2}$ ，

故 $r=3$ ，故圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$ .

故选：B.

6. 已知函数为  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0 \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $a$ 取值的范围是（ ）

A.  $(-\infty, 0]$

B.  $[-1, 0]$

C.  $[-1, 1]$

D.  $[0, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组，解出即可.

【详解】因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ 单调递增，

$$\text{则需满足 } \begin{cases} -\frac{-2a}{2 \times (-1)} \geq 0 \\ -a \leq e^0 + \ln 1 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 \leq a \leq 0,$$

即 $a$ 的范围是 $[-1, 0]$ .

故选：B.

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（ ）

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】

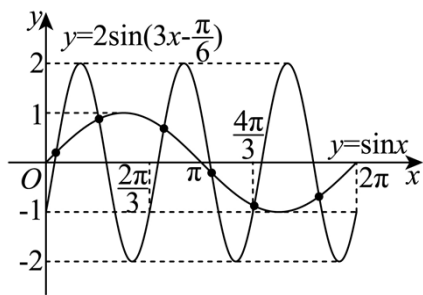
【分析】画出两函数在 $[0, 2\pi]$ 上的图象，根据图象即可求解

【详解】因为函数 $y = \sin x$ 的最小正周期为 $T = 2\pi$ ，

函数 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，

所以在 $x \in [0, 2\pi]$ 上函数 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象，

在坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示：



由图可知，两函数图象有 6 个交点.

故选：C

8. 已知函数为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ， $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ ，且当  $x < 3$  时  $f(x) = x$ ，则下列结论中一定正确的是 ( )

A.  $f(10) > 100$

B.  $f(20) > 1000$

C.  $f(10) < 1000$

D.  $f(20) < 10000$

【答案】B

【解析】

【分析】代入得到  $f(1) = 1, f(2) = 2$ ，再利用函数性质和不等式的性质，逐渐递推即可判断.

【详解】因为当  $x < 3$  时  $f(x) = x$ ，所以  $f(1) = 1, f(2) = 2$ ，

又因为  $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ ，

则  $f(3) > f(2) + f(1) = 3, f(4) > f(3) + f(2) > 5$ ，

$f(5) > f(4) + f(3) > 8, f(6) > f(5) + f(4) > 13, f(7) > f(6) + f(5) > 21$ ，

$f(8) > f(7) + f(6) > 34, f(9) > f(8) + f(7) > 55, f(10) > f(9) + f(8) > 89$ ，

$f(11) > f(10) + f(9) > 144, f(12) > f(11) + f(10) > 233, f(13) > f(12) + f(11) > 377$

$f(14) > f(13) + f(12) > 610, f(15) > f(14) + f(13) > 987$ ，

$f(16) > f(15) + f(14) > 1597 > 1000$ ，则依次下去可知  $f(20) > 1000$ ，则 B 正确；

且无证据表明 ACD 一定正确.

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用  $f(1) = 1, f(2) = 2$ ，再利用题目所给的函数性质



在(1,3)上的值域即可判断 C; 直接作差可判断 D.

【详解】对 A, 因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 而  $f'(x) = 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x-3)$ ,

易知当  $x \in (1,3)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (-\infty,1)$  或  $x \in (3,+\infty)$  时,  $f'(x) > 0$

函数  $f(x)$  在  $(-\infty,1)$  上单调递增, 在  $(1,3)$  上单调递减, 在  $(3,+\infty)$  上单调递增, 故  $x=3$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 正确;

对 B, 当  $0 < x < 1$  时,  $x - x^2 = x(1-x) > 0$ , 所以  $1 > x > x^2 > 0$ ,

而由上可知, 函数  $f(x)$  在  $(0,1)$  上单调递增, 所以  $f(x) > f(x^2)$ , 错误;

对 C, 当  $1 < x < 2$  时,  $1 < 2x-1 < 3$ , 而由上可知, 函数  $f(x)$  在  $(1,3)$  上单调递减,

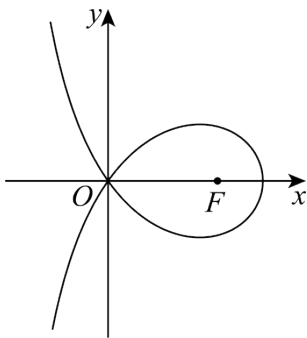
所以  $f(1) > f(2x-1) > f(3)$ , 即  $-4 < f(2x-1) < 0$ , 正确;

对 D, 当  $-1 < x < 0$  时,  $f(2-x) - f(x) = (1-x)^2(-2-x) - (x-1)^2(x-4) = (x-1)^2(2-2x) > 0$ ,

所以  $f(2-x) > f(x)$ , 正确;

故选: ACD.

11. 造型  $\infty$  可以做成美丽的丝带, 将其看作图中曲线  $C$  的一部分. 已知  $C$  过坐标原点  $O$ . 且  $C$  上的点满足横坐标大于  $-2$ , 到点  $F(2,0)$  的距离与到定直线  $x = a (a < 0)$  的距离之积为 4, 则 ( )



A.  $a = -2$

B. 点  $(2\sqrt{2}, 0)$  在  $C$  上

C.  $C$  在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点  $(x_0, y_0)$  在  $C$  上时,  $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题设将原点代入曲线方程后可求  $a$ , 故可判断 A 的正误, 结合曲线方程可判断 B 的正误, 利用特例法可判断 C 的正误, 将曲线方程化简后结合不等式的性质可判断 D 的正误.

【详解】对于 A: 设曲线上的动点  $P(x, y)$ , 则  $x > -2$  且  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x-a| = 4$ ,

因为曲线过坐标原点, 故  $\sqrt{(0-2)^2 + 0^2} \times |0-a| = 4$ , 解得  $a = -2$ , 故 A 正确.

对于 B: 又曲线方程为  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x+2| = 4$ , 而  $x > -2$ ,

故  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times (x+2) = 4$ .

当  $x = 2\sqrt{2}, y = 0$  时,  $\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} \times (2\sqrt{2}+2) = 8-4=4$ ,

故  $(2\sqrt{2}, 0)$  在曲线上, 故 B 正确.

对于 C: 由曲线的方程可得  $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2$ , 取  $x = \frac{3}{2}$ ,

则  $y^2 = \frac{64}{49} - \frac{1}{4}$ , 而  $\frac{64}{49} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{64}{49} - \frac{5}{4} = \frac{256-245}{49 \times 4} > 0$ , 故此时  $y^2 > 1$ ,

故 C 在第一象限内点的纵坐标的最大值大于 1, 故 C 错误.

对于 D: 当点  $(x_0, y_0)$  在曲线上时, 由 C 的分析可得  $y_0^2 = \frac{16}{(x_0+2)^2} - (x_0-2)^2 \leq \frac{16}{(x_0+2)^2}$ ,

故  $-\frac{4}{x_0+2} \leq y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$ , 故 D 正确.

故选: ABD.

【点睛】思路点睛: 根据曲线方程讨论曲线的性质, 一般需要将曲线方程变形化简后结合不等式的性质等来处理.

### 三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作平行于  $y$  轴的直线交  $C$  于  $A, B$

两点, 若  $|F_1A| = 13, |AB| = 10$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】由题意画出双曲线大致图象, 求出  $|AF_2|$ , 结合双曲线第一定义求出  $|AF_1|$ , 即可得到  $a, b, c$  的值, 从而求出离心率.

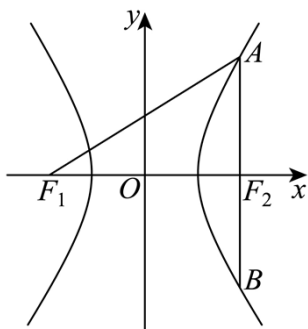
【详解】由题可知  $A, B, F_2$  三点横坐标相等, 设  $A$  在第一象限, 将  $x = c$  代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

得  $y = \pm \frac{b^2}{a}$ , 即  $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ , 故  $|AB| = \frac{2b^2}{a} = 10$ ,  $|AF_2| = \frac{b^2}{a} = 5$ ,

又  $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ , 得  $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 2a + 5 = 13$ , 解得  $a = 4$ , 代入  $\frac{b^2}{a} = 5$  得  $b^2 = 20$ ,

故  $c^2 = a^2 + b^2 = 36$ , 即  $c = 6$ , 所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

故答案为:  $\frac{3}{2}$



13. 若曲线  $y = e^x + x$  在点  $(0,1)$  处的切线也是曲线  $y = \ln(x+1) + a$  的切线, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\ln 2$

**【解析】**

**【分析】** 先求出曲线  $y = e^x + x$  在  $(0,1)$  的切线方程, 再设曲线  $y = \ln(x+1) + a$  的切点为  $(x_0, \ln(x_0+1) + a)$ , 求出  $y'$ , 利用公切线斜率相等求出  $x_0$ , 表示出切线方程, 结合两切线方程相同即可求解.

**【详解】** 由  $y = e^x + x$  得  $y' = e^x + 1$ ,  $y'|_{x=0} = e^0 + 1 = 2$ ,

故曲线  $y = e^x + x$  在  $(0,1)$  处的切线方程为  $y = 2x + 1$ ;

由  $y = \ln(x+1) + a$  得  $y' = \frac{1}{x+1}$ ,

设切线与曲线  $y = \ln(x+1) + a$  相切的切点为  $(x_0, \ln(x_0+1) + a)$ ,

由两曲线有公切线得  $y' = \frac{1}{x_0+1} = 2$ , 解得  $x_0 = -\frac{1}{2}$ , 则切点为  $\left(-\frac{1}{2}, a + \ln \frac{1}{2}\right)$ ,

切线方程为  $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + a + \ln \frac{1}{2} = 2x + 1 + a - \ln 2$ ,

根据两切线重合, 所以  $a - \ln 2 = 0$ , 解得  $a = \ln 2$ .

故答案为:  $\ln 2$

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8, 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）. 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 将每局的得分分别作为随机变量，然后分析其和随机变量即可.

【详解】 设甲在四轮游戏中的得分分别为  $X_1, X_2, X_3, X_4$ ，四轮的总得分为  $X$ .

对于任意一轮，甲乙两人在该轮出示每张牌的概率都均等，其中使得甲获胜的出牌组合有六种，从而甲在该轮获胜的概率  $P(X_k = 1) = \frac{6}{4 \times 4} = \frac{3}{8}$ ，所以  $E(X_k) = \frac{3}{8} (k=1, 2, 3, 4)$ .

$$\text{从而 } E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = \sum_{k=1}^4 E(X_k) = \sum_{k=1}^4 \frac{3}{8} = \frac{3}{2}.$$

记  $p_k = P(X = k) (k = 0, 1, 2, 3)$ .

如果甲得 0 分，则组合方式是唯一的：必定是甲出 1, 3, 5, 7 分别对应乙出 2, 4, 6, 8，所以

$$p_0 = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24};$$

如果甲得 3 分，则组合方式也是唯一的：必定是甲出 1, 3, 5, 7 分别对应乙出 8, 2, 4, 6，所以

$$p_3 = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}.$$

而  $X$  的所有可能取值是 0, 1, 2, 3，故  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ， $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = E(X) = \frac{3}{2}$ .

所以  $p_1 + p_2 + \frac{1}{12} = 1$ ， $p_1 + 2p_2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ ，两式相减即得  $p_2 + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$ ，故  $p_2 + p_3 = \frac{1}{2}$ .

所以甲的总得分不小于 2 的概率为  $p_2 + p_3 = \frac{1}{2}$ .

故答案为：  $\frac{1}{2}$ .

【点睛】 关键点点睛：本题的关键在于将问题转化为随机变量问题，利用期望的可加性得到等量关系，从而避免繁琐的列举.

四、解答题： 本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ ， $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$

(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $3+\sqrt{3}$ , 求  $c$ .

【答案】(1)  $B = \frac{\pi}{3}$

(2)  $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 由余弦定理、平方关系依次求出  $\cos C, \sin C$ , 最后结合已知  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$  得  $\cos B$  的值即可;

(2) 首先求出  $A, B, C$ , 然后由正弦定理可将  $a, b$  均用含有  $c$  的式子表示, 结合三角形面积公式即可列方程求解.

【小问 1 详解】

由余弦定理有  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ , 对比已知  $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$ ,

$$\text{可得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin C > 0$ ,

$$\text{从而 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又因为  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ , 即  $\cos B = \frac{1}{2}$ ,

注意到  $B \in (0, \pi)$ ,

所以  $B = \frac{\pi}{3}$ .

【小问 2 详解】

由 (1) 可得  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $C \in (0, \pi)$ , 从而  $C = \frac{\pi}{4}$ ,  $A = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ,

$$\text{而 } \sin A = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

由正弦定理有  $\frac{a}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{4}}$ ,

$$\text{从而 } a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}c = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}c, b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}c = \frac{\sqrt{6}}{2}c,$$

由三角形面积公式可知， $\triangle ABC$  的面积可表示为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2,$$

由已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3+\sqrt{3}$ ，可得  $\frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2 = 3+\sqrt{3}$ ，

所以  $c = 2\sqrt{2}$ 。

16. 已知  $A(0,3)$  和  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上两点。

(1) 求  $C$  的离心率；

(2) 若过  $P$  的直线  $l$  交  $C$  于另一点  $B$ ，且  $\triangle ABP$  的面积为 9，求  $l$  的方程。

**【答案】** (1)  $\frac{1}{2}$

(2) 直线  $l$  的方程为  $3x - 2y - 6 = 0$  或  $x - 2y = 0$ 。

**【解析】**

**【分析】** (1) 代入两点得到关于  $a, b$  的方程，解出即可；

(2) 方法一：以  $|AP|$  为底，求出三角形的高，即点  $B$  到直线  $AP$  的距离，再利用平行线距离公式得到平移后的直线方程，联立椭圆方程得到  $B$  点坐标，则得到直线  $l$  的方程；方法二：同法一得到点  $B$  到直线  $AP$  的距离，再设  $B(x_0, y_0)$ ，根据点到直线距离和点在椭圆上得到方程组，解出即可；法三：同法一得到点  $B$  到直线  $AP$  的距离，利用椭圆的参数方程即可求解；法四：首先验证直线  $AB$  斜率不存在的情况，再设直线  $y = kx + 3$ ，联立椭圆方程，得到点  $B$  坐标，再利用点到直线距离公式即可；法五：首先考虑直线  $PB$  斜率不存在的情况，再设  $PB: y - \frac{3}{2} = k(x - 3)$ ，利用弦长公式和点到直线的距离公式即可得到答案；法六：设线法与法五一致，利用水平宽乘铅锤高乘  $\frac{1}{2}$  表达面积即可。

**【小问 1 详解】**

$$\text{由题意得 } \begin{cases} b=3 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b^2=9 \\ a^2=12 \end{cases},$$

$$\text{所以 } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{12}} = \frac{1}{2}.$$

【小问 2 详解】

法一：  $k_{AP} = \frac{3-\frac{3}{2}}{0-3} = -\frac{1}{2}$ ，则直线  $AP$  的方程为  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ，即  $x + 2y - 6 = 0$ ，

$$|AP| = \sqrt{(0-3)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}，由 (1) 知  $C: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，$$

$$设点 B 到直线 AP 的距离为  $d$ ，则  $d = \frac{2 \times 9}{3\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，$$

则将直线  $AP$  沿着与  $AP$  垂直的方向平移  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$  单位即可，

此时该平行线与椭圆的交点即为点  $B$ ，

设该平行线的方程为：  $x + 2y + C = 0$ ，

$$则 \frac{|C+6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}，解得  $C = 6$  或  $C = -18$ ，$$

$$当  $C = 6$  时，联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$ ，$$

$$即  $B(0, -3)$  或  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ ，$$

当  $B(0, -3)$  时，此时  $k_l = \frac{3}{2}$ ，直线  $l$  的方程为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ，即  $3x - 2y - 6 = 0$ ，

当  $B\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$  时，此时  $k_l = \frac{1}{2}$ ，直线  $l$  的方程为  $y = \frac{1}{2}x$ ，即  $x - 2y = 0$ ，

$$当  $C = -18$  时，联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$  得  $2y^2 - 27y + 117 = 0$ ，$$

$\Delta = 27^2 - 4 \times 2 \times 117 = -207 < 0$ ，此时该直线与椭圆无交点。

综上直线  $l$  的方程为  $3x - 2y - 6 = 0$  或  $x - 2y = 0$ 。

法二：同法一得到直线  $AP$  的方程为  $x + 2y - 6 = 0$ ，

$$点 B 到直线 AP 的距离  $d = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，$$

$$\text{设 } B(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{|x_0 + 2y_0 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \\ \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \end{cases},$$

即  $B(0, -3)$  或  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ , 以下同法一.

法三: 同法一得到直线  $AP$  的方程为  $x + 2y - 6 = 0$ ,

点  $B$  到直线  $AP$  的距离  $d = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ,

设  $B(2\sqrt{3}\cos\theta, 3\sin\theta)$ , 其中  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 则有  $\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta + 6\sin\theta - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ,

$$\text{联立 } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \text{ 解得 } \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases},$$

即  $B(0, -3)$  或  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ , 以下同法一;

法四: 当直线  $AB$  的斜率不存在时, 此时  $B(0, -3)$ ,

$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ , 符合题意, 此时  $k_l = \frac{3}{2}$ , 直线  $l$  的方程为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ , 即  $3x - 2y - 6 = 0$ ,

当线  $AB$  的斜率存在时, 设直线  $AB$  的方程为  $y = kx + 3$ ,

$$\text{联立椭圆方程有 } \begin{cases} y = kx + 3 \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}, \text{ 则 } (4k^2 + 3)x^2 + 24kx = 0, \text{ 其中 } k \neq k_{AP}, \text{ 即 } k \neq -\frac{1}{2},$$

解得  $x = 0$  或  $x = \frac{-24k}{4k^2 + 3}$ ,  $k \neq 0$ ,  $k \neq -\frac{1}{2}$ ,

令  $x = \frac{-24k}{4k^2 + 3}$ , 则  $y = \frac{-12k^2 + 9}{4k^2 + 3}$ , 则  $B\left(\frac{-24k}{4k^2 + 3}, \frac{-12k^2 + 9}{4k^2 + 3}\right)$

同法一得到直线  $AP$  的方程为  $x + 2y - 6 = 0$ ,

点  $B$  到直线  $AP$  的距离  $d = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ,

$$\text{则 } \frac{\left| \frac{-24k}{4k^2+3} + 2 \times \frac{-12k^2+9}{4k^2+3} - 6 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得 } k = \frac{3}{2},$$

此时  $B\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ , 则得到此时  $k_l = \frac{1}{2}$ , 直线  $l$  的方程为  $y = \frac{1}{2}x$ , 即  $x - 2y = 0$ ,

综上直线  $l$  的方程为  $3x - 2y - 6 = 0$  或  $x - 2y = 0$ .

法五: 当  $l$  的斜率不存在时,  $l: x = 3, B\left(3, -\frac{3}{2}\right), |PB| = 3, A$  到  $PB$  距离  $d = 3$ ,

此时  $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$  不满足条件.

当  $l$  的斜率存在时, 设  $PB: y - \frac{3}{2} = k(x - 3)$ , 令  $P(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 可得 } (4k^2+3)x^2 - (24k^2-12k)x + 36k^2 - 36k - 27 = 0,$$

$\Delta = (24k^2 - 12k)^2 - 4(4k^2 + 3)(36k^2 - 36k - 27) > 0$ , 且  $k \neq k_{AP}$ , 即  $k \neq -\frac{1}{2}$ ,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{24k^2 - 12k}{4k^2 + 3} \\ x_1 x_2 = \frac{36k^2 - 36k - 27}{4k^2 + 3} \end{cases}, |PB| = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2 + 1} \sqrt{3k^2 + 9k + \frac{27}{4}}}{4k^2 + 3},$$

$$A \text{ 到直线 } PB \text{ 距离 } d = \frac{\left|3k + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2 + 1}}, S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2 + 1} \sqrt{3k^2 + 9k + \frac{27}{4}}}{4k^2 + 3} \cdot \frac{\left|3k + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 9,$$

$\therefore k = \frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ , 均满足题意,  $\therefore l: y = \frac{1}{2}x$  或  $y = \frac{3}{2}x - 3$ , 即  $3x - 2y - 6 = 0$  或  $x - 2y = 0$ .

法六: 当  $l$  的斜率不存在时,  $l: x = 3, B\left(3, -\frac{3}{2}\right), |PB| = 3, A$  到  $PB$  距离  $d = 3$ ,

此时  $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$  不满足条件.

当直线  $l$  斜率存在时, 设  $l: y = k(x - 3) + \frac{3}{2}$ ,

设  $l$  与  $y$  轴的交点为  $Q$ , 令  $x = 0$ , 则  $Q\left(0, -3k + \frac{3}{2}\right)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx - 3k + \frac{3}{2}, \\ 3x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}, \text{ 则有 } (3+4k^2)x^2 - 8k\left(3k - \frac{3}{2}\right)x + 36k^2 - 36k - 27 = 0,$$

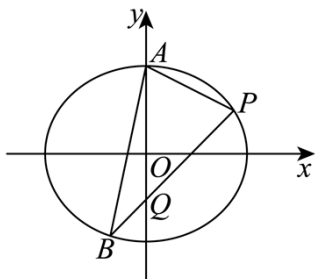
$$(3+4k^2)x^2 - 8k\left(3k - \frac{3}{2}\right)x + 36k^2 - 36k - 27 = 0,$$

$$\text{其中 } \Delta = 8k^2\left(3k - \frac{3}{2}\right)^2 - 4(3+4k^2)(36k^2 - 36k - 27) > 0, \text{ 且 } k \neq -\frac{1}{2},$$

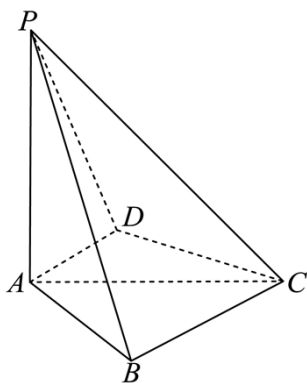
$$\text{则 } 3x_B = \frac{36k^2 - 36k - 27}{3+4k^2}, x_B = \frac{12k^2 - 12k - 9}{3+4k^2},$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}|AQ||x_P - x_B| = \frac{1}{2}\left|3k + \frac{3}{2}\right|\left|\frac{12k+18}{3+4k^2}\right| = 9, \text{ 解的 } k = \frac{1}{2} \text{ 或 } k = \frac{3}{2}, \text{ 经代入判别式验证均满足题意.}$$

$$\text{则直线 } l \text{ 为 } y = \frac{1}{2}x \text{ 或 } y = \frac{3}{2}x - 3, \text{ 即 } 3x - 2y - 6 = 0 \text{ 或 } x - 2y = 0.$$



17. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = AC = 2$ ,  $BC = 1, AB = \sqrt{3}$ .



(1) 若  $AD \perp PB$ , 证明:  $AD \parallel$  平面  $PBC$ ;

(2) 若  $AD \perp DC$ , 且二面角  $A-CP-D$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ , 求  $AD$ .

【答案】(1) 证明见解析

(2)  $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 先证出  $AD \perp$  平面  $PAB$ ，即可得  $AD \perp AB$ ，由勾股定理逆定理可得  $BC \perp AB$ ，从而  $AD \parallel BC$ ，再根据线面平行的判定定理即可证出；

(2) 过点  $D$  作  $DE \perp AC$  于  $E$ ，再过点  $E$  作  $EF \perp CP$  于  $F$ ，连接  $DF$ ，根据三垂线法可知， $\angle DFE$  即为二面角  $A-CP-D$  的平面角，即可求得  $\tan \angle DFE = \sqrt{6}$ ，再分别用  $AD$  的长度表示出  $DE, EF$ ，即可解方程求出  $AD$ 。

【小问 1 详解】

(1) 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，而  $AD \subset$  平面  $ABCD$ ，所以  $PA \perp AD$ ，

又  $AD \perp PB$ ， $PB \cap PA = P$ ， $PB, PA \subset$  平面  $PAB$ ，所以  $AD \perp$  平面  $PAB$ ，

而  $AB \subset$  平面  $PAB$ ，所以  $AD \perp AB$ 。

因为  $BC^2 + AB^2 = AC^2$ ，所以  $BC \perp AB$ ，根据平面知识可知  $AD \parallel BC$ ，

又  $AD \not\subset$  平面  $PBC$ ， $BC \subset$  平面  $PBC$ ，所以  $AD \parallel$  平面  $PBC$ 。

【小问 2 详解】

如图所示，过点  $D$  作  $DE \perp AC$  于  $E$ ，再过点  $E$  作  $EF \perp CP$  于  $F$ ，连接  $DF$ ，

因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，所以平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ，而平面  $PAC \cap$  平面  $ABCD = AC$ ，

所以  $DE \perp$  平面  $PAC$ ，又  $EF \perp CP$ ，所以  $CP \perp$  平面  $DEF$ ，

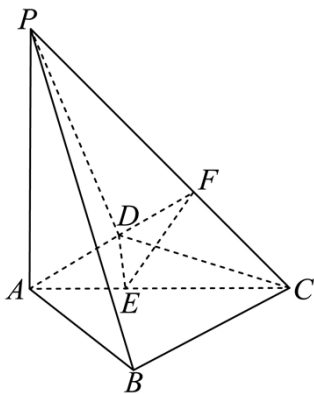
根据二面角的定义可知， $\angle DFE$  即为二面角  $A-CP-D$  的平面角，

$$\text{即 } \sin \angle DFE = \frac{\sqrt{42}}{7}, \text{ 即 } \tan \angle DFE = \sqrt{6}.$$

因为  $AD \perp DC$ ，设  $AD = x$ ，则  $CD = \sqrt{4-x^2}$ ，由等面积法可得， $DE = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$ ，

$$\text{又 } CE = \sqrt{(4-x^2) - \frac{x^2(4-x^2)}{4}} = \frac{4-x^2}{2}, \text{ 而 } \triangle EFC \text{ 为等腰直角三角形，所以 } EF = \frac{4-x^2}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{故 } \tan \angle DFE = \frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{6}, \text{ 解得 } x = \sqrt{3}, \text{ 即 } AD = \sqrt{3}.$$



18. 已知函数  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

- (1) 若  $b=0$ ，且  $f'(x) \geq 0$ ，求  $a$  的最小值；
- (2) 证明：曲线  $y=f(x)$  是中心对称图形；
- (3) 若  $f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2$ ，求  $b$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $-2$

(2) 证明见解析 (3)  $b \geq -\frac{2}{3}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 求出  $f'(x)_{\min} = 2+a$  后根据  $f'(x) \geq 0$  可求  $a$  的最小值；

(2) 设  $P(m, n)$  为  $y=f(x)$  图象上任意一点，可证  $P(m, n)$  关于  $(1, a)$  的对称点为  $Q(2-m, 2a-n)$  也在函数的图像上，从而可证对称性；

(3) 根据题设可判断  $f(1) = -2$  即  $a = -2$ ，再根据  $f(x) > -2$  在  $(1, 2)$  上恒成立可求得  $b \geq -\frac{2}{3}$ .

**【小问 1 详解】**

$b=0$  时，  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax$ ，其中  $x \in (0, 2)$ ，

则  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2}{x(2-x)} + a, x \in (0, 2)$ ，

因为  $x(2-x) \leq \left(\frac{2-x+x}{2}\right)^2 = 1$ ，当且仅当  $x=1$  时等号成立，

故  $f'(x)_{\min} = 2+a$ ，而  $f'(x) \geq 0$  成立，故  $a+2 \geq 0$  即  $a \geq -2$ ，

所以  $a$  的最小值为  $-2$ 。

**【小问 2 详解】**

$f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$  的定义域为  $(0, 2)$ ,

设  $P(m, n)$  为  $y = f(x)$  图象上任意一点,

$P(m, n)$  关于  $(1, a)$  的对称点为  $Q(2-m, 2a-n)$ ,

因为  $P(m, n)$  在  $y = f(x)$  图象上, 故  $n = \ln \frac{m}{2-m} + am + b(m-1)^3$ ,

$$\text{而 } f(2-m) = \ln \frac{2-m}{m} + a(2-m) + b(2-m-1)^3 = -\left[ \ln \frac{m}{2-m} + am + b(m-1)^3 \right] + 2a,$$

$$= -n + 2a,$$

所以  $Q(2-m, 2a-n)$  也在  $y = f(x)$  图象上,

由  $P$  的任意性可得  $y = f(x)$  图象为中心对称图形, 且对称中心为  $(1, a)$ .

### 【小问 3 详解】

因为  $f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2$ , 故  $x = 1$  为  $f(x) = -2$  的一个解,

所以  $f(1) = -2$  即  $a = -2$ ,

先考虑  $1 < x < 2$  时,  $f(x) > -2$  恒成立.

此时  $f(x) > -2$  即为  $\ln \frac{x}{2-x} + 2(1-x) + b(x-1)^3 > 0$  在  $(1, 2)$  上恒成立,

设  $t = x-1 \in (0, 1)$ , 则  $\ln \frac{t+1}{1-t} - 2t + bt^3 > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立,

设  $g(t) = \ln \frac{t+1}{1-t} - 2t + bt^3, t \in (0, 1)$ ,

$$\text{则 } g'(t) = \frac{2}{1-t^2} - 2 + 3bt^2 = \frac{t^2(-3bt^2 + 2 + 3b)}{1-t^2},$$

当  $b \geq 0$ ,  $-3bt^2 + 2 + 3b \geq -3b + 2 + 3b = 2 > 0$ ,

故  $g'(t) > 0$  恒成立, 故  $g(t)$  在  $(0, 1)$  上为增函数,

故  $g(t) > g(0) = 0$  即  $f(x) > -2$  在  $(1, 2)$  上恒成立.

当  $-\frac{2}{3} \leq b < 0$  时,  $-3bt^2 + 2 + 3b \geq 2 + 3b \geq 0$ ,

故  $g'(t) \geq 0$  恒成立, 故  $g(t)$  在  $(0, 1)$  上为增函数,

故  $g(t) > g(0) = 0$  即  $f(x) > -2$  在  $(1, 2)$  上恒成立.

当  $b < -\frac{2}{3}$ , 则当  $0 < t < \sqrt{1 + \frac{2}{3b}} < 1$  时,  $g'(t) < 0$

故在  $(0, \sqrt{1 + \frac{2}{3b}})$  上  $g(t)$  为减函数, 故  $g(t) < g(0) = 0$ , 不合题意, 舍;

综上,  $f(x) > -2$  在  $(1, 2)$  上恒成立时  $b \geq -\frac{2}{3}$ .

而当  $b \geq -\frac{2}{3}$  时,

而  $b \geq -\frac{2}{3}$  时, 由上述过程可得  $g(t)$  在  $(0, 1)$  递增, 故  $g(t) > 0$  的解为  $(0, 1)$ ,

即  $f(x) > -2$  的解为  $(1, 2)$ .

综上,  $b \geq -\frac{2}{3}$ .

**【点睛】** 思路点睛: 一个函数不等式成立的充分必要条件就是函数不等式对应的解, 而解的端点为函数对一个方程的根或定义域的端点, 另外, 根据函数不等式的解确定参数范围时, 可先由恒成立得到参数的范围, 再根据得到的参数的范围重新考虑不等式的解的情况.

19. 设  $m$  为正整数, 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是公差为  $d \neq 0$  的等差数列, 若从中删去两项  $a_i$  和  $a_j$  ( $i < j$ ) 后剩余的  $4m$  项可被平均分为  $m$  组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列.

(1) 写出所有的  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4m+2$ , 使数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列;

(2) 当  $m \geq 3$  时, 证明: 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从  $1, 2, \dots, 4m+2$  中一次任取两个数  $i$  和  $j$  ( $i < j$ ), 记数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列的概率为  $P_m$ , 证明:  $P_m > \frac{1}{8}$ .

**【答案】** (1)  $(1, 2), (1, 6), (5, 6)$

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 直接根据  $(i, j)$ -可分数列的定义即可;

(2) 根据  $(i, j)$ -可分数列的定义即可验证结论;

(3) 证明使得原数列是  $(i, j)$ -可分数列的  $(i, j)$  至少有  $(m+1)^2 - m$  个, 再使用概率的定义.

**【小问 1 详解】**

首先，我们设数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  的公差为  $d$ ，则  $d \neq 0$ 。

由于一个数列同时加上一个数或者乘以一个非零数后是等差数列，当且仅当该数列是等差数列，

故我们可以对该数列进行适当的变形  $a'_k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 (k = 1, 2, \dots, 4m + 2)$ ，

得到新数列  $a'_k = k (k = 1, 2, \dots, 4m + 2)$ ，然后对  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{4m+2}$  进行相应的讨论即可。

换言之，我们可以不妨设  $a_k = k (k = 1, 2, \dots, 4m + 2)$ ，此后的讨论均建立在该假设下进行。

回到原题，第 1 小问相当于从  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  中取出两个数  $i$  和  $j (i < j)$ ，使得剩下四个数是等差数列。

那么剩下四个数只可能是  $1, 2, 3, 4$ ，或  $2, 3, 4, 5$ ，或  $3, 4, 5, 6$ 。

所以所有可能的  $(i, j)$  就是  $(1, 2), (1, 6), (5, 6)$ 。

### 【小问 2 详解】

由于从数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  中取出 2 和 13 后，剩余的  $4m$  个数可以分为以下两个部分，共  $m$  组，使得每组成等差数列：

①  $\{1, 4, 7, 10\}, \{3, 6, 9, 12\}, \{5, 8, 11, 14\}$ ，共 3 组；

②  $\{15, 16, 17, 18\}, \{19, 20, 21, 22\}, \dots, \{4m - 1, 4m, 4m + 1, 4m + 2\}$ ，共  $m - 3$  组。

(如果  $m - 3 = 0$ ，则忽略②)

故数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  是  $(2, 13)$ -可分数列。

### 【小问 3 详解】

定义集合  $A = \{4k + 1 | k = 0, 1, 2, \dots, m\} = \{1, 5, 9, 13, \dots, 4m + 1\}$ ，

$B = \{4k + 2 | k = 0, 1, 2, \dots, m\} = \{2, 6, 10, 14, \dots, 4m + 2\}$ 。

下面证明，对  $1 \leq i < j \leq 4m + 2$ ，如果下面两个命题同时成立，

则数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  一定是  $(i, j)$ -可分数列：

命题 1:  $i \in A, j \in B$  或  $i \in B, j \in A$ ；

命题 2:  $j - i \neq 3$ 。

我们分两种情况证明这个结论。

第一种情况：如果  $i \in A, j \in B$ ，且  $j - i \neq 3$ 。

此时设  $i = 4k_1 + 1$ ， $j = 4k_2 + 2$ ， $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ 。

则由  $i < j$  可知  $4k_1 + 1 < 4k_2 + 2$ , 即  $k_2 - k_1 > -\frac{1}{4}$ , 故  $k_2 \geq k_1$ .

此时, 由于从数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  中取出  $i = 4k_1 + 1$  和  $j = 4k_2 + 2$  后,

剩余的  $4m$  个数可以分为以下三个部分, 共  $m$  组, 使得每组成等差数列:

①  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \dots, \{4k_1 - 3, 4k_1 - 2, 4k_1 - 1, 4k_1\}$ , 共  $k_1$  组;

②  $\{4k_1 + 2, 4k_1 + 3, 4k_1 + 4, 4k_1 + 5\}, \{4k_1 + 6, 4k_1 + 7, 4k_1 + 8, 4k_1 + 9\}, \dots, \{4k_2 - 2, 4k_2 - 1, 4k_2, 4k_2 + 1\}$ , 共  $k_2 - k_1$  组;

③  $\{4k_2 + 3, 4k_2 + 4, 4k_2 + 5, 4k_2 + 6\}, \{4k_2 + 7, 4k_2 + 8, 4k_2 + 9, 4k_2 + 10\}, \dots, \{4m - 1, 4m, 4m + 1, 4m + 2\}$ , 共  $m - k_2$  组.

(如果某一部分的组数为 0, 则忽略之)

故此时数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  是  $(i, j)$ -可分数列.

第二种情况: 如果  $i \in B, j \in A$ , 且  $j - i \neq 3$ .

此时设  $i = 4k_1 + 2, j = 4k_2 + 1, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ .

则由  $i < j$  可知  $4k_1 + 2 < 4k_2 + 1$ , 即  $k_2 - k_1 > \frac{1}{4}$ , 故  $k_2 > k_1$ .

由于  $j - i \neq 3$ , 故  $(4k_2 + 1) - (4k_1 + 2) \neq 3$ , 从而  $k_2 - k_1 \neq 1$ , 这就意味着  $k_2 - k_1 \geq 2$ .

此时, 由于从数列  $1, 2, \dots, 4m + 2$  中取出  $i = 4k_1 + 2$  和  $j = 4k_2 + 1$  后, 剩余的  $4m$  个数可以分为以下四个部分, 共  $m$  组, 使得每组成等差数列:

①  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \dots, \{4k_1 - 3, 4k_1 - 2, 4k_1 - 1, 4k_1\}$ , 共  $k_1$  组;

②  $\{4k_1 + 1, 3k_1 + k_2 + 1, 2k_1 + 2k_2 + 1, k_1 + 3k_2 + 1\}, \{3k_1 + k_2 + 2, 2k_1 + 2k_2 + 2, k_1 + 3k_2 + 2, 4k_2 + 2\}$ , 共 2 组;

③ 全体  $\{4k_1 + p, 3k_1 + k_2 + p, 2k_1 + 2k_2 + p, k_1 + 3k_2 + p\}$ , 其中  $p = 3, 4, \dots, k_2 - k_1$ , 共  $k_2 - k_1 - 2$  组;

④  $\{4k_2 + 3, 4k_2 + 4, 4k_2 + 5, 4k_2 + 6\}, \{4k_2 + 7, 4k_2 + 8, 4k_2 + 9, 4k_2 + 10\}, \dots, \{4m - 1, 4m, 4m + 1, 4m + 2\}$ , 共  $m - k_2$  组.

(如果某一部分的组数为 0, 则忽略之)

这里对②和③进行一下解释: 将③中的每一组作为一个横排, 排成一个包含  $k_2 - k_1 - 2$  个行, 4 个列的数表以后, 4 个列分别是下面这些数:

$$\{4k_1+3, 4k_1+4, \dots, 3k_1+k_2\}, \{3k_1+k_2+3, 3k_1+k_2+4, \dots, 2k_1+2k_2\},$$

$$\{2k_1+2k_2+3, 2k_1+2k_2+4, \dots, k_1+3k_2\}, \{k_1+3k_2+3, k_1+3k_2+4, \dots, 4k_2\}.$$

可以看出每列都是连续的若干个整数，它们再取并以后，将取遍  $\{4k_1+1, 4k_1+2, \dots, 4k_2+2\}$  中除开五个集

$$\{4k_1+1, 4k_1+2\}, \{3k_1+k_2+1, 3k_1+k_2+2\}, \{2k_1+2k_2+1, 2k_1+2k_2+2\},$$

$$\{k_1+3k_2+1, k_1+3k_2+2\}, \{4k_2+1, 4k_2+2\}$$
 中的十个元素以外的所有数.

而这十个数中，除开已经去掉的  $4k_1+2$  和  $4k_2+1$  以外，剩余的八个数恰好就是②中出现的八个数.

这就说明我们给出的分组方式满足要求，故此时数列  $1, 2, \dots, 4m+2$  是  $(i, j)$ -可分数列.

至此，我们证明了：对  $1 \leq i < j \leq 4m+2$ ，如果前述命题 1 和命题 2 同时成立，则数列  $1, 2, \dots, 4m+2$  一定是  $(i, j)$ -可分数列.

然后我们来考虑这样的  $(i, j)$  的个数.

首先，由于  $A \cap B = \emptyset$ ，A 和 B 各有  $m+1$  个元素，故满足命题 1 的  $(i, j)$  总共有  $(m+1)^2$  个；

而如果  $j-i=3$ ，假设  $i \in A, j \in B$ ，则可设  $i=4k_1+1, j=4k_2+2$ ，代入得  $(4k_2+2)-(4k_1+1)=3$ .

但这导致  $k_2-k_1=\frac{1}{2}$ ，矛盾，所以  $i \in B, j \in A$ .

设  $i=4k_1+2, j=4k_2+1, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ，则  $(4k_2+1)-(4k_1+2)=3$ ，即  $k_2-k_1=1$ .

所以可能的  $(k_1, k_2)$  恰好就是  $(0, 1), (1, 2), \dots, (m-1, m)$ ，对应的  $(i, j)$  分别是

$$(2, 5), (6, 9), \dots, (4m-2, 4m+1),$$
 总共  $m$  个.

所以这  $(m+1)^2$  个满足命题 1 的  $(i, j)$  中，不满足命题 2 的恰好有  $m$  个.

这就得到同时满足命题 1 和命题 2 的  $(i, j)$  的个数为  $(m+1)^2 - m$ .

当我们从  $1, 2, \dots, 4m+2$  中一次任取两个数  $i$  和  $j (i < j)$  时，总的选取方式的个数等于

$$\frac{(4m+2)(4m+1)}{2} = (2m+1)(4m+1).$$

而根据之前的结论，使得数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列的  $(i, j)$  至少有  $(m+1)^2 - m$  个.

所以数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列的概率  $P_m$  一定满足

$$P_m \geq \frac{(m+1)^2 - m}{(2m+1)(4m+1)} = \frac{m^2 + m + 1}{(2m+1)(4m+1)} > \frac{m^2 + m + \frac{1}{4}}{(2m+1)(4m+2)} = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{2(2m+1)(2m+1)} = \frac{1}{8}.$$

这就证明了结论.

**【点睛】** 关键点睛：本题的关键在于对新定义数列的理解，只有理解了定义，方可使用定义验证或探究结论.