

## 2015 年高考天津市理科数学真题

### 一、选择题

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合  $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ，集合  $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ，则集合  $A \cap C_U B =$  ( )

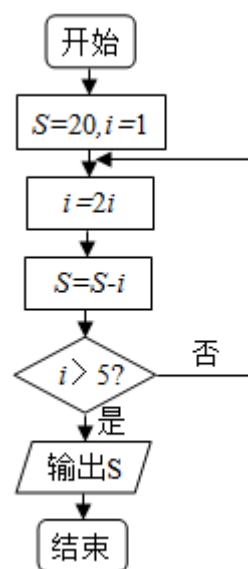
- A.  $\{2, 5\}$                       B.  $\{3, 6\}$                       C.  $\{2, 5, 6\}$                       D.  $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+2 \geq 0. \\ x-y+3 \geq 0. \\ 2x+y-3 \leq 0. \end{cases}$  则目标函数  $z = x+6y$  的最大值为 ( )

- A. 3                                  B. 4                                  C. 18                                  D. 40

3. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，则输出  $S$  的值为 ( )

- A. -10                                B. 6                                  C. 14                                D. 18

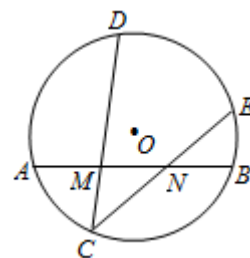


4. 设  $x \in R$ ，则 “ $|x-2| < 1$ ” 是 “ $x^2 + x - 2 > 0$ ” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件              B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件                          D. 既不充分也不必要条件

5. 如图，在圆  $O$  中， $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点，弦  $CD, CE$  分别经过点  $M, N$ ，若  $CM = 2, MD = 4, CN = 3$ ，则线段  $NE$  的长为 ( )

- A.  $\frac{8}{3}$                                   B. 3                                  C.  $\frac{10}{3}$                                 D.  $\frac{5}{2}$



6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线过点  $(2, \sqrt{3})$ ，且双曲线的一个焦点在抛物线

$y^2 = 4\sqrt{7}x$  的准线上，则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$               B.  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$               C.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$                       D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

7. 已知定义在  $R$  上的函数  $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$  ( $m$  为实数) 为偶函数，记  $a = f(\log_{0.5} 3)$ ， $b = f(\log_2 5)$ ，

$c = f(2m)$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$                       B.  $a < c < b$                       C.  $c < a < b$                       D.  $c < b < a$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$  函数  $g(x) = b - f(2-x)$ , 其中  $b \in R$ , 若函数  $y = f(x) - g(x)$  恰有

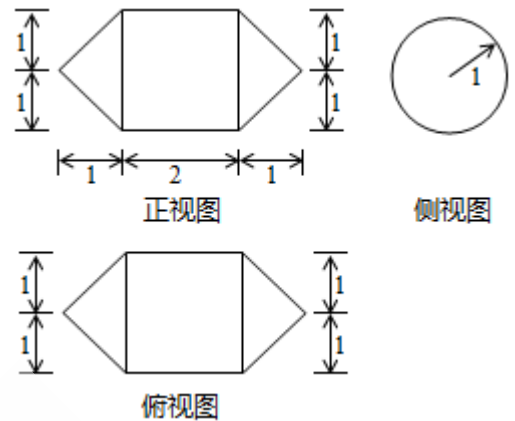
4 个零点, 则  $b$  的取值范围是 ( )

- A.  $(\frac{7}{4}, +\infty)$       B.  $(-\infty, \frac{7}{4})$       C.  $(0, \frac{7}{4})$       D.  $(\frac{7}{4}, 2)$

二、填空题

9.  $i$  是虚数单位, 若复数  $(1-2i)(a+i)$  是纯虚数, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $m^3$ .



11. 曲线  $y = x^2$  与直线  $y = x$  所围成的封闭图形的面积为\_\_\_\_\_.

12. 在  $(x - \frac{1}{4x})^6$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

13. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ ,  $b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 在等腰梯形  $ABCD$  中, 已知  $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ . 动点  $E$  和  $F$  分别在线段  $BC$  和  $DC$  上, 且  $\overline{BE} = \lambda \overline{BC}, \overline{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overline{DC}$ , 则  $\overline{AE} \cdot \overline{AF}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in R$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

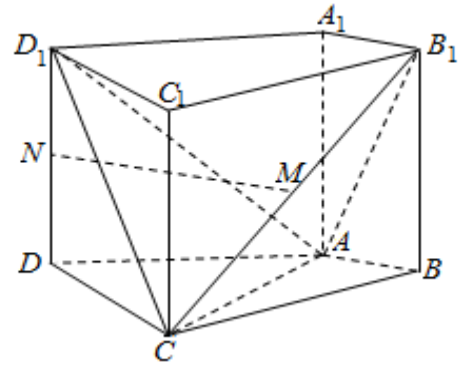
(II) 求  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$  内的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加。现有来自甲协会的运动员 3 名，其中种子选手 2 名；乙协会的运动员 5 名，其中种子选手 3 名。从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛。

(I) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手，且这 2 名种子选手来自同一个协会”，求事件 A 发生的概率；

(II) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

17. 如图，在四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，侧棱  $A_1A \perp$  底面  $ABCD$ ， $AB \perp AC$ ， $AB=1$ ， $AC=AA_1=2$ ， $AD=CD=\sqrt{5}$ ，且点 M 和 N 分别为  $B_1C$  和  $D_1D$  的中点。



(I) 求证： $MN \parallel$  平面  $ABCD$ ；

(II) 求二面角  $D_1-AC-B_1$  的正弦值；

(III) 设 E 为棱  $A_1B_1$  上的点。若直线 NE 和平面  $ABCD$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{3}$ ，求线段  $A_1E$  的长。

18. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} = qa_n$  ( $q$  为实数，且  $q \neq 1$ )， $n \in N^*$ ， $a_1=1$ ， $a_2=2$ ，且  $a_2+a_1$ ， $a_3+a_4$ ， $a_4+a_5$  成等差数列。

(I) 求  $q$  的值和  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ ， $n \in N^*$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和。

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F(-c, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 点  $M$  在椭圆上且位于第一象限,

直线  $FM$  被圆  $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$  截得的线段的长为  $c$ ,  $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

(I) 求直线  $FM$  的斜率;

(II) 求椭圆的方程;

(III) 设动点  $P$  在椭圆上, 若直线  $FP$  的斜率大于  $\sqrt{2}$ , 求直线  $OP$  ( $O$  为原点) 的斜率的取值范围。

20. 已知函数  $f(x) = nx - x^n, x \in R$ , 其中  $n \in N^*$ , 且  $n \geq 2$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$ , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$ ,

求证: 对于任意的正实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x)$ ;

(III) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  ( $a$  为实数) 有两个正实数根  $x_1, x_2$ , 求证:  $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ .

## 2015 年高考天津市理科数学真题答案

### 一、选择题

1. 答案：A

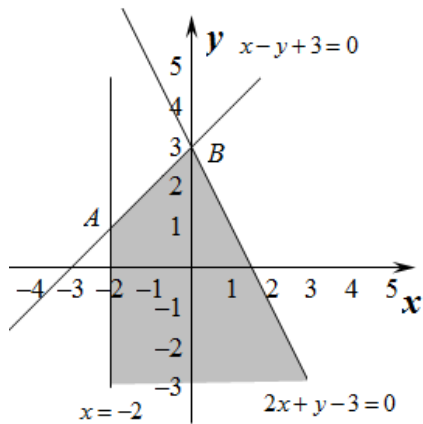
解析过程：

$\complement B = \{2, 5, 8\}$ , 所以  $A \cap \complement B = \{2, 5\}$ , 选 A

2. 答案：C

解析过程：

不等式  $\begin{cases} x+2 \geq 0. \\ x-y+3 \geq 0. \\ 2x+y-3 \leq 0. \end{cases}$  所表示的平面区域如下图所示，



当  $z = x + 6y$  所表示直线经过点  $B(0, 3)$  时,  $z$  有最大值 18, 选 C

3. 答案：B

解析过程：

输入  $S = 20, i = 1$ ;

$i = 2 \times 1, S = 20 - 2 = 18, 2 > 5$  不成立;

$i = 2 \times 2 = 4, S = 18 - 4 = 14, 4 > 5$  不成立

$i = 2 \times 4 = 8, S = 14 - 8 = 6, 8 > 5$  成立

输出 6, 选 B

4. 答案：A

解析过程：

$|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3, x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ 或 } x > 1$

所以“ $|x-2|<1$ ”是“ $x^2+x-2>0$ ”的充分不必要条件，选 A

5. 答案：A

解析过程：

由相交弦定理可知，

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD, CN \cdot NE = AN \cdot NB,$$

又因为  $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点，

$$\text{所以 } AM \cdot MB = AN \cdot NB \therefore CN \cdot NE = CM \cdot MD,$$

$$\text{所以 } NE = \frac{CM \cdot MD}{CN} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}, \text{ 选 A}$$

6. 答案：D

解析过程：

双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a>0, b>0$ ) 的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

由点  $(2, \sqrt{3})$  在渐近线上，所以  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

双曲线的一个焦点在抛物线  $y^2 = 4\sqrt{7}x$  准线方程  $x = -\sqrt{7}$  上，

所以  $c = \sqrt{7}$ ，由此可解得  $a = 2, b = \sqrt{3}$ ，

所以双曲线方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ ，选 D

7. 答案：C

解析过程：

因为函数  $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$  为偶函数，所以  $m = 0$ ，即  $f(x) = 2^{|x|} - 1$ ，

$$\text{所以 } a = f(\log_{0.5} 3) = f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) = 2^{|\log_2 \frac{1}{3}|} - 1 = 2^{\log_2 3} - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$b = f(\log_2 5) = 2^{\log_2 5} - 1 = 4, c = f(2m) = f(0) = 2^0 - 1 = 0$$

所以  $c < a < b$ ，选 C

8. 答案：D

解析过程：

$$\text{由 } f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases} \text{ 得 } f(2-x) = \begin{cases} 2-|2-x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} 2-|x|+x^2, & x < 0 \\ 4-|x|-|2-x|, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2-|2-x|+(x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{即 } y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 8, & x > 2 \end{cases}$$

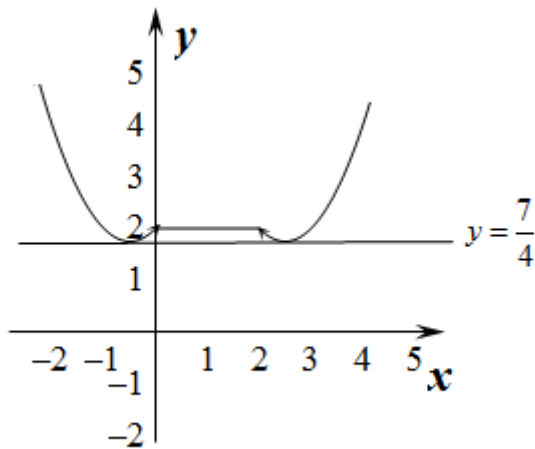
$$y = f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b,$$

所以  $y = f(x) - g(x)$  恰有 4 个零点等价于方程

$f(x) + f(2-x) - b = 0$  有 4 个不同的解,

即函数  $y = b$  与函数  $y = f(x) + f(2-x)$  的图象的 4 个公共点,

由图象可知  $\frac{7}{4} < b < 2$ . 选 D



## 二、填空题

9. 答案: -2

解析过程:

$$(1-2i)(a+i) = a+2+(1-2a)i \text{ 是纯虚数,}$$

所以  $a+2=0$ , 即  $a=-2$

10. 答案:  $\frac{8}{3}\pi$

解析过程:

由三视图可知，该几何体是中间为一个底面半径为1，高为2的圆柱，两端是底面半径为1，高为1的圆锥，

所以该几何体的体积  $V = 1^2 \times \pi \times 2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 1^2 \times \pi \times 1 = \frac{8}{3}\pi$  .

11. 答案:  $\frac{1}{6}$

解析过程:

两曲线的交点坐标为(0,0),(1,1),

所以它们所围成的封闭图形的面积

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

12. 答案:

$$\frac{15}{16}$$

解析过程:

$(x - \frac{1}{4x})^6$  展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{1}{4x}\right)^r = \left(-\frac{1}{4}\right)^r C_6^r x^{6-2r},$$

由  $6 - 2r = 2$  得  $r=2$ ,

所以  $T_3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 C_6^2 x^2 = \frac{15}{16}x^2$ , 所以该项系数为  $\frac{15}{16}$

13. 答案: 8

解析过程:

因为  $0 < A < \pi$ , 所以  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,

又  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}bc = 3\sqrt{15}, \therefore bc = 24$ ,

解方程组  $\begin{cases} b - c = 2 \\ bc = 24 \end{cases}$  得  $b = 6, c = 4$ , 由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 64,$$

所以  $a = 8$ .

14. 答案:  $\frac{29}{18}$

解析过程:

$$\text{因为 } \overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} = \frac{1-9\lambda}{9\lambda} \overrightarrow{DC} = \frac{1-9\lambda}{18\lambda} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1-9\lambda}{18\lambda} \overrightarrow{AB} = \frac{1+9\lambda}{18\lambda} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot \left( \frac{1+9\lambda}{18\lambda} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right) \\ &= \frac{1+9\lambda}{18\lambda} \overrightarrow{AB}^2 + \lambda \overrightarrow{BC}^2 + \left( 1 + \lambda \frac{1+9\lambda}{18\lambda} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1+9\lambda}{18\lambda} \times 4 + \lambda + \frac{19+9\lambda}{18\lambda} \times 2 \times 1 \times \cos 120^\circ \\ &= \frac{2}{9\lambda} + \frac{1}{2} \lambda + \frac{17}{18} \geq 2 \sqrt{\frac{2}{9\lambda} \cdot \frac{1}{2} \lambda} + \frac{17}{18} = \frac{29}{18} \end{aligned}$$

三、解答题

15. 答案: (I)  $\pi$ ; (II) 最大值  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 最小值  $-\frac{1}{2}$

解析过程:

(I) 解: 由题意得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{3})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) - \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

所以,  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(II) 解: 因为  $f(x)$  在区间  $\left[ -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} \right]$  上是减函数,

在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$  上是增函数,

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

所以,  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 最小值为  $-\frac{1}{2}$ .

16. 答案: (I)  $\frac{6}{35}$ ; (II) 见解析

解析过程:

$$(I) \text{ 解: 由题意得 } P(A) = \frac{C_2^2 C_3^2 + C_3^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{6}{35}$$

所以, 事件  $A$  发生的概率为  $\frac{6}{35}$ .

(II) 解: 随机变量  $X$  的所有可能取值为 1, 2, 3, 4.

$$P(X = k) = \frac{C_5^k C_3^{4-k}}{C_8^4} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

所以, 随机变量  $X$  的分布列为

$X$	1	2	3	4
$P$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

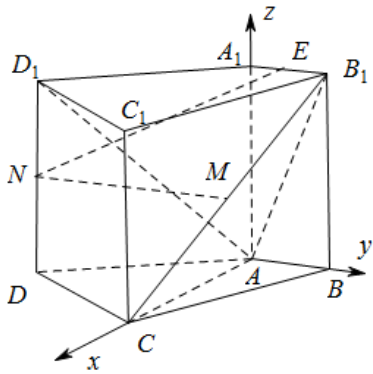
$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{2}$$

17. 答案:

见解析

解析过程:

如图, 以  $A$  为原点建立空间直角坐标系,



依题意可得  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(2,0,0)$ ,  $D(1,-2,0)$ ,

$A_1(0,0,2)$ ,  $B_1(0,1,2)$ ,  $C_1(2,0,2)$ ,  $D_1(1,-2,2)$ .

又因为  $M, N$  分别为  $B_1C$  和  $D_1D$  的中点, 得  $M(1, \frac{1}{2}, 1)$ ,  $N(1, -2, 1)$ .

(I) 证明: 依题意, 可得  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  为平面  $ABCD$  的一个法向量.

$\overrightarrow{MN} = (0, -\frac{5}{2}, 0)$ . 由此可得  $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0$ ,

又因为直线  $MN \not\subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $ABCD$ .

(II) 解:  $\overrightarrow{AD_1} = (1, -2, 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 0)$ .

设  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$  为平面  $ACD_1$  的法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$$

不妨设  $z = 1$ , 可得  $\vec{n}_1 = (0, 1, 1)$ .

设  $\vec{n}_2 = (x, y, z)$  为平面  $ACB_1$  的法向量, 则  $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$

又  $\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 2)$ , 得  $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$

不妨设  $z = 1$ , 可得  $\vec{n}_2 = (0, -2, 1)$ .

因此有  $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ , 于是  $\sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

所以，二面角  $D_1 - AC - B_1$  的正弦值为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

(III) 解：依题意，可设  $\overrightarrow{A_1E} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$ ，其中  $\lambda \in [0, 1]$ ，

则  $E(0, \lambda, 2)$ ，从而  $\overrightarrow{NE} = (-1, \lambda + 2, 1)$ 。

又  $n = (0, 0, 1)$  为平面  $ABCD$  的一个法向量，

由已知，得  $\cos \langle \overrightarrow{NE}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{NE} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{NE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (\lambda + 2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$ ，

整理得  $\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$ ，又因为  $\lambda \in [0, 1]$ ，解得  $\lambda = \sqrt{7} - 2$ 。

所以，线段  $A_1E$  的长为  $\sqrt{7} - 2$ 。

#### 18. 答案：

见解析

解析过程：

(I) 解：由已知，有  $(a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) = (a_4 + a_5) - (a_3 + a_4)$ ，

即  $a_4 - a_2 = a_5 - a_3$ ，所以  $a_2(q - 1) = a_3(q - 1)$ 。

又因为  $q \neq 1$ ，故  $a_3 = a_2 = 2$ ，由  $a_3 = a_1 \cdot q$ ，得  $q = 2$ 。

当  $n = 2k - 1 (k \in N^*)$  时， $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$ ；

当  $n = 2k (k \in N^*)$  时， $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}$ 。

所以， $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(II) 解: 由 (I) 得  $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2^{n-1}}} = \frac{n}{2^{n-1}}$ . 设  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,

$$\text{则 } S_n = 1 \times \frac{1}{2^0} + 2 \times \frac{1}{2^1} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-2}} + n \times \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2} S_n = 1 \times \frac{1}{2^1} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-1}} + n \times \frac{1}{2^n},$$

上述两式相减, 得

$$\frac{1}{2} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n}$$

$$\text{整理得, } S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

所以, 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

19. 答案:

$$(I) \frac{\sqrt{3}}{3}; (II) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1; (III) (-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

解析过程:

(I) 解: 由已知有  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ , 又由  $a^2 = b^2 + c^2$ , 可得  $a^2 = 3c^2, b^2 = 2c^2$ .

设直线  $FM$  的斜率为  $k (k > 0)$ , 则直线  $FM$  的方程为  $y = k(x+c)$ .

由已知, 有  $(\frac{kc}{\sqrt{k^2+1}})^2 + (\frac{c}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2$ , 解得  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

(II) 解: 由 (I) 得椭圆方程为  $\frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$ ,

直线  $FM$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$ ,

两个方程联立, 消去  $y$ , 整理得  $3x^2 + 2cx - 5c^2 = 0$ ,

解得  $x = -\frac{5}{3}c$ , 或  $x = c$ .

因为点 M 在第一象限，可得 M 的坐标为  $(c, \frac{2\sqrt{3}}{3}c)$ 。有  $|FM| = \sqrt{(c+c)^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3}c-0)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

解得  $c=1$ ，所以椭圆的方程为  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(III) 解：设点 P 的坐标为  $(x, y)$ ，直线 FP 的斜率为  $t$ ，

得  $t = \frac{y}{x+1}$ ，即  $y = t(x+1)$  ( $x \neq -1$ )，

与椭圆方程联立  $\begin{cases} y = t(x+1), \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$  消去  $y$ ，

整理得  $2x^2 + 3t^2(x+1)^2 = 6$ 。

又由已知，得  $t = \sqrt{\frac{6-2x^2}{3(x+1)^2}} > \sqrt{2}$ ，

解得  $-\frac{3}{2} < x < -1$ ，或  $-1 < x < 0$ 。

设直线 OP 的斜率为  $m$ ，得  $m = \frac{y}{x}$ ，即  $y = mx$  ( $x \neq 0$ )，

与椭圆方程联立，整理可得  $m^2 = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}$ 。

①当  $x \in (-\frac{3}{2}, -1)$  时，有  $y = t(x+1) < 0$ ，

因此  $m > 0$ ，于是  $m = \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}}$ ，得  $m \in (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 。

②当  $x \in (-1, 0)$  时，有  $y = t(x+1) > 0$ ，

因此  $m < 0$ ，于是  $m = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}}$ ，得  $m \in (-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 。

综上，直线  $OP$  的斜率的取值范围是  $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ .

20. **答案：**见解析

**解析过程：**

(I) 解：由  $f(x) = nx - x^n$ ,

可得  $f'(x) = n - nx^{n-1} = n(1 - x^{n-1})$ ,

其中  $n \in N^*$ , 且  $n \geq 2$ .

下面分两种情况讨论：

(1) 当  $n$  为奇数时.

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 1$ , 或  $x = -1$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

所以,  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-1, 1)$  内单调递增.

(2) 当  $n$  为偶数时.

当  $f'(x) > 0$ , 即  $x < 1$  时, 函数  $f(x)$  单调递增;

当  $f'(x) < 0$ , 即  $x > 1$  时, 函数  $f(x)$  单调递减.

所以,  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

(II) 证明：设点  $P$  的坐标为  $(x_0, 0)$ ,

则  $x_0 = \frac{1}{n^{n-1}}$ ,  $f'(x_0) = n - n^2$ .

曲线  $y = f(x)$  在点  $P$  处的切线方程为  $y = f'(x_0)(x - x_0)$ ,

即  $g(x) = f'(x_0)(x - x_0)$ ,

令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 即  $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ ,

则  $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ .

由于  $f'(x) = -nx^{n-1} + n$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

故  $F'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

又因为  $F'(x_0) = 0$ ,

所以当  $x \in (0, x_0)$  时,  $F'(x) > 0$ , 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $F'(x) < 0$ ,

所以  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  内单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,

所以对于任意的正实数  $x$ , 都有  $F(x) \leq F(x_0) = 0$ ,

即对于任意的正实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x)$ .

(III) 证明: 不妨设  $x_1 \leq x_2$ .

由 (II) 知  $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$ ,

设方程  $g(x) = a$  的根为  $x_2'$ , 可得  $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$ ,

当  $n \geq 2$  时, 在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递减.

又由 (II) 知  $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$ , 可得  $x_1 \leq x_2'$ .

类似地，设曲线  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的切线方程为  $y = h(x)$ ，

可得  $h(x) = nx$ ，

当  $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) - h(x) = -x^n < 0$ ，

即对于任意的  $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) < h(x)$ 。

设方程  $h(x) = a$  的根为  $x_1'$ ，可得  $x_1' = \frac{a}{n}$ 。

因为  $h(x) = nx$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增，

且  $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$ ，因此  $x_1' < x_1$ 。

由此可得  $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1-n} + x_0$ 。

因为  $n \geq 2$ ，所以  $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$ ，

故  $2 \geq \frac{1}{n^{n-1}} = x_0$ 。所以， $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ 。