

## 2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

### 数学

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至3页，第II卷4至6页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

#### 第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共9小题，每小题5分，共45分。

参考公式：

如果事件  $A$  与事件  $B$  互斥，那么  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

如果事件  $A$  与事件  $B$  相互独立，那么  $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

球的表面积公式  $S = 4\pi R^2$ ，其中  $R$  表示球的半径。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

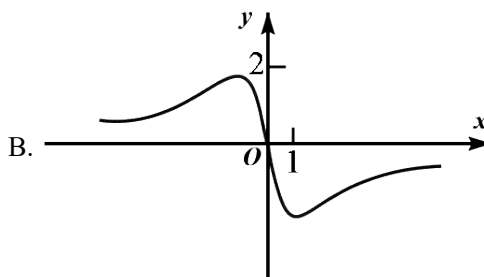
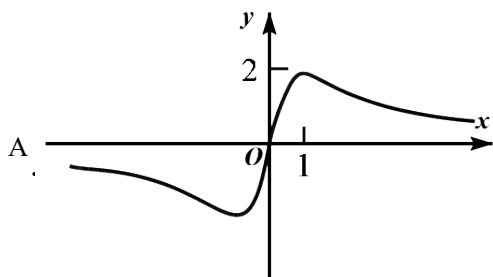
1. 设全集  $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ ，则  $A \cap (\complement_U B) = ( )$

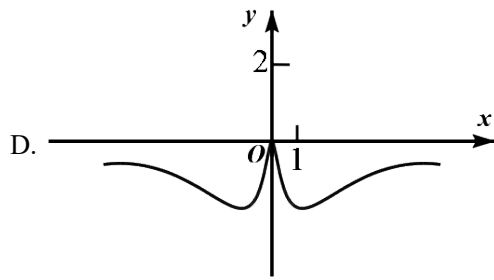
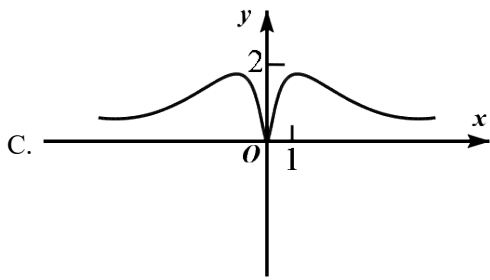
- A.  $\{-3, 3\}$                       B.  $\{0, 2\}$                       C.  $\{-1, 1\}$                       D.  $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$

2. 设  $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件

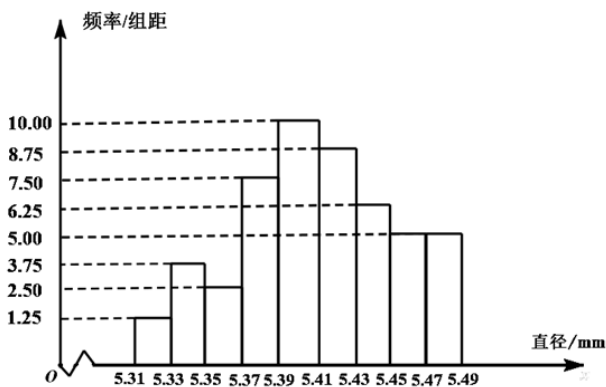
3. 函数  $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$  的图象大致为 ( )





4. 从一批零件中抽取80个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为9组：

$[5.31, 5.33), [5.33, 5.35), \dots, [5.45, 5.47), [5.47, 5.49]$ ，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的个数为（ ）



- A. 10                                      B. 18                                      C. 20                                      D. 36

5. 若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ ）

- A.  $12\pi$                                       B.  $24\pi$                                       C.  $36\pi$                                       D.  $144\pi$

6. 设  $a = 3^{0.7}$ ， $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ， $c = \log_{0.7} 0.8$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为（ ）

- A.  $a < b < c$                                       B.  $b < a < c$                                       C.  $b < c < a$                                       D.  $c < a < b$

7. 设双曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，过抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点和点  $(0, b)$  的直线为  $l$ 。若  $C$  的一条渐近线与  $l$  平行，另一条渐近线与  $l$  垂直，则双曲线  $C$  的方程为（ ）

- A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$                                       B.  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$                                       C.  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$                                       D.  $x^2 - y^2 = 1$

8. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。给出下列结论：

①  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ ；

②  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  是  $f(x)$  的最大值；

③把函数  $y = \sin x$  的图象上所有点向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 可得到函数  $y = f(x)$  的图象.

其中所有正确结论的序号是

A. ①

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$  若函数  $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) 恰有4个零点, 则  $k$  的取值范围

是 ( )

A.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C.  $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D.  $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

绝密★启用前

## 2020年普通高等学校招生全国统一考试 (天津卷)

### 数学

#### 第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2. 本卷共11小题, 共105分.

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分. 试题中包含两个空的, 答对1个的给3分, 全部答对的给5分.

10.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{8-i}{2+i} =$  \_\_\_\_\_.

11. 在  $(x + \frac{2}{x^2})^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数是 \_\_\_\_\_.

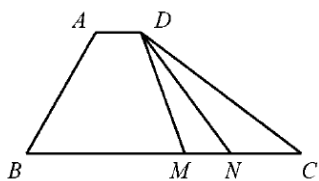
12. 已知直线  $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$  和圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相交于  $A, B$  两点. 若  $|AB| = 6$ , 则  $r$  的值为 \_\_\_\_\_.

13. 已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$ . 假定两球是否落入盒子互不影响, 则甲、乙两球都落入盒子的概率为 \_\_\_\_\_; 甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 则  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ , 且  $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$ , 则实

数  $\lambda$  的值为\_\_\_\_\_，若  $M, N$  是线段  $BC$  上的动点，且  $|\overline{MN}|=1$ ，则  $\overline{DM} \cdot \overline{DN}$  的最小值为\_\_\_\_\_。



三、解答题：本大题共5小题，共75分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

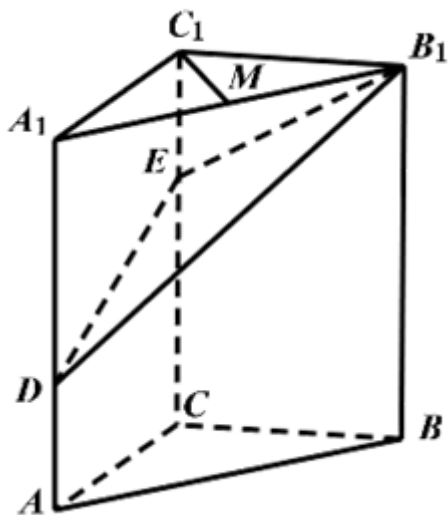
16. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ 。已知  $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$ 。

(I) 求角  $C$  的大小；

(II) 求  $\sin A$  的值；

(III) 求  $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$  的值。

17. 如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $CC_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，点  $D, E$  分别在棱  $AA_1$  和棱  $CC_1$  上，且  $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， $M$  为棱  $A_1B_1$  的中点。



(I) 求证： $C_1M \perp B_1D$ ；

(II) 求二面角  $B - B_1E - D$  的正弦值；

(III) 求直线  $AB$  与平面  $DB_1E$  所成角的正弦值。

18. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $A(0, -3)$ , 右焦点为  $F$ , 且  $|OA| = |OF|$ , 其中  $O$  为原点.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 已知点  $C$  满足  $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ , 点  $B$  在椭圆上 ( $B$  异于椭圆的顶点), 直线  $AB$  与以  $C$  为圆心的圆相切于点  $P$ , 且  $P$  为线段  $AB$  的中点. 求直线  $AB$  的方程.

19. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $\{b_n\}$  为等比数列,  $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 记  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求证:  $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ;

(III) 对任意的正整数  $n$ , 设  $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$  求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和.

20. 已知函数  $f(x) = x^3 + k \ln x (k \in \mathbf{R})$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(I) 当  $k = 6$  时,

(i) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(ii) 求函数  $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$  的单调区间和极值;

(II) 当  $k \dots -3$  时, 求证: 对任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ , 且  $x_1 > x_2$ , 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

