

## 2024 年普通高等学校招生全国统一考试

### 全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $z = 5 + i$ ，则  $i(\bar{z} + z) =$  ( )

- A.  $10i$                       B.  $2i$                       C.  $10$                       D.  $-2$

【答案】A

【解析】

【分析】结合共轭复数与复数的基本运算直接求解。

【详解】由  $z = 5 + i \Rightarrow \bar{z} = 5 - i, z + \bar{z} = 10$ ，则  $i(\bar{z} + z) = 10i$ 。

故选：A

2. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ,  $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，则  $\complement_A(A \cap B) =$  ( )

- A.  $\{1, 4, 9\}$                       B.  $\{3, 4, 9\}$                       C.  $\{1, 2, 3\}$                       D.  $\{2, 3, 5\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合 B 的定义求出 B，结合交集与补集运算即可求解。

【详解】因为  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ,  $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，所以  $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$ ，

则  $A \cap B = \{1, 4, 9\}$ ， $\complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$

故选：D

3. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = x-5y$  的最小值为 ( )

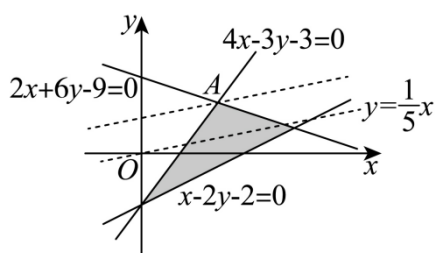
- A. 5                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. -2                      D.  $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用  $z$  的几何意义计算即可得.

【详解】实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，作出可行域如图：



由  $z = x - 5y$  可得  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ ，

即  $z$  的几何意义为  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$  的截距的  $-\frac{1}{5}$ ，

则该直线截距取最大值时， $z$  有最小值，

此时直线  $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$  过点 A，

联立  $\begin{cases} 4x-3y-3=0 \\ 2x+6y-9=0 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ，即  $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ，

则  $z_{\min} = \frac{3}{2} - 5 \times 1 = -\frac{7}{2}$ 。

故选：D.

4. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $S_5 = S_{10}$ ， $a_5 = 1$ ，则  $a_1 =$  ( )

- A. -2                      B.  $\frac{7}{3}$                       C. 1                      D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由  $S_5 = S_{10}$  结合等差中项的性质可得  $a_8 = 0$ ，即可计算出公差，即可得  $a_1$  的值.

【详解】由  $S_{10} - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a_8 = 0$ ，则  $a_8 = 0$ ，

则等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d = \frac{a_8 - a_5}{3} = -\frac{1}{3}$ , 故  $a_1 = a_5 - 4d = 1 - 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$ .

故选: B.

5. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的上、下焦点分别为  $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ , 点  $P(-6, 4)$  在该双曲线上, 则该双曲线的离心率为 ( )

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D.  $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距  $2c$ , 结合双曲线定义计算可得  $2a$ , 即可得离心率.

【详解】由题意,  $F_1(0, -4), F_2(0, 4), P(-6, 4)$ ,

$$\text{则 } |F_1F_2| = 2c = 8, \quad |PF_1| = \sqrt{6^2 + (4+4)^2} = 10, \quad |PF_2| = \sqrt{6^2 + (4-4)^2} = 6,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4, \quad \text{则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2.$$

故选: C.

6. 设函数  $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $(0, 1)$  处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 ( )

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】借助导数的几何意义计算可得其在点  $(0, 1)$  处的切线方程, 即可得其与坐标轴交点坐标, 即可得其面积.

$$\text{【详解】 } f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - (e^x + 2\sin x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\text{则 } f'(0) = \frac{(e^0 + 2\cos 0)(1+0) - (e^0 + 2\sin 0) \times 0}{(1+0)^2} = 3,$$

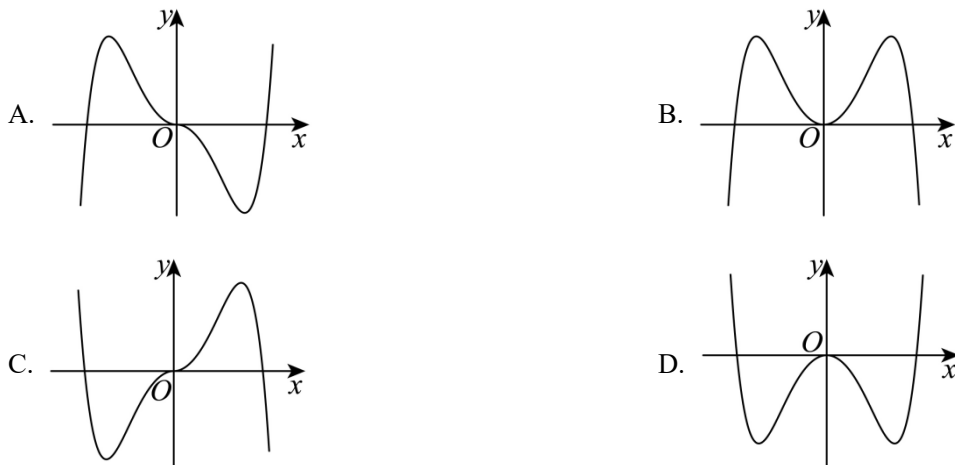
即该切线方程为  $y - 1 = 3x$ , 即  $y = 3x + 1$ ,

令  $x = 0$ , 则  $y = 1$ , 令  $y = 0$ , 则  $x = -\frac{1}{3}$ ,

故该切线与两坐标轴所围成的三角形面积  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6}$ .

故选：A.

7. 函数  $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$  在区间  $[-2.8, 2.8]$  的大致图像为 ( )



【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入  $x=1$  可得  $f(1) > 0$ ，可排除 D.

【详解】 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x)\sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x = f(x)$ ,

又函数定义域为  $[-2.8, 2.8]$ ，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

又  $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0$ ,

故可排除 D.

故选：B.

8. 已知  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ，则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $2\sqrt{3}+1$                       B.  $2\sqrt{3}-1$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$  弦化切求得  $\tan \alpha$ ，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ,

所以  $\frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$ ,  $\Rightarrow \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

所以  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$ ,

故选: B.

9. 已知向量  $\vec{a} = (x+1, x)$ ,  $\vec{b} = (x, 2)$ , 则 ( )

A. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的必要条件

B. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的必要条件

C. “ $x = 0$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分条件

D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的充分条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量垂直和平行的坐标表示即可得到方程, 解出即可.

【详解】对 A, 当  $\vec{a} \perp \vec{b}$  时, 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,

所以  $x \cdot (x+1) + 2x = 0$ , 解得  $x = 0$  或  $-3$ , 即必要性不成立, 故 A 错误;

对 C, 当  $x = 0$  时,  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (0, 2)$ , 故  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,

所以  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 即充分性成立, 故 C 正确;

对 B, 当  $\vec{a} // \vec{b}$  时, 则  $2(x+1) = x^2$ , 解得  $x = 1 \pm \sqrt{3}$ , 即必要性不成立, 故 B 错误;

对 D, 当  $x = -1 + \sqrt{3}$  时, 不满足  $2(x+1) = x^2$ , 所以  $\vec{a} // \vec{b}$  不成立, 即充分性不立, 故 D 错误.

故选: C.

10. 设  $\alpha$ 、 $\beta$  是两个平面,  $m$ 、 $n$  是两条直线, 且  $\alpha \cap \beta = m$ . 下列四个命题:

①若  $m // n$ , 则  $n // \alpha$  或  $n // \beta$

②若  $m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha, n \perp \beta$

③若  $n // \alpha$ , 且  $n // \beta$ , 则  $m // n$

④若  $n$  与  $\alpha$  和  $\beta$  所成的角相等, 则  $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ( )

A. ①③

B. ②④

C. ①②③

D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当  $n \subset \alpha$ ，因为  $m // n$ ， $m \subset \beta$ ，则  $n // \beta$ ，

当  $n \subset \beta$ ，因为  $m // n$ ， $m \subset \alpha$ ，则  $n // \alpha$ ，

当  $n$  既不在  $\alpha$  也不在  $\beta$  内，因为  $m // n$ ， $m \subset \alpha, m \subset \beta$ ，则  $n // \alpha$  且  $n // \beta$ ，故①正确；

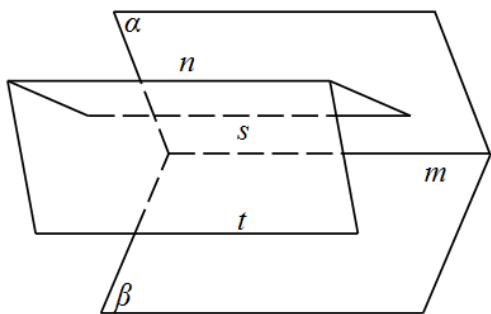
对②，若  $m \perp n$ ，则  $n$  与  $\alpha, \beta$  不一定垂直，故②错误；

对③，过直线  $n$  分别作两平面与  $\alpha, \beta$  分别相交于直线  $s$  和直线  $t$ ，

因为  $n // \alpha$ ，过直线  $n$  的平面与平面  $\alpha$  的交线为直线  $s$ ，则根据线面平行的性质定理知  $n // s$ ，

同理可得  $n // t$ ，则  $s // t$ ，因为  $s \subset$  平面  $\beta$ ， $t \subset$  平面  $\beta$ ，则  $s //$  平面  $\beta$ ，

因为  $s \subset$  平面  $\alpha$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则  $s // m$ ，又因为  $n // s$ ，则  $m // n$ ，故③正确；



对④，若  $\alpha \cap \beta = m$ ， $n$  与  $\alpha$  和  $\beta$  所成的角相等，如果  $n // \alpha, n // \beta$ ，则  $m // n$ ，故④错误；

综上所述只有①③正确，

故选：A.

11. 在  $\triangle ABC$  中内角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ ，若  $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则  $\sin A + \sin C =$  ( )

A.  $\frac{3}{2}$

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得  $\sin A \sin C = \frac{1}{3}$ ，再利用余弦定理有  $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ ，再利用正弦定理得到  $\sin^2 A + \sin^2 C$  的值，最后代入计算即可.

【详解】因为  $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则由正弦定理得  $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$ .

由余弦定理可得:  $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$ ,

即:  $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ , 根据正弦定理得  $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$ ,

所以  $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}$ ,

因为  $A, C$  为三角形内角, 则  $\sin A + \sin C > 0$ , 则  $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

故选: C.

12. 已知  $b$  是  $a, c$  的等差中项, 直线  $ax + by + c = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最小值为 ( )

A. 2

B. 3

C. 4

D.  $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合等差数列性质将  $c$  代换, 求出直线恒过的定点, 采用数形结合法即可求解.

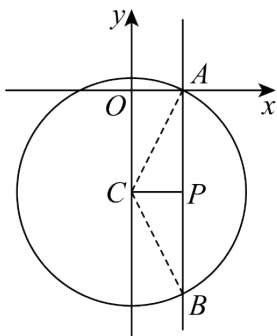
【详解】因为  $a, b, c$  成等差数列, 所以  $2b = a + c$ ,  $c = 2b - a$ , 代入直线方程  $ax + by + c = 0$  得

$$ax + by + 2b - a = 0, \text{ 即 } a(x-1) + b(y+2) = 0, \text{ 令 } \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases},$$

故直线恒过  $(1, -2)$ , 设  $P(1, -2)$ , 圆化为标准方程得:  $C: x^2 + (y+2)^2 = 5$ ,

设圆心为  $C$ , 画出直线与圆的图形, 由图可知, 当  $PC \perp AB$  时,  $|AB|$  最小,

$$|PC|=1, |AC|=|r|=\sqrt{5}, \text{ 此时 } |AB|=2|AP|=2\sqrt{AC^2 - PC^2} = 2\sqrt{5-1} = 4.$$



故选: C

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$  的展开式中, 各项系数的最大值是\_\_\_\_\_.

【答案】5

【解析】

【分析】先设展开式中第  $r+1$  项系数最大，则根据通项公式有 
$$\begin{cases} C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$$
，进而求出  $r$  即可求解。

【详解】由题展开式通项公式为  $T_{r+1} = C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} x^r$ ， $0 \leq r \leq 10$  且  $r \in \mathbf{Z}$ ，

设展开式中第  $r+1$  项系数最大，则 
$$\begin{cases} C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$$
，

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq \frac{29}{4} \\ r \leq \frac{33}{4} \end{cases}$$
，即  $\frac{29}{4} \leq r \leq \frac{33}{4}$ ，又  $r \in \mathbf{Z}$ ，故  $r = 8$ ，

所以展开式中系数最大的项是第 9 项，且该项系数为  $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$ 。

故答案为：5。

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为  $r_1$  和  $r_2$ ，母线长分别为  $2(r_2 - r_1)$  和  $3(r_2 - r_1)$ ，则两个圆台的

的体积之比  $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】先根据已知条件和圆台结构特征分别求出两圆台的高，再根据圆台的体积公式直接代入计算即可得解。

【详解】由题可得两个圆台的高分别为  $h_{\text{甲}} = \sqrt{[2(r_1 - r_2)]^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{3}(r_1 - r_2)$ ，

$h_{\text{乙}} = \sqrt{[3(r_1 - r_2)]^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{2}(r_1 - r_2)$ ，

$$\text{所以 } \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}(S_2 + S_1 + \sqrt{S_2 S_1})h_{\text{甲}}}{\frac{1}{3}(S_2 + S_1 + \sqrt{S_2 S_1})h_{\text{乙}}} = \frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{3}(r_1 - r_2)}{2\sqrt{2}(r_1 - r_2)} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

故答案为:  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

15. 已知  $a > 1$ ,  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 64

【解析】

【分析】 将  $\log_8 a, \log_a 4$  利用换底公式转化成  $\log_2 a$  来表示即可求解.

【详解】 由题  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$ , 整理得  $(\log_2 a)^2 - 5\log_2 a - 6 = 0$ ,

$\Rightarrow \log_2 a = -1$  或  $\log_2 a = 6$ , 又  $a > 1$ ,

所以  $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$ , 故  $a = 2^6 = 64$

故答案为: 64.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中不放回地随机抽取 3 次, 每次取 1 个球. 记  $m$  为前两次取出的球上数字的平均值,  $n$  为取出的三个球上数字的平均值, 则  $m$  与  $n$  差的绝对值不超过  $\frac{1}{2}$  的概率是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{7}{15}$

【解析】

【分析】 根据排列可求基本事件的总数, 设前两个球的号码为  $a, b$ , 第三个球的号码为  $c$ , 则  $a + b - 3 \leq 2c \leq a + b + 3$ , 就  $c$  的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.

【详解】 从 6 个不同的球中不放回地抽取 3 次, 共有  $A_6^3 = 120$  种,

设前两个球的号码为  $a, b$ , 第三个球的号码为  $c$ , 则  $\left| \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$ ,

故  $|2c - (a+b)| \leq 3$ , 故  $-3 \leq 2c - (a+b) \leq 3$ ,

故  $a+b-3 \leq 2c \leq a+b+3$ ,

若  $c=1$ , 则  $a+b \leq 5$ , 则  $(a, b)$  为:  $(2, 3), (3, 2)$ , 故有 2 种,

若  $c=2$ ，则  $1 \leq a+b \leq 7$ ，则  $(a,b)$  为：  $(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,4)$ ，

$(3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4,3)$ ，故有 10 种，

当  $c=3$ ，则  $3 \leq a+b \leq 9$ ，则  $(a,b)$  为：

$(1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (4,5)$ ，

$(2,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4,2), (5,2), (6,2), (5,4)$ ，

故有 16 种，

当  $c=4$ ，则  $5 \leq a+b \leq 11$ ，同理有 16 种，

当  $c=5$ ，则  $7 \leq a+b \leq 13$ ，同理有 10 种，

当  $c=6$ ，则  $9 \leq a+b \leq 15$ ，同理有 2 种，

共  $m$  与  $n$  的差的绝对值不超过  $\frac{1}{2}$  时不同的抽取方法总数为  $2(2+10+16) = 56$ ，

故所求概率为  $\frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ 。

故答案为：  $\frac{7}{15}$

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17 题~第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**(一) 必考题：共 60 分。**

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		

乙车间		
-----	--	--

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率  $p = 0.5$ ，设  $\bar{p}$  为升级改造后抽取的  $n$  件产品的优级品率. 如果

$\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为

为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（ $\sqrt{150} \approx 12.247$ ）

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

**【答案】** (1) 答案见详解

(2) 答案见详解

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据题中数据完善列联表，计算  $K^2$ ，并与临界值对比分析；

(2) 用频率估计概率可得  $\bar{p} = 0.64$ ，根据题意计算  $p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，结合题意分析判断.

**【小问 1 详解】**

根据题意可得列联表：

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

可得 
$$K^2 = \frac{150(26 \times 30 - 24 \times 70)^2}{50 \times 100 \times 96 \times 54} = \frac{75}{16} = 4.6875,$$

因为  $3.841 < 4.6875 < 6.635$ ,

所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异，没有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

**【小问2详解】**

由题意可知：生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150} = 0.64$ ,

用频率估计概率可得 $\bar{p} = 0.64$ ,

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$ ,

$$\text{则 } p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.5 + 1.65\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{150}} \approx 0.5 + 1.65 \times \frac{0.5}{12.247} \approx 0.568,$$

$$\text{可知 } \bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

所以可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

18. 记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，且 $4S_n = 3a_n + 4$ .

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ .

**【答案】**(1)  $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

(2)  $T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1$

**【解析】**

**【分析】**(1) 利用退位法可求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 利用错位相减法可求 $T_n$ .

**【小问1详解】**

当 $n=1$ 时， $4S_1 = 4a_1 = 3a_1 + 4$ ，解得 $a_1 = 4$ .

当 $n \geq 2$ 时， $4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4$ ，所以 $4S_n - 4S_{n-1} = 4a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$ 即 $a_n = -3a_{n-1}$ ,

而 $a_1 = 4 \neq 0$ ，故 $a_n \neq 0$ ，故 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -3$ ,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以4为首项，-3为公比的等比数列，

所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$ .

【小问 2 详解】

$$b_n = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 4 \cdot (-3)^{n-1} = 4n \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = 4 \cdot 3^0 + 8 \cdot 3^1 + 12 \cdot 3^2 + \cdots + 4n \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{故 } 3T_n = 4 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + \cdots + 4n \cdot 3^n$$

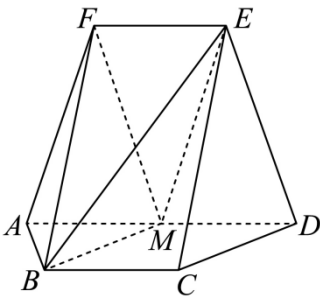
$$\text{所以 } -2T_n = 4 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + 4 \cdot 3^{n-1} - 4n \cdot 3^n$$

$$= 4 + 4 \cdot \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - 4n \cdot 3^n = 4 + 2 \cdot 3 \cdot (3^{n-1} - 1) - 4n \cdot 3^n$$

$$= (2 - 4n) \cdot 3^n - 2,$$

$$\therefore T_n = (2n - 1) \cdot 3^n + 1.$$

19. 如图, 在以  $A, B, C, D, E, F$  为顶点的五面体中, 四边形  $ABCD$  与四边形  $ADEF$  均为等腰梯形,  $BC \parallel AD, EF \parallel AD$ ,  $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ,  $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ,  $M$  为  $AD$  的中点.



(1) 证明:  $BM \parallel$  平面  $CDE$ ;

(2) 求二面角  $F - BM - E$  的正弦值.

【答案】(1) 证明见详解;

(2)  $\frac{4\sqrt{3}}{13}$

【解析】

【分析】(1) 结合已知易证四边形  $BCDM$  为平行四边形, 可证  $BM \parallel CD$ , 进而得证;

(2) 作  $BO \perp AD$  交  $AD$  于  $O$ , 连接  $OF$ , 易证  $OB, OD, OF$  三垂直, 采用建系法结合二面角夹角余弦公式即可求解.

【小问 1 详解】

因为  $BC \parallel AD, EF = 2, AD = 4, M$  为  $AD$  的中点, 所以  $BC \parallel MD, BC = MD$ ,

四边形  $BCDM$  为平行四边形, 所以  $BM \parallel CD$ , 又因为  $BM \not\subset$  平面  $CDE$ ,

$CD \subset$  平面  $CDE$ , 所以  $BM \parallel$  平面  $CDE$ ;

【小问 2 详解】

如图所示, 作  $BO \perp AD$  交  $AD$  于  $O$ , 连接  $OF$ ,

因为四边形  $ABCD$  为等腰梯形,  $BC \parallel AD, AD = 4, AB = BC = 2$ , 所以  $CD = 2$ ,

结合 (1)  $BCDM$  为平行四边形, 可得  $BM = CD = 2$ , 又  $AM = 2$ ,

所以  $\triangle ABM$  为等边三角形,  $O$  为  $AM$  中点, 所以  $OB = \sqrt{3}$ ,

又因为四边形  $ADEF$  为等腰梯形,  $M$  为  $AD$  中点, 所以  $EF = MD, EF \parallel MD$ ,

四边形  $EFMD$  为平行四边形,  $FM = ED = AF$ ,

所以  $\triangle AFM$  为等腰三角形,  $\triangle ABM$  与  $\triangle AFM$  底边上中点  $O$  重合,  $OF \perp AM$ ,

$$OF = \sqrt{AF^2 - AO^2} = 3,$$

因为  $OB^2 + OF^2 = BF^2$ , 所以  $OB \perp OF$ , 所以  $OB, OD, OF$  互相垂直,

以  $OB$  方向为  $x$  轴,  $OD$  方向为  $y$  轴,  $OF$  方向为  $z$  轴, 建立  $O-xyz$  空间直角坐标系,

$$F(0, 0, 3), B(\sqrt{3}, 0, 0), M(0, 1, 0), E(0, 2, 3), \overline{BM} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overline{BF} = (-\sqrt{3}, 0, 3),$$

$$\overline{BE} = (-\sqrt{3}, 2, 3), \text{ 设平面 } BFM \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (x_1, y_1, z_1),$$

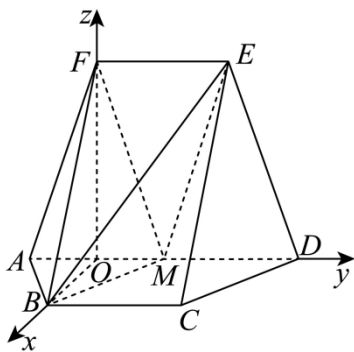
平面  $EMB$  的法向量为  $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overline{BM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overline{BF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ -\sqrt{3}x_1 + 3z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 得 } y_1 = 3, z_1 = 1, \text{ 即 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 3, 1),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{BM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{BE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ -\sqrt{3}x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_2 = \sqrt{3}, \text{ 得 } y_2 = 3, z_2 = -1,$$

$$\text{即 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 3, -1), \cos \vec{m}, \vec{n} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{11}{13}, \text{ 则 } \sin \vec{m}, \vec{n} = \frac{4\sqrt{3}}{13},$$

故二面角  $F-BM-E$  的正弦值为  $\frac{4\sqrt{3}}{13}$ .



20. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 点  $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在  $C$  上, 且  $MF \perp x$  轴.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $P(4,0)$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $N$  为线段  $FP$  的中点, 直线  $NB$  交直线  $MF$  于点  $Q$ , 证明:  $AQ \perp y$  轴.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 设  $F(c, 0)$ , 根据  $M$  的坐标及  $MF \perp x$  轴可求基本量, 故可求椭圆方程.

(2) 设  $AB: y = k(x-4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 联立直线方程和椭圆方程, 用  $A, B$  的坐标表示  $y_1 - y_Q$ , 结合韦达定理化简前者可得  $y_1 - y_Q = 0$ , 故可证  $AQ \perp y$  轴.

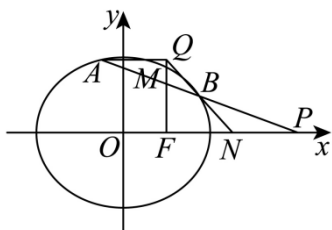
【小问 1 详解】

设  $F(c, 0)$ , 由题设有  $c=1$  且  $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $\frac{a^2-1}{a} = \frac{3}{2}$ , 故  $a=2$ , 故  $b = \sqrt{3}$ ,

故椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

【小问 2 详解】

直线  $AB$  的斜率必定存在, 设  $AB: y = k(x-4)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,



$$\text{由} \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = k(x-4) \end{cases} \text{ 可得 } (3+4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{故 } \Delta = 1024k^4 - 4(3+4k^2)(64k^2 - 12) > 0, \text{ 故 } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3+4k^2},$$

$$\text{而 } N\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 故直线 } BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 故 } y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5},$$

$$\text{所以 } y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5} = \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5} = k \frac{2 \times \frac{64k^2 - 12}{3+4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3+4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{2x_2 - 5} = 0,$$

故  $y_1 = y_Q$ , 即  $AQ \perp y$  轴.

**【点睛】** 方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于  $x$  (或  $y$ ) 的一元二次方程, 注意  $\Delta$  的判断;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  (或  $y_1 + y_2$ 、 $y_1y_2$ ) 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

21. 已知函数  $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$ .

- (1) 当  $a = -2$  时, 求  $f(x)$  的极值;
- (2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

**【答案】** (1) 极小值为 0, 无极大值.

$$(2) a \leq -\frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 求出函数的导数，根据导数的单调性和零点可求函数的极值.

(2) 求出函数的二阶导数，就  $a \leq -\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 、 $a \geq 0$  分类讨论后可得参数的取值范围.

【小问 1 详解】

当  $a = -2$  时， $f(x) = (1+2x)\ln(1+x) - x$ ,

$$\text{故 } f'(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1+2x}{1+x} - 1 = 2\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1,$$

因为  $y = 2\ln(1+x)$ ,  $y = -\frac{1}{1+x} + 1$  在  $(-1, +\infty)$  上为增函数,

故  $f'(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上为增函数，而  $f'(0) = 0$ ,

故当  $-1 < x < 0$  时， $f'(x) < 0$ ，当  $x > 0$  时， $f'(x) > 0$ ,

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处取极小值且极小值为  $f(0) = 0$ ，无极大值.

【小问 2 详解】

$$f'(x) = -a\ln(1+x) + \frac{1-ax}{1+x} - 1 = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0,$$

$$\text{设 } s(x) = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0,$$

$$\text{则 } s'(x) = \frac{-a}{x+1} - \frac{(a+1)}{(1+x)^2} = -\frac{a(x+1)+a+1}{(1+x)^2} = -\frac{ax+2a+1}{(1+x)^2},$$

当  $a \leq -\frac{1}{2}$  时， $s'(x) > 0$ ，故  $s(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数，

故  $s(x) > s(0) = 0$ ，即  $f'(x) > 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数，故  $f(x) \geq f(0) = 0$ .

当  $-\frac{1}{2} < a < 0$  时，当  $0 < x < -\frac{2a+1}{a}$  时， $s'(x) < 0$ ，

故  $s(x)$  在  $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$  上为减函数，故在  $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$  上  $s(x) < s(0)$ ，

即在  $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$  上  $f'(x) < 0$  即  $f(x)$  为减函数,

故在  $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$  上  $f(x) < f(0) = 0$ , 不合题意, 舍.

当  $a \geq 0$ , 此时  $s'(x) < 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

同理可得在  $(0, +\infty)$  上  $f(x) < f(0) = 0$  恒成立, 不合题意, 舍;

综上,  $a \leq -\frac{1}{2}$ .

**【点睛】**思路点睛: 导数背景下不等式恒成立问题, 往往需要利用导数判断函数单调性, 有时还需要对导数进一步利用导数研究其符号特征, 处理此类问题时注意利用范围端点的性质来确定如何分类.

**(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.**

**[选修 4-4: 坐标系与参数方程]**

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ .

(1) 写出  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l: \begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若  $C$  与  $l$  相交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = 2$ , 求  $a$  的值.

**【答案】**(1)  $y^2 = 2x + 1$

(2)  $a = \frac{3}{4}$

**【解析】**

**【分析】**(1) 根据  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$  可得  $C$  的直角方程.

(2) 将直线的新的参数方程代入  $C$  的直角方程,

法 1: 结合参数  $s$  的几何意义可得关于  $a$  的方程, 从而可求参数  $a$  的值;

法 2: 将直线的直角方程与曲线的直角方程联立, 结合弦长公式可求  $a$  的值.

**【小问 1 详解】**

由  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ , 将  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$  代入  $\rho = \rho \cos \theta + 1$ ,

故可得  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$ ，两边平方后可得曲线的直角坐标方程为  $y^2 = 2x + 1$ 。

**【小问 2 详解】**

对于直线  $l$  的参数方程消去参数  $t$ ，得直线的普通方程为  $y = x + a$ 。

法 1：直线  $l$  的斜率为 1，故倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$ ，

$$\text{故直线的参数方程可设为} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = a + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}, s \in \mathbf{R}.$$

将其代入  $y^2 = 2x + 1$  中得  $s^2 + 2\sqrt{2}(a-1)s + 2(a^2 - 1) = 0$

设  $A, B$  两点对应的参数分别为  $s_1, s_2$ ，则  $s_1 + s_2 = -2\sqrt{2}(a-1), s_1s_2 = 2(a^2 - 1)$ ，

且  $\Delta = 8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1) = 16 - 16a > 0$ ，故  $a < 1$ ，

$$\therefore |AB| = |s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1s_2} = \sqrt{8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1)} = 2, \text{ 解得 } a = \frac{3}{4}.$$

$$\text{法 2：联立} \begin{cases} y = x + a \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 1 = 0,$$

$\Delta = (2a - 2)^2 - 4(a^2 - 1) = -8a + 8 > 0$ ，解得  $a < 1$ ，

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， $\therefore x_1 + x_2 = 2 - 2a, x_1x_2 = a^2 - 1$ ，

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + 1^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2 - 2a)^2 - 4(a^2 - 1)} = 2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{4}$$

**[选修 4-5：不等式选讲]**

23. 实数  $a, b$  满足  $a + b \geq 3$ 。

(1) 证明：  $2a^2 + 2b^2 > a + b$ ；

(2) 证明：  $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$ 。

**【答案】** (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 直接利用  $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$  即可证明。

(2) 根据绝对值不等式并结合 (1) 中结论即可证明。

**【小问 1 详解】**

因为  $2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ ,

当  $a = b$  时等号成立, 则  $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$ ,

因为  $a+b \geq 3$ , 所以  $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 > a+b$ ;

**【小问 2 详解】**

$$|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| = |2a^2 + 2b^2 - (a+b)|$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - (a+b) \geq (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1) \geq 3 \times 2 = 6$$