

2012年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给同的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. （5分）已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则B中所含元素的个数为（ ）

- A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

【考点】12: 元素与集合关系的判断.

【专题】5J: 集合.

【分析】由题意，根据集合B中的元素属性对 x, y 进行赋值得出B中所有元素，即可得出B中所含有的元素个数，得出正确选项

【解答】解：由题意， $x=5$ 时， $y=1, 2, 3, 4$,
 $x=4$ 时， $y=1, 2, 3$,
 $x=3$ 时， $y=1, 2$,
 $x=2$ 时， $y=1$

综上知，B中的元素个数为10个

故选：D.

【点评】本题考查元素与集合的关系的判断，解题的关键是理解题意，领会集合B中元素的属性，用分类列举的方法得出集合B中的元素的个数.

2. （5分）将2名教师，4名学生分成2个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由1名教师和2名学生组成，不同的安排方案共有（ ）

- A. 12种 B. 10种 C. 9种 D. 8种

【考点】D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】11: 计算题.

【分析】将任务分三步完成，在每步中利用排列和组合的方法计数，最后利用分步计数原理，将各步结果相乘即可得结果

【解答】解：第一步，为甲地选一名老师，有 $C_2^1=2$ 种选法；

第二步，为甲地选两个学生，有 $C_4^2=6$ 种选法；

第三步，为乙地选1名教师和2名学生，有1种选法

故不同的安排方案共有 $2 \times 6 \times 1 = 12$ 种

故选：A.

【点评】本题主要考查了分步计数原理的应用，排列组合计数的方法，理解题意，恰当分步是解决本题的关键，属基础题

3. (5分) 下面是关于复数 $z = \frac{2}{-1+i}$ 的四个命题：其中的真命题为 ()，

$p_1: |z|=2$,

$p_2: z^2=2i$,

$p_3: z$ 的共轭复数为 $1+i$,

$p_4: z$ 的虚部为 -1 .

A. p_2, p_3

B. p_1, p_2

C. p_2, p_4

D. p_3, p_4

【考点】2K：命题的真假判断与应用；A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】由 $z = \frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -1-i$ ，知 $p_1: |z|=\sqrt{2}$ ， $p_2: z^2=2i$ ， p_3

： z 的共轭复数为 $-1+i$ ， $p_4: z$ 的虚部为 -1 ，由此能求出结果.

【解答】解： $\because z = \frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -1-i$ ，

$\therefore p_1: |z|=\sqrt{2}$ ，

$p_2: z^2=2i$ ，

$p_3: z$ 的共轭复数为 $-1+i$ ，

$p_4: z$ 的虚部为 -1 ，

故选：C.

【点评】 本题考查复数的基本概念，是基础题．解题时要认真审题，仔细解答

4. （5分）设 F_1 、 F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点， P 为直线 $x =$

$\frac{3a}{2}$ 上一点， $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形，则 E 的离心率为（ ）

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

【考点】 K4：椭圆的性质．

【专题】 11：计算题．

【分析】 利用 $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形，可得 $|PF_2| = |F_2F_1|$ ，根据 P 为直线 $x = \frac{3a}{2}$ 上一点，可建立方程，由此可求椭圆的离心率．

【解答】 解： $\because \triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形，

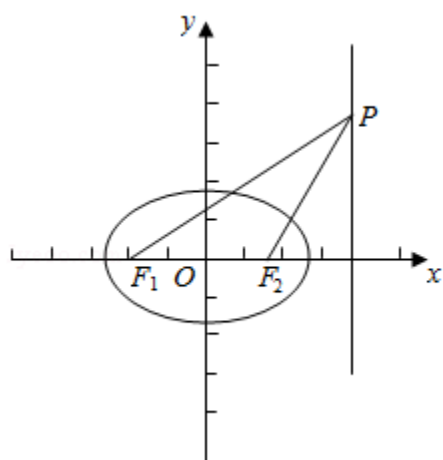
$$\therefore |PF_2| = |F_2F_1|$$

$$\because P \text{ 为直线 } x = \frac{3a}{2} \text{ 上一点}$$

$$\therefore 2\left(\frac{3}{2}a - c\right) = 2c$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

故选：C．



【点评】 本题考查椭圆的几何性质，解题的关键是确定几何量之间的关系，属

于基础题.

5. (5分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=(\quad)$

A. 7

B. 5

C. -5

D. -7

【考点】87: 等比数列的性质; 88: 等比数列的通项公式.

【专题】11: 计算题.

【分析】由 $a_4+a_7=2$, 及 $a_5a_6=a_4a_7=-8$ 可求 a_4 , a_7 , 进而可求公比 q , 代入等比数列的通项可求 a_1 , a_{10} , 即可

【解答】解: $\because a_4+a_7=2$, 由等比数列的性质可得, $a_5a_6=a_4a_7=-8$

$\therefore a_4=4$, $a_7=-2$ 或 $a_4=-2$, $a_7=4$

当 $a_4=4$, $a_7=-2$ 时, $q^3=-\frac{1}{2}$,

$\therefore a_1=-8$, $a_{10}=1$,

$\therefore a_1+a_{10}=-7$

当 $a_4=-2$, $a_7=4$ 时, $q^3=-2$, 则 $a_{10}=-8$, $a_1=1$

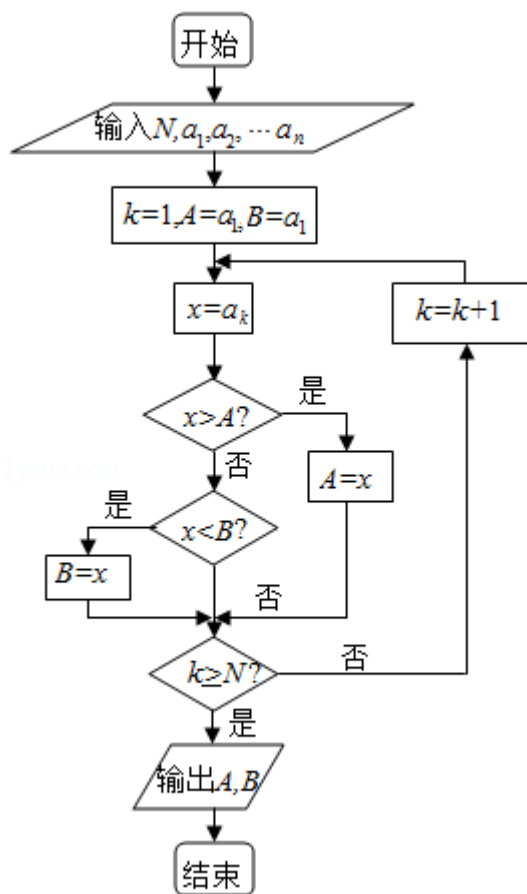
$\therefore a_1+a_{10}=-7$

综上可得, $a_1+a_{10}=-7$

故选: D.

【点评】本题主要考查了等比数列的性质及通项公式的应用, 考查了基本运算的能力.

6. (5分) 如果执行右边的程序框图, 输入正整数 N ($N \geq 2$) 和实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 输出 A, B , 则 $(\quad)$



- A. $A+B$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和
- B. $\frac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的算术平均数
- C. A和B分别是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数
- D. A和B分别是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小的数和最大的数

【考点】E7：循环结构.

【专题】5K：算法和程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知
：该程序的作用是求出 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数.

【解答】解：分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，

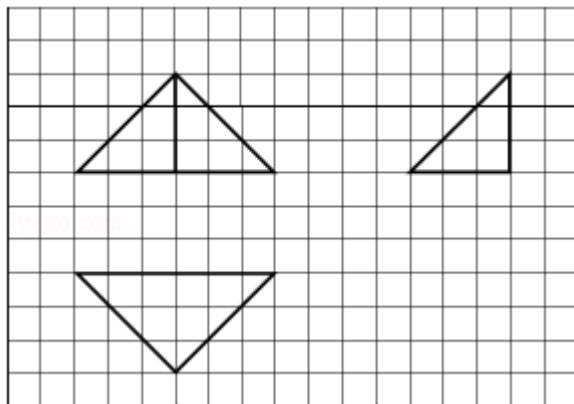
可知，该程序的作用是：求出 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数

其中A为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数，B为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小的数

故选：C.

【点评】 本题主要考查了循环结构，解题的关键是建立数学模型，根据每一步分析的结果，选择恰当的数学模型，属于中档题.

7. (5分) 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 ()



- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 通过三视图判断几何体的特征，利用三视图的数据求出几何体的体积即可.

【解答】 解：该几何体是三棱锥，底面是俯视图，三棱锥的高为3；
底面三角形斜边长为6，高为3的等腰直角三角形，
此几何体的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 3 = 9$.

故选：B.

【点评】 本题考查三视图与几何体的关系，考查几何体的体积的求法，考查计算能力.

8. (5分) 等轴双曲线C的中心在原点，焦点在x轴上，C与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于点A和点B， $|AB|=4\sqrt{3}$ ，则C的实轴长为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

【考点】K1：圆锥曲线的综合.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】设等轴双曲线C: $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$), $y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$, 由C与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于A, B两点, $|AB| = 4\sqrt{3}$, 能求出C的实轴长.

【解答】解: 设等轴双曲线C: $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$),

$y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$,

$\therefore$ C与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$ 交于A, B两点, $|AB| = 4\sqrt{3}$

$\therefore A(-4, 2\sqrt{3}), B(-4, -2\sqrt{3})$,

将A点坐标代入双曲线方程得 $a^2 = (-4)^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$,

$\therefore a = 2, 2a = 4$.

故选: C.

【点评】本题考查双曲线的性质和应用, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意挖掘题设中的隐含条件, 合理地进行等价转化.

9. (5分) 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减, 则实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

【考点】HK: 由 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】法一: 通过特殊值 $\omega = 2, \omega = 1$, 验证三角函数的角的范围, 排除选项, 得到结果.

法二: 可以通过角的范围, 直接推导 ω 的范围即可.

【解答】解: 法一: 令: $\omega = 2 \Rightarrow (\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ 不合题意 排除 (D)

$\omega = 1 \Rightarrow (\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 合题意 排除 (B) (C)

法二: $\omega(\pi - \frac{\pi}{2}) \leq \pi \Leftrightarrow \omega \leq 2$,

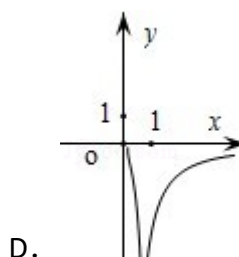
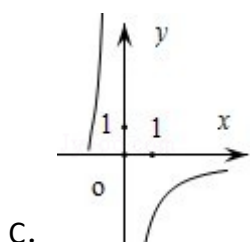
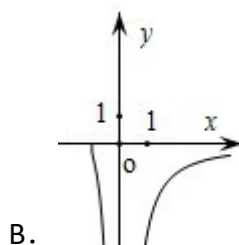
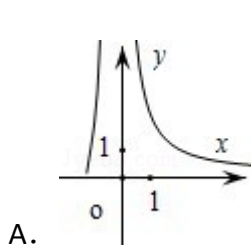
$$(\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{4}, \pi \omega + \frac{\pi}{4}] \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

得: $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}, \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}.$

故选: A.

【点评】本题考查三角函数的单调性的应用, 函数的解析式的求法, 考查计算能力.

10. (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



【考点】4N: 对数函数的图象与性质; 4T: 对数函数图象与性质的综合应用.

【专题】11: 计算题.

【分析】考虑函数 $f(x)$ 的分母的函数值恒小于零, 即可排除A, C, 由 $f(x)$ 的定义域能排除D, 这一性质可利用导数加以证明

【解答】解: 设 $g(x) = \ln(1+x) - x$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x}{1+x}$$

$\therefore g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

$$\therefore g(x) < g(0) = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{g(x)} < 0$$

得: $x > 0$ 或 $-1 < x < 0$ 均有 $f(x) < 0$ 排除A, C,

又 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)-x}$ 中, $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1)-x \neq 0 \end{cases}$, 能排除D.

故选: B.

【点评】本题主要考查了函数解析式与函数图象间的关系, 利用导数研究函数性质的应用, 排除法解图象选择题, 属基础题

11. (5分) 已知三棱锥S - ABC的所有顶点都在球O的表面上, $\triangle ABC$ 是边长为1的正三角形, SC为球O的直径, 且 $SC=2$, 则此三棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

【考点】LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】根据题意作出图形, 利用截面圆的性质即可求出 OO_1 , 进而求出底面ABC上的高SD, 即可计算出三棱锥的体积.

【解答】解: 根据题意作出图形:

设球心为O, 过ABC三点的小圆的圆心为 O_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面ABC,

延长 CO_1 交球于点D, 则 $SD \perp$ 平面ABC.

$$\because CO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OO_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

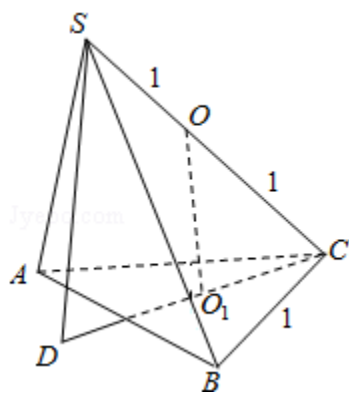
$$\therefore \text{高} SD = 2OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为1的正三角形,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥} S-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

故选: C.



【点评】 本题考查棱锥的体积，考查球内接多面体，解题的关键是确定点S到面ABC的距离.

12. (5分) 设点P在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点Q在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为 ()

- A. $1 - \ln 2$ B. $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$ C. $1 + \ln 2$ D. $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

【考点】 4R: 反函数; IT: 点到直线的距离公式.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 由于函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，图象关于 $y=x$ 对称，要求 $|PQ|$ 的最小值，只要求出函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P(x, \frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y=x$ 的距离

为 $d=\frac{|\frac{1}{2}e^x - x|}{\sqrt{2}}$ 的最小值，

设 $g(x) = \frac{1}{2}e^x - x$ ，利用导数可求函数 $g(x)$ 的单调性，进而可求 $g(x)$ 的最小值，即可求.

【解答】 解: $\because$ 函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，图象关于 $y=x$ 对称，

函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P(x, \frac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{|\frac{1}{2}e^x - x|}{\sqrt{2}}$ ，

设 $g(x) = \frac{1}{2}e^x - x$ ($x > 0$)，则 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ ，

由 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1 \geq 0$ 可得 $x \geq \ln 2$ ，

由 $g'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1 < 0$ 可得 $0 < x < \ln 2$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 单调递减, 在 $[\ln 2, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore$ 当 $x = \ln 2$ 时, 函数 $g(x)_{\min} = 1 - \ln 2$,

$$d_{\min} = \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{2}},$$

由图象关于 $y=x$ 对称得: $|PQ|$ 最小值为 $2d_{\min} = \sqrt{2}(1 - \ln 2)$.

故选: B.

【点评】 本题主要考查了点到直线的距离公式的应用, 注意本题解法中的转化思想的应用, 根据互为反函数的对称性把所求的点点距离转化为点线距离, 构造很好

二. 填空题: 本大题共4小题, 每小题5分.

13. (5分) 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 45° , 且 $|\vec{a}| = 1$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$, 则 $|\vec{b}| = \underline{3\sqrt{2}}$.

【考点】 90: 平面向量数量积的性质及其运算; 9S: 数量积表示两个向量的夹角.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 由已知可得, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$, 代入 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$

$$\sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2} |\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10} \text{ 可求}$$

【解答】 解: $\because \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 45^\circ$, $|\vec{a}| = 1$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2} |\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10}$$

解得 $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$

故答案为: $3\sqrt{2}$

【点评】 本题主要考查了向量的数量积 定义的应用, 向量的数量积性质 $|\vec{a}| =$

$\sqrt{\vec{a}^2}$ 是求解向量的模常用的方法

14. (5分) 设 x, y 满足约束条件: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y \geq -1 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$; 则 $z = x - 2y$ 的取值范围为_____

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】11: 计算题.

【分析】先作出不等式组表示的平面区域, 由 $z = x - 2y$ 可得, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$, 则

$-\frac{1}{2}z$ 表示直线 $x - 2y - z = 0$ 在 y 轴上的截距, 截距越大, z 越小, 结合函数的图

形可求 z 的最大与最小值, 从而可求 z 的范围

【解答】解: 作出不等式组表示的平面区域

由 $z = x - 2y$ 可得, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$, 则 $-\frac{1}{2}z$ 表示直线 $x - 2y - z = 0$ 在 y 轴上的截距, 截距

越大, z 越小

结合函数的图形可知, 当直线 $x - 2y - z = 0$ 平移到B时, 截距最大, z 最小; 当直

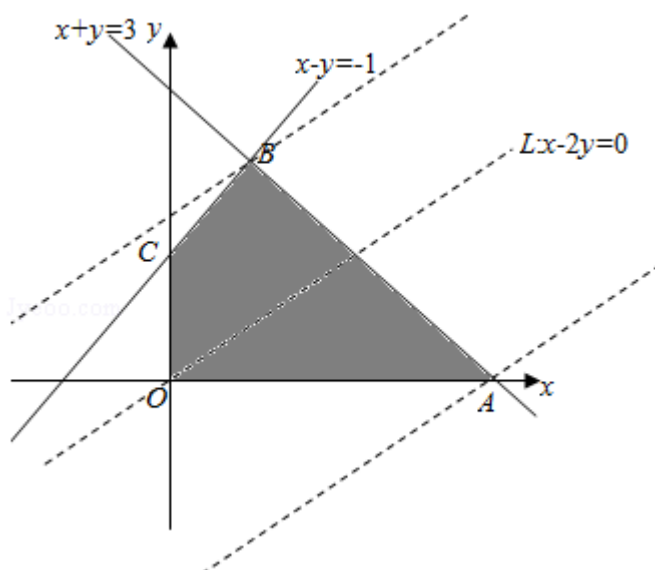
线 $x - 2y - z = 0$ 平移到A时, 截距最小, z 最大

由 $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 可得B (1, 2), 由 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ 可得A (3, 0)

$\therefore Z_{\max} = 3, Z_{\min} = -3$

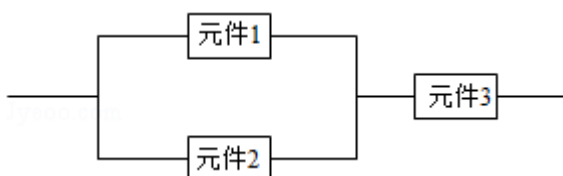
则 $z = x - 2y \in [-3, 3]$

故答案为: $[-3, 3]$



【点评】平面区域的范围问题是线性规划问题中一类重要题型，在解题时，关键是正确地画出平面区域，分析表达式的几何意义，然后结合数形结合的思想，分析图形，找出满足条件的点的坐标，即可求出答案．

15. （5分）某个部件由三个元件按下图方式连接而成，元件1或元件2正常工作，且元件3正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$ ，且各个元件能否正常相互独立，那么该部件的使用寿命超过1000小时的概率为 $\frac{3}{8}$ ．



【考点】CP：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】先根据正态分布的意义，知三个电子元件的使用寿命超过1000小时的概率为 $\frac{1}{2}$ ，而所求事件“该部件的使用寿命超过1000小时”当且仅当“超过1000小时时，元件1、元件2至少有一个正常”和“超过1000小时时，元件3正常”同时发生，由于其为独立事件，故分别求其概率再相乘即可

【解答】解：三个电子元件的使用寿命均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$

得：三个电子元件的使用寿命超过1000小时的概率为 $p = \frac{1}{2}$

设 $A = \{\text{超过1000小时时，元件1、元件2至少有一个正常}\}$ ， $B = \{\text{超过1000小时时，元件3正常}\}$

$C = \{\text{该部件的使用寿命超过1000小时}\}$

$$\text{则 } P(A) = 1 - (1-p)^2 = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

故答案为 $\frac{3}{8}$

【点评】 本题主要考查了正态分布的意义，独立事件同时发生的概率运算，对立事件的概率运算等基础知识，属基础题

16. (5分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$ ，则 $\{a_n\}$ 的前60项和为 1830

【考点】 8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【专题】 11：计算题；35：转化思想；4M：构造法；54：等差数列与等比数列.

【分析】 由题意可得

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 + a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, a_5 + a_4 = 7, a_6 - a_5 = 9, a_7 + a_6 = 11, \dots, a_{50} - a_{49} = 97$$

，变形可得

$$a_3 + a_1 = 2, a_4 + a_2 = 8, a_7 + a_5 = 2, a_8 + a_6 = 24, a_9 + a_7 = 2, a_{12} + a_{10} = 40, a_{13} + a_{15} = 2, a_{16} +$$

$$a_{14} = 56, \dots \text{利用数列的结构特征，求出 } \{a_n\} \text{ 的前60项和}$$

【解答】 解： $\because a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$,

故有

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 + a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, a_5 + a_4 = 7, a_6 - a_5 = 9, a_7 + a_6 = 11, \dots, a_{50} - a_{49} = 97$$

从而可得

$$a_3 + a_1 = 2, a_4 + a_2 = 8, a_7 + a_5 = 2, a_8 + a_6 = 24, a_9 + a_{11} = 2, a_{12} + a_{10} = 40, a_{13} + a_{15} = 2, a_{16} + a_{14} = 56, \dots$$

从第一项开始，依次取2个相邻奇数项的和都等于2，从第二项开始，依次取2个相邻偶数项的和构成以8为首项，以16为公差的等差数列.

$\{a_n\}$ 的前60项和为 $15 \times 2 + (15 \times 8 + \frac{15 \times 14}{2} \times 16) = 1830$

【点评】 本题考查数列递推式，训练了利用构造等差数列求数列的前n项和，属中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （12分）已知a, b, c分别为 $\triangle ABC$ 三个内角A, B, C的对边， $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$

(1) 求A;

(2) 若a=2, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$; 求b, c.

【考点】 HP: 正弦定理.

【专题】 33: 函数思想; 4R: 转化法; 58: 解三角形.

【分析】 (1) 已知等式利用正弦定理化简，整理后得到 $\sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2}$. 即可求出A的值;

(2) 若a=2, 由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求得 $bc=4$. ①, 再利用余弦定理可得 $b+c=4$. ②, 结合①②求得b和c的值.

【解答】 解: (1) 由正弦定理得: $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$,

即 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C$

$\therefore \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A+C) + \sin C$,

即 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$

$\therefore \sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2}$.

$\therefore A - 30^\circ = 30^\circ$

$\therefore A = 60^\circ$;

(2) 若a=2, $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \sqrt{3}$,

$\therefore bc = 4$. ①

再利用余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$= (b+c)^2 - 2bc - bc = (b+c)^2 - 3 \times 4 = 4,$$

$$\therefore b+c=4. \quad (2)$$

结合①②求得 $b=c=2$.

【点评】 本题考查了正弦定理及余弦定理的应用，考查了三角形面积公式的应用，是中档题.

18. (12分) 某花店每天以每枝5元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝10元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进16枝玫瑰花，求当天的利润 y (单位：元) 关于当天需求量 n (单位：枝， $n \in \mathbb{N}$) 的函数解析式.

(2) 花店记录了100天玫瑰花的日需求量 (单位：枝)，整理得如表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以100天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

(i) 若花店一天购进16枝玫瑰花， x 表示当天的利润 (单位：元)，求 x 的分布列、数学期望及方差；

(ii) 若花店计划一天购进16枝或17枝玫瑰花，你认为应购进16枝还是17枝？请说明理由.

【考点】 CH：离散型随机变量的期望与方差；CS：概率的应用.

【专题】 15：综合题.

【分析】 (1) 根据卖出一枝可得利润5元，卖不出一枝可得赔本5元，即可建立分段函数；

(2) (i) x 可取60, 70, 80，计算相应的概率，即可得到 x 的分布列，数学期望及方差；

(ii) 求出进17枝时当天的利润，与购进16枝玫瑰花时当天的利润比较，即可得到结论.

【解答】 解：(1) 当 $n \geq 16$ 时， $y = 16 \times (10 - 5) = 80$ ；

当 $n \leq 15$ 时， $y = 5n - 5(16 - n) = 10n - 80$ ，得：
$$y = \begin{cases} 10n - 80 & (n \leq 15) \\ 80 & (n \geq 16) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(2) (i) X 可取60, 70, 80, 当日需求量 $n=14$ 时, $X=60$, $n=15$ 时, $X=70$, 其他情况 $X=80$,

$$P(X=60) = \frac{\text{频数}}{\text{总数}} = \frac{10}{10+20+16+16+15+13+10} = \frac{10}{100} = 0.1, \quad P(X=70) = \frac{20}{100} = 0.2, \quad P(X=80) = 1 - 0.1 - 0.2 = 0.7,$$

X 的分布列为

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

$$EX = 60 \times 0.1 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.7 = 76$$

$$DX = 16^2 \times 0.1 + 6^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.7 = 44$$

(ii) 购进17枝时, 当天的利润的期望为 $y = (14 \times 5 - 3 \times 5) \times 0.1 + (15 \times 5 - 2 \times 5) \times 0.2 + (16 \times 5 - 1 \times 5) \times 0.16 + 17 \times 5 \times 0.54 = 76.4$

$\because 76.4 > 76, \therefore$ 应购进17枝

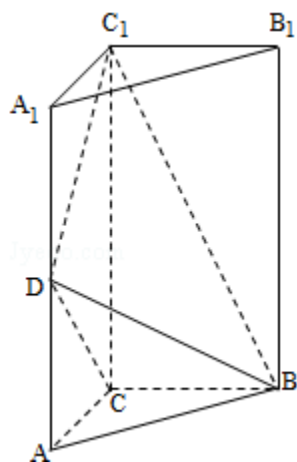
【点评】 本题考查分段函数模型的建立, 考查离散型随机变量的期望与方差, 考查学生利用数学知识解决实际问题的能力.

19. (12分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点

, $DC_1 \perp BD$

(1) 证明: $DC_1 \perp BC$;

(2) 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的大小.



【考点】 LO: 空间中直线与直线之间的位置关系; MJ: 二面角的平面角及求法

【专题】15：综合题.

【分析】（1）证明 $DC_1 \perp BC$ ，只需证明 $DC_1 \perp$ 面 BCD ，即证明 $DC_1 \perp DC$ ， $DC_1 \perp BD$ ；

（2）证明 $BC \perp$ 面 ACC_1A_1 ，可得 $BC \perp AC$ 取 A_1B_1 的中点 O ，过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H ，连接 C_1O ， C_1H ，可得点 H 与点 D 重合且 $\angle C_1DO$ 是二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的平面角，由此可求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的大小.

【解答】（1）证明：在 $Rt\triangle DAC$ 中， $AD=AC$ ， $\therefore \angle ADC=45^\circ$

同理： $\angle A_1DC_1=45^\circ$ ， $\therefore \angle CDC_1=90^\circ$

$\therefore DC_1 \perp DC$ ， $DC_1 \perp BD$

$\therefore DC \cap BD = D$

$\therefore DC_1 \perp$ 面 BCD

$\therefore BC \subset$ 面 BCD

$\therefore DC_1 \perp BC$

（2）解： $\therefore DC_1 \perp BC$ ， $CC_1 \perp BC$ ， $DC_1 \cap CC_1 = C_1$ ， $\therefore BC \perp$ 面 ACC_1A_1 ，

$\therefore AC \subset$ 面 ACC_1A_1 ， $\therefore BC \perp AC$

取 A_1B_1 的中点 O ，过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H ，连接 C_1O ， OH

$\therefore A_1C_1 = B_1C_1$ ， $\therefore C_1O \perp A_1B_1$ ，

$\therefore$ 面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 A_1BD ，面 $A_1B_1C_1 \cap$ 面 $A_1BD = A_1B_1$ ，

$\therefore C_1O \perp$ 面 A_1BD

而 $BD \subset$ 面 A_1BD

$\therefore BD \perp C_1O$ ，

$\therefore OH \perp BD$ ， $C_1O \cap OH = O$ ，

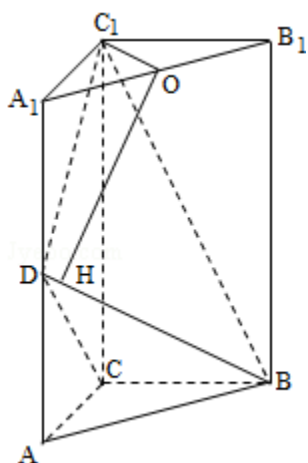
$\therefore BD \perp$ 面 C_1OH ： $\therefore C_1H \perp BD$ ， $\therefore$ 点 H 与点 D 重合且 $\angle C_1DO$ 是二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的平面角

设 $AC=a$ ，则 $C_1O = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ， $C_1D = \sqrt{2}a = 2C_1O$ ，

$\therefore \sin \angle C_1DO = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle C_1DO = 30^\circ$

即二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的大小为 30°



【点评】 本题考查线面垂直，考查面面角，解题的关键是掌握线面垂直的判定，正确作出面面角，属于中档题.

20. (12分) 设抛物线 $C: x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F , 准线为 l , $A \in C$, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点;

(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;

(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

【考点】 J1: 圆的标准方程; K8: 抛物线的性质; KI: 圆锥曲线的综合.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】 (1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 $\triangle$, 斜边 $|BD|=2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$, 由 $\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=4\sqrt{2}$, 知 $\frac{1}{2} \times BD \times d=$

$\frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p=4\sqrt{2}$, 由此能求出圆 F 的方程.

(2) 由对称性设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0>0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$ 点 A, B 关于点 F 对称得:

$B(-x_0, p-\frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p-\frac{x_0^2}{2p}=\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2=3p^2$, 得: $A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2})$, 由此能求出坐

标原点到 m, n 距离的比值.

【解答】 解: (1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 $\triangle$, 斜边 $|BD|=2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$,

$\therefore \triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD} = 4\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times BD \times d = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p = 4\sqrt{2},$$

解得 $p=2$, 所以 F 坐标为 $(0, 1)$,

$\therefore$ 圆 F 的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 8$.

(2) 由题设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0 > 0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$,

$\therefore A, B, F$ 三点在同一直线 m 上,

又 AB 为圆 F 的直径, 故 A, B 关于点 F 对称.

由点 A, B 关于点 F 对称得: $B(-x_0, p - \frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 3p^2$

得: $A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2})$, 直线 $m: y = \frac{\frac{3p}{2} - \frac{p}{2}}{\sqrt{3}p}x + \frac{p}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}p}{2} = 0$,

$$x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow y' = \frac{x}{p} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}p \Rightarrow \text{切点 } P(\frac{\sqrt{3}p}{3}, \frac{p}{6})$$

直线 $n: y - \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\sqrt{3}p}{3}) \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{6}p = 0$

坐标原点到 m, n 距离的比值为 $\frac{\frac{\sqrt{3}p}{2}}{\frac{\sqrt{3}p}{6}} = 3$.

【点评】 本题考查抛物线与直线的位置关系的综合应用, 具体涉及到抛物线的简单性质、圆的性质、导数的应用, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意合理地进行等价转化.

21. (12分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$;

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题; 2A: 探究型; 35: 转化思想.

【分析】 (1) 对函数 $f(x)$ 求导, 再令自变量为 1, 求出 $f'(1)$ 得到函数的解析式及导数, 再由导数求函数的单调区间;

(2) 由题意 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b \Leftrightarrow h(x) = e^x - (a+1)x - b \geq 0$, 借助导数求出新函数的最小值, 令其大于0即可得到参数a, b

所满足的关系式, 再研究 $(a+1)b$ 的最大值

【解答】解: (1) $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0) + x$

令 $x=1$ 得: $f(0) = 1$

$\therefore f(x) = f'(1)e^{x-1} - x + \frac{1}{2}x^2$ 令 $x=0$, 得 $f(0) = f'(1)e^{-1} = 1$ 解得 $f'(1) = e$

故函数的解析式为 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$

令 $g(x) = f'(x) = e^x - 1 + x$

$\therefore g'(x) = e^x + 1 > 0$, 由此知 $y=g(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上单调递增

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$; 当 $x < 0$ 时, 有

$f'(x) < f'(0) = 0$ 得:

函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$

(2) $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b \Leftrightarrow h(x) = e^x - (a+1)x - b \geq 0$ 得 $h'(x) = e^x - (a+1)$

① 当 $a+1 \leq 0$ 时, $h'(x) > 0 \Rightarrow y=h(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上单调递增, $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$ 与 $h(x) \geq 0$ 矛盾

② 当 $a+1 > 0$ 时, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(a+1)$, $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(a+1)$

得: 当 $x = \ln(a+1)$ 时, $h(x)_{\min} = (a+1) - (a+1)\ln(a+1) - b \geq 0$, 即 $(a+1) - (a+1)\ln(a+1) \geq b$

$\therefore (a+1)b \leq (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$, $(a+1 > 0)$

令 $F(x) = x^2 - x^2 \ln x (x > 0)$, 则 $F'(x) = x(1 - 2\ln x)$

$\therefore F'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$, $F'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$

当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)_{\max} = \frac{e}{2}$

即当 $a = \sqrt{e} - 1$, $b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时, $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$

【点评】本题考查导数在最值问题中的应用及利用导数研究函数的单调性, 解

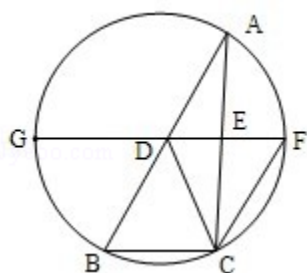
题的关键是第一题中要赋值求出 $f'(1)$ ，易因为没有将 $f'(1)$ 看作常数而出错，第二题中将不等式恒成立研究参数关系的问题转化为最小值问题，本题考查了转化的思想，考查判断推理能力，是高考中的热点题型，计算量大，易马虎出错.

四、请考生在第22，23，24题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，作答时请写清题号.

22. (10分) 如图，D，E分别为 $\triangle ABC$ 边AB，AC的中点，直线DE交 $\triangle ABC$ 的外接圆于F，G两点，若 $CF \parallel AB$ ，证明：

(1) $CD=BC$;

(2) $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.



【考点】N4：相似三角形的判定.

【专题】14：证明题.

【分析】(1) 根据D，E分别为 $\triangle ABC$ 边AB，AC的中点，可得 $DE \parallel BC$ ，证明四边形ADCF是平行四边形，即可得到结论；

(2) 证明两组对应角相等，即可证得 $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.

【解答】证明：(1) $\because$ D，E分别为 $\triangle ABC$ 边AB，AC的中点

$\therefore DF \parallel BC$ ， $AD=BD$

$\because AB \parallel CF$ ， $\therefore$ 四边形BDFC是平行四边形

$\therefore CF \parallel BD$ ， $CF=BD$

$\therefore CF \parallel AD$ ， $CF=AD$

$\therefore$ 四边形ADCF是平行四边形

$\therefore AF=CD$

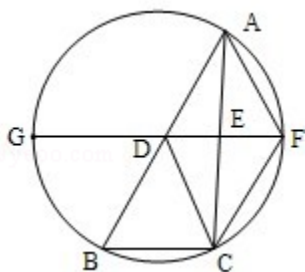
$\because \widehat{BC} = \widehat{AF}$ ， $\therefore BC=AF$ ， $\therefore CD=BC$.

(2) 由(1)知 $\widehat{BC}=\widehat{AF}$, 所以 $\widehat{BF}=\widehat{AC}$.

所以 $\angle BGD=\angle DBC$.

因为 $GF\parallel BC$, 所以 $\angle BDG=\angle ADF=\angle DBC=\angle BDC$.

所以 $\triangle BCD\sim\triangle GBD$.



【点评】 本题考查几何证明选讲，考查平行四边形的证明，考查三角形的相似，属于基础题.

23. 选修4 - 4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=2\cos\phi \\ y=3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立坐标系, 曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点

都在 C_2 上, 且 A, B, C, D 依逆时针次序排列, 点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$.

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程; Q8: 点的极坐标和直角坐标的互化; Q L: 椭圆的参数方程.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】 (1) 确定点 A, B, C, D 的极坐标, 即可得点 A, B, C, D 的直角坐标;

(2) 利用参数方程设出 P 的坐标, 借助于三角函数, 即可求得 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

【解答】 解: (1) 点 A, B, C, D 的极坐标为

$$(2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{5\pi}{6}), (2, \frac{4\pi}{3}), (2, \frac{11\pi}{6})$$

点A, B, C, D的直角坐标为 $(1, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -1)$

(2) 设P (x_0, y_0) , 则 $\begin{cases} x_0=2\cos\phi \\ y_0=3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数)

$$t=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4x^2+4y^2+16=32+20\sin^2\phi$$

$$\because \sin^2\phi \in [0, 1]$$

$$\therefore t \in [32, 52]$$

【点评】 本题考查极坐标与直角坐标的互化, 考查圆的参数方程的运用, 属于中档题.

24. 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$

① 当 $a = -3$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

② $f(x) \leq |x-4|$ 若的解集包含 $[1, 2]$, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【专题】 17: 选作题; 59: 不等式的解法及应用; 5T: 不等式.

【分析】 ① 不等式等价于 $\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}$; 或 $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}$; 或 $\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}$, 求出每个不等式组的解集, 再取并集即得所求.

② 原命题等价于 $-2-x \leq a \leq 2-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 由此求得求 a 的取值范围.

【解答】 解: (1) 当 $a = -3$ 时, $f(x) \geq 3$ 即 $|x-3| + |x-2| \geq 3$, 即

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}; \text{ 可得 } x \leq 1; \\ \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}; \text{ 可得 } x \in \emptyset; \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}; \text{ 可得 } x \geq 4.$$

取并集可得不等式的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

(2) 原命题即 $f(x) \leq |x-4|$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 等价于 $|x+a| + 2-x \leq 4-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

等价于 $|x+a| \leq 2$, 等价于 $-2 \leq x+a \leq 2$, $-2-x \leq a \leq 2-x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立.

故当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $-2-x$ 的最大值为 $-2-1 = -3$, $2-x$ 的最小值为 0,

故 a 的取值范围为 $[-3, 0]$.

【点评】 本题主要考查绝对值不等式的解法，关键是去掉绝对值，化为与之等价的不等式组来解，体现了分类讨论的数学思想，属于中档题.