

# 2012年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

## 数学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第1至2页，第Ⅱ卷第3至第4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 务必在试题卷、答题卡 自己的姓名、座位号，并认真 粘贴的条形码中姓名 座位号是否一致。务必 面规定的地方填写姓名和座位号后两位。
2. 答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答第Ⅱ卷时，必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置画出，确认后再用0.5毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束，务必将试卷和答题卡一并上交。

参考：

如果事件  $A$  与  $B$  互斥；则  $P(A+B) = P(A) + P(B)$

如果事件  $A$  与  $B$  相互独立；则  $P(AB) = P(A)P(B)$

如果  $A$  与  $B$  是事件，且  $P(B) > 0$ ；则  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

试卷总评：安徽卷的试题在整体上题目比去年容易很多，注重了学生对基础知识、基本技能的全面考查，试题难易程度适中，布局比较合理，适合与对中等生的能力选拔应试。但对于最后的难题（压轴题，如选择最后1题，填空最后一题，解答题压轴题）的区分度不大。

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

(1) 复数  $x$  满足  $(z-i)(2-i) = 5$ . 则( )

- A.  $-2-2i$       B.  $-2+2i$       C.  $2-2i$       D.  $2+2i$

【答案】D

【解析】因  $(z-i)(2-i) = 5$ ，所以  $z = \frac{5}{2-i} + i = 2+2i$ ，选D。

【考点定位】考查复数运算。

(2) 下列函数中，不满足  $f(2x) = 2f(x)$  的是( )

- A  $f(x) = |x|$     B  $f(x) = x - |x|$     C  $f(x) = x+1$     D  $f(x) = -x$

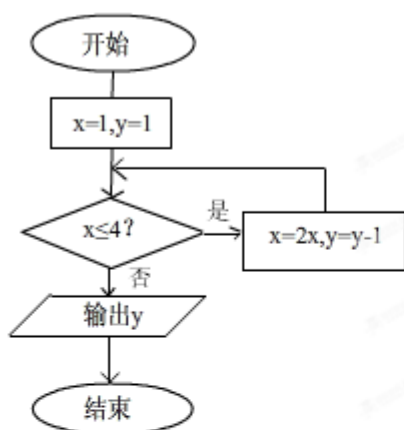
【答案】C

【解析】由题中选项可知C不满足，因  $f(2x) = 2x+1$ ， $2f(x) = 2(x+1) = 2x+2$ ，选C。

【考点定位】考查函数的表示

3 如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是( )

- A.3      B.4      C.5      D.8



**【答案】** B

**【解析】**由框图可知  $x=1, y=1$ ，①  $1 \leq 4$ ，满足条件，则  $x=2, y=2$ ；②  $2 \leq 4$ ，满足条件，则  $x=4, y=3$ ；③  $4 \leq 4$ ，满足条件，则  $x=8, y=4$ ；④  $8 \leq 4$ ，不满足条件，输出  $y=4$ ，选 B。

**【考点定位】**考查程序框图的推理运算。

4. 公比为 2 的等比数列  $\{a_n\}$  的各项都是正数，且  $a_3 a_{11} = 16$ ，则  $\log_2 a_{10} = ( )$

- (A) 4    (B) 5    (C) 6    (D) 7

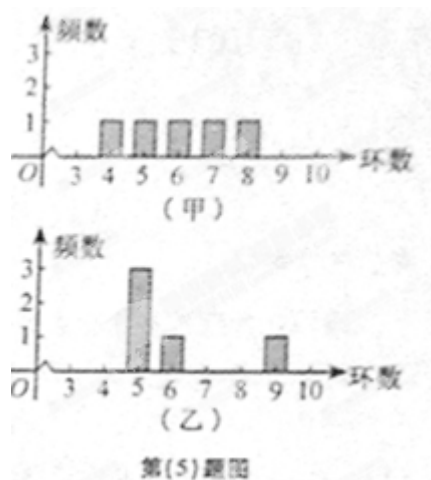
**【答案】** B

**【解析】**因  $a_3 a_{11} = 16 = a_7^2$ ， $a_n > 0$ ，所以  $a_7 = 4$ ，故  $a_{10} = a_7 \cdot q^3 = 2^5$ ，即

$\log_2 a_{10} = \log_2 2^5 = 5$ ，选 B。

**【考点定位】**考查对数的运算。

5. 甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次，两人成绩的条形统计图如图所示，则( )



- (A) 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数
- (B) 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数
- (C) 甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差
- (D) 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差

**【答案】** C

**【解析】**由条形图可知， $\bar{x}_甲 = \frac{1}{5}(4+5+6+7+8) = 6$ ， $\bar{x}_乙 = \frac{1}{5}(5 \times 3 + 6 + 9) = 6$ ，甲的成绩的方差为  $\frac{1}{5}(2^2 \times 2 + 1^2 \times 2) = 2$ ，乙的成绩的方差为  $\frac{1}{5}(1^2 \times 3 + 3^2 \times 1) = 2.4$  故甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差，选 C。

**【考点定位】**考查统计知识，平均数和方差。

(6) 设平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交于直线  $m$ ，直线  $a$  在平面  $\alpha$  内。直线  $b$  在平面  $\beta$  内，且  $b \perp m$ ，则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的( )

- (A) 充分不必要条件
- (B) 必要不充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既不充分也不必要条件

**【答案】** A

**【解析】**由题中条件可得，若“ $\alpha \perp \beta$ ”，则  $b \perp \alpha$ ，即可得“ $a \perp b$ ”，即充分性成立，反之则不然，故选 A。

**【考点定位】**考查充分必要条件的判定。

(7)  $(x^2 + 2)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$  的展开式的常数项是( )

- (A) -3
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 3

**【答案】** D

**【解析】**由二项展开式通项公式可求得  $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$  含  $x^{-2}$  的项为  $5x^{-2}$ ，常数项为  $-1$ ，故可得

$(x^2 + 2)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$  的展开式的常数项是  $5 - 2 = 3$ ，选 D。

**【考点定位】**考查二项式通项公式应用。

(8) 在平面直角坐标系中，点  $O(0,0)$ ， $P(6,8)$ ，将向量  $\overrightarrow{OP}$  绕点  $O$  逆时针方向旋转  $\frac{3\pi}{4}$  后得向量  $\overrightarrow{OQ}$ ，则点的坐标是( )

- (A)  $(-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
- (B)  $(-7\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (C)  $(-4\sqrt{6}, -2)$
- (D)  $(-4\sqrt{6}, 2)$

**【答案】** A

**【解析】**

法一：设  $\overrightarrow{OP} = (10 \cos \theta, 10 \sin \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$ ,

则  $\overrightarrow{OQ} = (10 \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}), 10 \sin(\theta + \frac{3\pi}{4})) = (-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , 选 A

法二：将向量  $\overrightarrow{OP} = (6, 8)$  按逆时针旋转  $\frac{3\pi}{2}$  后得  $\overrightarrow{OM} = (8, -6)$ , 则

$\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}) = (-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , 选 A

**【考点定位】** 考查平面向量的坐标运算。

(9) 过抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点。若

$|AF| = 3$ , 则  $\triangle AOB$  的面积为( )

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (D)  $2\sqrt{2}$

**【答案】** C

**【解析】**

法一：由题可知焦点  $F(1, 0)$ , 设点  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  由  $|AF| = 3$ , 则  $x_A = 2$ , 即

$A(2, 2\sqrt{2})$ , 故直线  $AB: y = 2\sqrt{2}(x-1)$ , 联立方程可得  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , 解得  $x_B = \frac{1}{2}$ ,

即  $B(\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$ , 所以  $\triangle AOB$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 选 C。

法二：设  $\angle AFx = \theta (0 < \theta < \pi)$  及  $|BF| = m$ ; 则点 A 到准线  $l: x = -1$  的距离为 3,

得:  $3 = 2 + 3 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{3}$  又  $m = 2 + m \cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow m = \frac{2}{1 + \cos \theta} = \frac{3}{2}$ ,

$\triangle AOB$  的面积为  $S = \frac{1}{2} \times |OF| \times |AB| \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 1 \times (3 + \frac{3}{2}) \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 选 C。

**【考点定位】** 考查抛物线的性质。

(10) 6 位同学在毕业聚会活动中进行纪念品的交换, 任意两位同学之间最多交换一次, 进行交换的两位同学互赠一份纪念品。已知 6 位同学之间共进行了 13 次交换, 则收到 4 份纪念品的同学人数为( )

- (A) 1 或 3 (B) 1 或 4 (C) 2 或 3 (D) 2 或 4

【答案】D

【解析】因6位同学之间任意两位同学交换一次有  $C_6^2 = 15$ , 则现在进行了13次交换, 意味着有两对同学没有交换, 故①设仅有甲与乙, 丙没交换纪念品, 则收到4份纪念品的同学

人数为2人; ②设仅有甲与乙, 丙与丁没交换纪念品, 则收到4份纪念品的同学人数为4人。

【考点定位】考查排列组合的应用。

## 2012年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

### 数学（理科）

第II卷（非选择题 共100分）

请用0.5毫米海瑟墨水签字笔在答题卡上作答，在试卷上答题无效。

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，把答案填在答题卡的相应位置。

(11) 若  $x, y$  满足约束条件 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$$
 则  $x - y$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

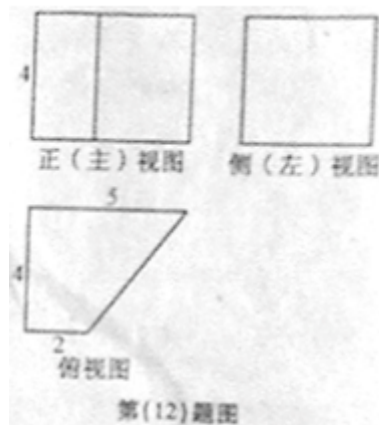
【答案】 $[-3, 0]$ 。

【解析】画出可行域可知，约束条件对应  $\triangle ABC$  边际及内的区域： $A(0, 3), B(0, \frac{3}{2}), C(1, 1)$

则在点  $(0, 3)$  取最小值为  $-3$ ，在点  $(1, 1)$  处取最大值  $0$ ，即取值范围是  $[-3, 0]$ 。

【考点定位】考查线性规划。

(12) 某几何体的三视图如图所示，该几何体的表面积是\_\_\_\_\_。



【答案】92

【解析】由三视图可知，原几何体是一个底面是直角梯形，高为4的直四棱柱，其底面积为  $2 \times \frac{(2+5)4}{2} = 28$ ，侧面积为  $(4+2+5+5) \times 4 = 64$ ，故表面积为92。

【考点定位】考查三视图和表面积计算。

(13) 在极坐标系中, 圆  $\rho = 4\sin\theta$  的圆心到直线  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in R)$  的距离是\_\_\_\_\_。

【答案】  $\sqrt{3}$

【解析】因圆  $\rho = 4\sin\theta$  化普通方程为  $x^2 + y^2 = 4y$ , 其圆心为  $(0, 2)$ , 直线  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in R)$

化普通方程为  $x - \sqrt{3}y = 0$ , 则所求距离为  $d = \frac{|0 - 2\sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}$ 。

【考点定位】考查极坐标与参数方程。

(14.) 若平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|2\vec{a} - \vec{b}| \leq 3$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  的最小值是\_\_\_\_\_。

【答案】  $-\frac{9}{8}$

【解析】因  $|2\vec{a} - \vec{b}| \leq 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \leq 9 + 4\vec{a}\vec{b}$ , 而  $4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \geq 4|\vec{a}||\vec{b}| \geq -4\vec{a}\vec{b}$ , 故

$9 + 4\vec{a}\vec{b} \geq -4\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} \geq -\frac{9}{8}$ 。

【考点定位】考查平面向量的数量积及应用。

(15) 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对边的长分别为  $a, b, c$ , 则下列命题正确的是\_\_\_\_\_ (写出所有正确命题的编号)。

①若  $ab > c^2$ , 则  $C < \frac{\pi}{3}$       ②若  $a + b > 2c$ , 则  $C < \frac{\pi}{3}$

③若  $a^3 + b^3 = c^3$ , 则  $C > \frac{\pi}{2}$       ④若  $(a + b)c = 2ab$ , 则  $C > \frac{\pi}{2}$

⑤若  $(a^2 + b^2)c^2 = 2a^2b^2$ , 则  $C > \frac{\pi}{3}$

【答案】 ①②③

【解析】①  $ab > c^2 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > \frac{2ab - ab}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow C < \frac{\pi}{3}$ ;

②  $a + b > 2c \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > \frac{4(a^2 + b^2) - (a + b)^2}{8ab} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow C < \frac{\pi}{3}$ ;

③当  $C \geq \frac{\pi}{2}$  时,  $c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow c^3 \geq a^2c + b^2c > a^3 + b^3$  与  $a^3 + b^3 = c^3$  矛盾;

④取  $a = b = 2, c = 1$  满足  $(a + b)c < 2ab$  得:  $C < \frac{\pi}{2}$ ;

⑤取  $a = b = 2, c = 1$  满足  $(a^2 + b^2)c^2 < 2a^2b^2$  得:  $C < \frac{\pi}{3}$ ;

【考点定位】考查解三角形即余弦定理。

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演

算步骤。解答写在答题卡上的指定区域内。

(16) (本小题满分 12 分) 设函数  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin^2 x$ ,

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 设函数  $g(x)$  对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $g(x + \frac{\pi}{2}) = g(x)$ , 且当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,

$g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$ , 求  $g(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的解析式。

**【解析】**

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x$$

(I) 函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(II) 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $g(x) = \frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$

当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  时,  $(x + \frac{\pi}{2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$   $g(x) = g(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \sin 2x$ ,

当  $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  时,  $(x + \pi) \in [0, \frac{\pi}{2}]$   $g(x) = g(x + \pi) = \frac{1}{2} \sin 2(x + \pi) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,

则函数  $g(x)$  在  $[-\pi, 0]$  上的解析式为  $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sin 2x, & (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0) \\ \frac{1}{2} \sin 2x, & (-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ .

**【考点定位】** 考查三角函数的性质和三角表示。

(17) (本小题满分 12 分)

某单位招聘面试, 每次从试题库随机调用一道试题, 若调用的是  $A$  类型试题, 则使用后该试题回库, 并增补一道  $A$  类试题和一道  $B$  类型试题入库, 此次调题工作结束; 若调用的是  $B$  类型试题, 则使用后该试题回库, 此次调题工作结束。试题库中现共有  $n + m$  道试题, 其中有  $n$  道  $A$  类型试题和  $m$  道  $B$  类型试题, 以  $X$  表示两次调题工作完成后, 试题库中  $A$  类试题的数量。

(I) 求  $X = n + 2$  的概率;

(II) 设  $m = n$ , 求  $X$  的分布列和均值 (数学期望)。

**【解析】** (I)  $X = n + 2$  表示两次调题均为  $A$  类型试题, 由事件的独立性可得所求概率为

$$\frac{n}{m+n} \times \frac{n+1}{m+n+2}.$$

(II)  $m = n$  时, 每次调用的是  $A$  类型试题的概率为  $p = \frac{1}{2}$

随机变量  $X$  可取  $n, n+1, n+2$ , 则

$$P(X=n) = (1-p)^2 = \frac{1}{4}, \quad P(X=n+1) = 2p(1-p) = \frac{1}{2}, \quad P(X=n+2) = p^2 = \frac{1}{4}$$

$X$  的分布列如下:

$X$	$n$	$n+1$	$n+2$
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

所以  $EX = n \times \frac{1}{4} + (n+1) \times \frac{1}{2} + (n+2) \times \frac{1}{4} = n+1$ .

答: (I)  $X=n+2$  的概率为  $\frac{n}{m+n} \times \frac{n+1}{m+n+2}$ ; (II)  $X$  的均值为  $n+1$ .

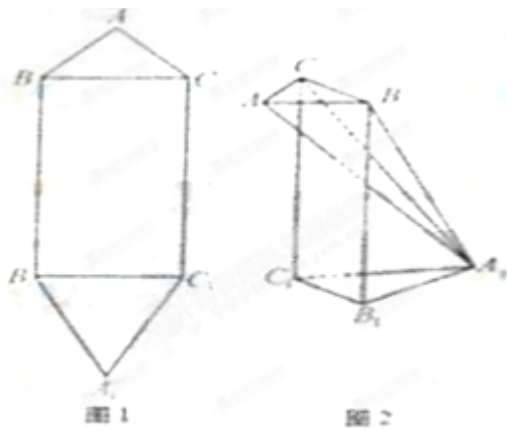
【考点定位】考查概率分布列和数学期望。

(18) (本小题满分 12 分)

平面图形  $ABB_1A_1C_1C$  如图 1 所示, 其中  $BB_1C_1C$  是矩形,  $BC=2, BB_1=4$ ,

$AB=AC=\sqrt{2}$ ,  $A_1B_1=A_1C_1=\sqrt{5}$ 。现将该平面图形分别沿  $BC$  和  $B_1C_1$  折叠, 使  $\triangle ABC$

与  $\triangle A_1B_1C_1$  所在平面都与平面  $BB_1C_1C$  垂直, 再分别连接  $AA_1, BA_1, CA_1$ , 得到如图 2 所示的空间图形, 对此空间图形解答下列问题。



第(18)题图

(I) 证明:  $AA_1 \perp BC$ ; (II) 求  $AA_1$  的长; (III) 求二面角  $A-BC-A_1$  的余弦值。

【解析】(I) 取  $BC, B_1C_1$  的中点为点  $O, O_1$ , 连接  $AO, OO_1, A_1O, A_1O_1$

则  $AB=AC \Rightarrow AO \perp BC$ , 面  $ABC \perp$  面  $BB_1C_1C \Rightarrow AO \perp$  面  $BB_1C_1C$

同理:  $A_1O_1 \perp$  面  $BB_1C_1C$  得:  $AO \parallel A_1O_1 \Rightarrow A, O, A_1, O_1$  共面,

又  $OO_1 \perp BC, OO_1 \cap AO = O \Rightarrow BC \perp$  面  $AOO_1A_1 \Rightarrow AA_1 \perp BC$

(II) 延长  $A_1O_1$  到  $D$ , 使  $O_1D = OA$  得:  $O_1D \parallel OA \Rightarrow AD \parallel OO_1$

$OO_1 \perp BC$ , 面  $A_1B_1C_1 \perp$  面  $BB_1C_1C \Rightarrow OO_1 \perp$  面  $A_1B_1C_1 \Rightarrow AD \perp$  面  $A_1B_1C_1$

$$AA_1 = \sqrt{AD^2 + DA^2} = \sqrt{4^2 + (2+1)^2} = 5$$

(III)  $AO \perp BC, A_1O \perp BC \Rightarrow \angle AOA_1$  是二面角  $A-BC-A_1$  的平面角,

在  $Rt\triangle OO_1A_1$  中,  $A_1O = \sqrt{OO_1^2 + A_1O_1^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

在  $Rt\triangle OAA_1$  中,  $\cos \angle AOA_1 = \frac{AO^2 + A_1O^2 - AA_1^2}{2AO \times A_1O} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

得: 二面角  $A-BC-A_1$  的余弦值为  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

【考点定位】考查立体几何的垂直的证明, 距离和夹角的计算。

19. (本小题满分 13 分)

设函数  $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b$  ( $a > 0$ )

(I) 求  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内的最小值;

(II) 设曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = \frac{3}{2}x$ , 求  $a, b$  的值。

【解析】(I) 设  $t = e^x$  ( $t \geq 1$ ); 则  $y = at + \frac{1}{at} + b \Rightarrow y' = a - \frac{1}{at^2} = \frac{a^2t^2 - 1}{at^2}$ , 令  $y' = 0$ ,

则  $t = \frac{1}{a}$ ,

① 当  $a \geq 1$  时,  $y' > 0 \Rightarrow y = at + \frac{1}{at} + b$  在  $t \geq 1$  上是增函数, 得: 当  $t = 1$  ( $x = 0$ ) 时,  $f(x)$

的最小值为  $a + \frac{1}{a} + b$ ;

② 当  $0 < a < 1$  时,  $y = at + \frac{1}{at} + b \geq 2 + b$ , 当且仅当  $at = 1$  ( $t = e^x = \frac{1}{a}, x = -\ln a$ ) 时,  $f(x)$

的最小值为  $b + 2$ ,

故  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内的最小值为  $f(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{a} + b, & a \geq 1 \\ b + 2, & 0 < a < 1 \end{cases}$ .

(II)  $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b \Rightarrow f'(x) = ae^x - \frac{1}{ae^x}$ ,

则  $t = \frac{1}{a}$ ,

①当  $a \geq 1$  时,  $y' > 0 \Rightarrow y = at + \frac{1}{at} + b$  在  $t \geq 1$  上是增函数, 得: 当  $t=1(x=0)$  时,  $f(x)$  的最小值为  $a + \frac{1}{a} + b$ ;

②当  $0 < a < 1$  时,  $y = at + \frac{1}{at} + b \geq 2 + b$ , 当且仅当  $at=1(t = e^x = \frac{1}{a}, x = -\ln a)$  时,  $f(x)$  的最小值为  $b+2$ ,

故  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内的最小值为  $f(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{a} + b, a \geq 1 \\ b + 2, 0 < a < 1 \end{cases}$ .

(II)  $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b \Rightarrow f'(x) = ae^x - \frac{1}{ae^x}$ ,

由题意得:  $\begin{cases} f(2) = 3 \\ f'(2) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^2 + \frac{1}{ae^2} + b = 3 \\ ae^2 - \frac{1}{ae^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{e^2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

【考点定位】考查导数的应用。

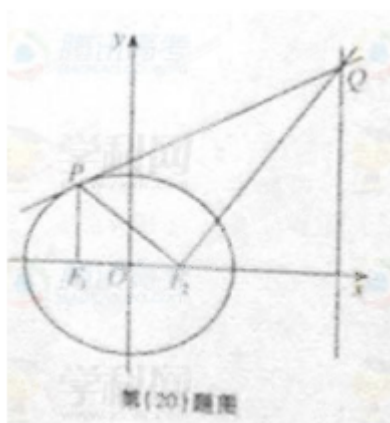
20. (本小题满分13分)

如图, 点  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点, 经过  $F_1$

做  $x$  轴的垂线交椭圆  $C$  的上半部分于点  $P$ , 过点  $F_2$  作直线  $PF_2$  垂线交直线  $x = \frac{a^2}{c}$  于点  $Q$ .

(I) 如果点  $Q$  的坐标为  $(4, 4)$ , 求此时椭圆  $C$  的方程;

(II) 证明: 直线  $PQ$  与椭圆  $C$  只有一个交点。



【解析】(I) 点  $P(-c, y_1) (y_1 > 0)$  代入  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  得:  $y_1 = \frac{b^2}{a}$ ,

$$PF_1 \perp QF_2 \Leftrightarrow \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{-c - c} \times \frac{4 - 0}{4 - c} = -1 \quad \text{①}$$

$$\text{又 } \frac{a^2}{c} = 4 \quad \text{②} \quad c^2 = a^2 - b^2 (a, b, c > 0) \quad \text{③}$$

由①②③得:  $a = 2, c = 1, b = \sqrt{3}$  既椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(II) 设  $Q(\frac{a^2}{c}, y_2)$ ; 则  $PF_1 \perp QF_2 \Leftrightarrow \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{-c - c} \times \frac{y_2 - 0}{\frac{a^2}{c} - c} = -1 \Leftrightarrow y_2 = 2a$

$$\text{得: } k_{PQ} = \frac{2a - \frac{b^2}{a}}{\frac{a^2}{c} + c} = \frac{c}{a} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \Rightarrow y' = \frac{-\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}}$$

过点  $P$  与椭圆  $C$  相切的直线斜率  $k = y'|_{x=-c} = \frac{c}{a} = k_{PQ}$

得: 直线  $PQ$  与椭圆  $C$  只有一个交点。

【考点定位】考查椭圆方程、直线与椭圆的位置关系。

21. (本小题满分 13 分)

数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 0, x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + c (n \in N_+)$

(I) 证明:  $\{x_n\}$  是从递减数列的充分必要条件是  $c < 0$ ;

(II) 求  $c$  的取值范围, 使  $\{x_n\}$  是递增数列。

【解析】(I) 证明: 必要条件:

当  $c < 0$  时,  $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + c < x_n \Rightarrow$  数列  $\{x_n\}$  是单调递减数列

充分条件:

数列  $\{x_n\}$  是单调递减数列  $\Rightarrow x_1 > x_2 = -x_1^2 + x_1 + c \Leftrightarrow c < x_1^2 = 0$

得: 数列  $\{x_n\}$  是单调递减数列的充分必要条件是  $c < 0$

(II) 由 (I) 得:  $c \geq 0$ , ①当  $c=0$  时,  $a_n = a_1 = 0$ , 不合题意;

②当  $c > 0$  时,  $x_2 = c > x_1, x_3 = -c^2 + 2c > x_2 = c \Leftrightarrow 0 < c < 1$ ,

$$x_{n+1} - x_n = c - x_n^2 > 0 \Leftrightarrow x_n^2 < c < 1 \Leftrightarrow 0 = x_1 \leq x_n < \sqrt{c}$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -(x_{n+1}^2 - x_n^2) + (x_{n+1} - x_n) = -(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n - 1)$$

当  $c \leq \frac{1}{4}$  时,  $x_n < \sqrt{c} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_n + x_{n+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow x_{n+2} - x_{n+1}$  与  $x_{n+1} - x_n$  同号,

由  $x_2 - x_1 = c > 0 \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n^2 + x_n + c) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{c}$$

当  $c > \frac{1}{4}$  时, 存在  $N$ , 使  $x_N > \frac{1}{2} \Rightarrow x_N + x_{N+1} > 1 \Rightarrow x_{N+2} - x_{N+1}$  与  $x_{N+1} - x_N$  异号

与数列  $\{x_n\}$  是单调递减数列矛盾。

得: 当  $0 < c \leq \frac{1}{4}$  时, 数列  $\{x_n\}$  是单调递增数列

【考点定位】考查数列的证明。