2007年陕西高考理科数学真题及答案

注意事项：

1. 本试卷分第一部分和第二部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 考生领到试卷后，须按规定在试卷上填写姓名、准考证号、并在答题卡上填涂对应的试卷类型信息点。
3. 所有答案必须在答题卡上指定区域内作答。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（共60分）

一、选择题 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的（本大题共12小题，每小题5分，共60分）．

1. 在复平面内，复数 $z=\frac{1}{2+i}$ 对应的点位于

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第在象限　（D）第四象限

2. 已知全信 U=（1，2，3，　4，5），集合 $A=\{x\in Z||x-3|<2\}$，则集合 C_uA 等于

（A） $\{1,2,3,4\}$　（B） $\{2,3,4\}$　（C） $\{1,5\}$　（D） $\{5\}$

3. 抛物线 $y=x^2$ 的准线方程是

（A） $4y+1=0$　（B） $4x+1=0$　（C） $2y+1=0$　（D） $2x+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为

（A） $-\frac{1}{5}$　（B） $-\frac{3}{5}$　（C） $\frac{1}{5}$　（D） $\frac{3}{5}$

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2$，$S_{30}=14$，则 S_{40} 等于

（A）80　（B）30　（C）26　（D）16

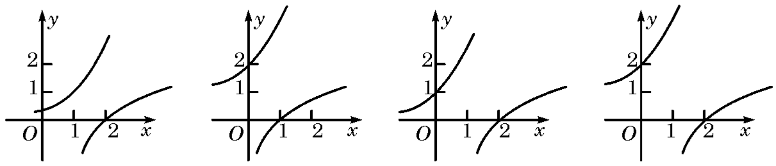
6. 一个正三棱锥的四个顶点都在半径为1的球面上，其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上，则该正三棱锥的体积是

（A） $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（B） $\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C） $\frac{\sqrt{3}}{4}$　（D） $\frac{\sqrt{3}}{12}$

7. 已知双曲线C： $\frac{a^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0, b＞0)，以C的右焦点为圆心且与C的浙近线相切的圆的半径是

A. $\sqrt{ab}$　B. $\sqrt{a^2+b^2}$　C. a　D. b

8. 若函数 f(x) 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则函数 f(x-1) 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

9. 给出如下三个命题：

①四个非零实数 a、b、c、d 依次成等比数列的充要条件是 ad=bc；

②设 a, b∈R，则 ab≠0 若 $\frac{a}{b}$＜1，则 $\frac{b}{a}$＞1；

③若 f(x)=$\log_2 2x$=x, 则 f（|x|）是偶函数.

其中不正确命题的序号是

A. ①②③　　　　B. ①②　　　　C. ②③　　　　D. ①③

10. 已知平面 α ∥平面 β，直线 m α，直线 n β，点 A∈m, 点 B∈n，记点 A、B 之间的距离为 a, 点 A 到直线 n 的距离为 b, 直线 m 和 n 的距离为 c, 则

A. $b\leqslant a\leqslant c$　　　　B. $a\leqslant c\leqslant b$　　　　C. $c\leqslant a\leqslant b$　　　　D. $c\leqslant b\leqslant a$

11. $f(x)$是定义在（0，±∞）上的非负可导函数，且满足 $xf(x)+f(x)\leqslant 0$, 对任意正数 a、b, 若　　$a<b$，则必有

A. $af(b)\leqslant bf(a)$　　　　B. $bf(a)\leqslant af(b)$

C. $af(a)\leqslant f(b)$　　　　D. $bf(b)\leqslant f(a)$

12. 设集合 S={A_0，A_1，A_2，A_3}，在 S 上定义运算⊕为：A_1⊕A=A_b, 其中 k 为 I+j 被 4 除的余数，I, j=0, 1, 2, 3. 满足关系式=（x⊕x）⊕A_2=A_0的 x(x∈S) 的个数为

A. 4　　　　B. 3　　　　C. 2　　　　D. 1

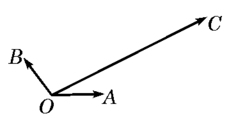
第二部分（共 90 分）

二、填空题 把答案填在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x-1}\right)=$__________.

14. 已知实数 x、y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geq 0,\\ 2x+y-2\geq 0,\\ 3x-y-3\leq 0,\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为__________.

15. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$, 其中与 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$（$\lambda$，$\mu$∈R）, 则 $\lambda+\mu$ 的值为__________.



16. 安排 3 名支教老师去 6 所学校任教，每校至多 2 人，则不同的分配方案共有_______种.（用数字作答）

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 74 分）.

17.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=a\cdot b$, 其中向量 $a=(m,\cos 2x)$, $b=(1+\sin 2x,1)$, $x\in R$, 且函数 $y=f(x)$ 的图象经过点$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$,

(Ⅰ) 求实数 m 的值;

(Ⅱ) 求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 的值的集合.

18. (本小题满分 12 分)

某项选拔共有三轮考核，每轮设有一个问题，能正确回答问题者进入下一轮考试，否则即被淘汰，已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$，且各轮问题能否正确回答互不影响.

(Ⅰ) 求该选手被淘汰的概率;

(Ⅱ) 该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列与数数期望. (注：本小题结果可用分数表示)

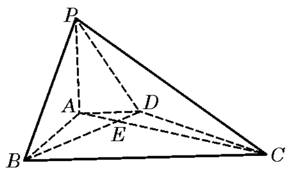
19. (本小题满分 12 分)

如图,在底面为直角梯形的四棱锥$P-ABCD$中,$AD//BC$, $\angle ABC=90°$, $PA\perp$平面 v

$PA=4, AD=2, AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.

(Ⅰ)求证:BD $BD\perp$平面PAC;

(Ⅱ)求二面角 $P-BD-D$ 的大小.



20. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{c^2}{x^2+ax+a}$, 其中 a 为实数.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 的定义域为 R, 求 a 的取值范围;

(Ⅱ)当 $f(x)$ 的定义域为 R 时，求 $f(x)$ 的单减区间.

21. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0) 的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知各项全不为零的数列$\{a_k\}$的前 k 项和为 S_k, 且 $S_k=\dfrac{1}{2}a_ka_{k+1}(k\in N^*)$, 其中 $a_1=1$.

(Ⅰ)求数列$\{a_k\}$的通项公式;

(Ⅱ)对任意给定的正整数 $n(n\geqslant 2)$, 数列$\{b_k\}$满足$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{k-n}{a_{b+1}}$ ($k=1,2,\cdots,n-1$), $b_1=1$.

求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

参考答案

一、选择题 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）.

1．D　2．B　3．D　4．A　5．C　6．B　7．B　8．D　9．A　10．A　11．C　12．B

二、填空题 把答案填在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）.

13．$\frac{1}{3}$　14．8　15．6　16．210

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 74 分）

17.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=a\bullet b=m(1+\sin 2x)+\cos 2x$，

由已知 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=m\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=2$，得 $m=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=1+\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$ 当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$，

由 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，得 x 值的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi-\frac{3\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

18.（本小题满分 12 分）

解法一：（Ⅰ）记“该选手能正确回答第 i 轮的问题”的事件为 $A_i(i=1,2,3)$，则

$P(A_1)=\frac{4}{5}$，$P(A_2)=\frac{3}{5}$，$P(A_3)=\frac{2}{5}$，

$\therefore$ 该选手被淘汰的概率

$$P=P(\overline{A_1}+A_1\overline{A_2}+A_2A_2\overline{A_3})=P(\overline{A_1})+P(A_1)P(\overline{A_2})+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}.$$

（Ⅱ）ξ 的可能值为 $1,2,3$，$P(\xi=1)=P(\overline{A_1})=\frac{1}{5}$，

$$P(\xi=2)=P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25},$$

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}.$$

$\therefore\xi$ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{12}{25}$

$\therefore E\xi = 1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{8}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{57}{25}$.

解法二：（Ⅰ）记“该选手能正确回答第 i 轮的问题”的事件为 $A_i(i=1,2,3)$，则

$P(A_1)=\frac{4}{5}$，$P(A_2)=\frac{3}{5}$，$P(A_3)=\frac{2}{5}$.

$\therefore$ 该选手被淘汰的概率 $P=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{101}{125}$.

（Ⅱ）同解法一.

19.（本小题满分 12 分）

解法一：（Ⅰ）$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$. $\therefore BD\perp PA$.

又 $\tan ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan BAC=\frac{BC}{AB}=\sqrt{3}$.

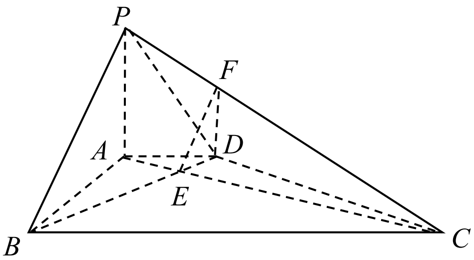
$\therefore \angle ABD=30^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$\therefore \angle AEB=90^\circ$，即 $BD\perp AC$.

又 $PA\cap AC=A$. $\therefore BD\perp$ 平面 PAC.

（Ⅱ）过 E 作 $EF\perp PC$，垂足为 F，连接 DF.

$\because DE\perp$ 平面 PAC，EF 是 DF 在平面 PAC 上的射影，由三垂线定理知 $PC\perp DF$，

$\therefore \angle EFD$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角.



又 $\angle DAC=90^\circ-\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore DE=AD\sin DAC=1$，

$AE=AB\sin ABE=\sqrt{3}$，

又 $AC=4\sqrt{3}$，$\therefore EC=3\sqrt{3}$，$PC=8$.

由 $\mathrm{Rt}\triangle EFC\backsim\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 得 $EF=\frac{PA\bullet EC}{PC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFD$ 中，$\tan EFD=\frac{DE}{EF}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$\therefore \angle EFD=\arctan\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

$\therefore$ 二面角 $A-PC-D$ 的大小为 $\arctan\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

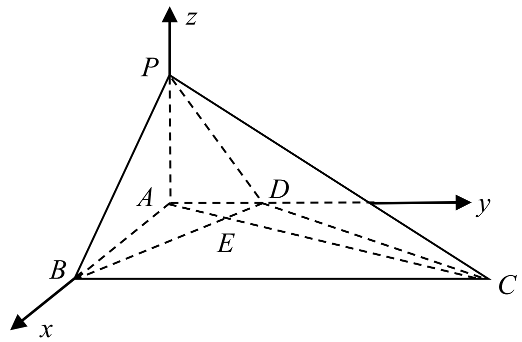
解法二：（Ⅰ）如图，建立坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，$C(2\sqrt{3},6,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,4)$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{3},6,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{3},2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AC}=0$．$\therefore BD\perp AP$，$BD\perp AC$，

又 $PA\cap AC=A$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAC．



（Ⅱ）设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,1)$，

则 $\overrightarrow{CD}\bullet\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{PD}\bullet\boldsymbol{n}=0$，

又 $\overrightarrow{CD}=(-2\sqrt{3},-4,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-4)$，

$\therefore \begin{cases}-2\sqrt{3}x-4y=0,\\ 2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\\ y=2,\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},2,1\right)$

平面 PAC 的法向量取为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{3},2,0\right)$，

$\cos<\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$．

$\therefore$ 二面角 $A-PC-D$ 的大小为 $\arccos\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$．

20．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\therefore x^2+ax+a\neq 0$ 恒成立，$\therefore \Delta=a^2-4a<0$，

$\therefore 0<a<4$，即当 $0<a<4$ 时 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{x(x+a-2)\mathrm{e}^x}{(x^2+ax+a)^2}$，令 $f'(x)\leqslant 0$，得 $x(x+a-2)\leqslant 0$．

由 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2-a$，又 $\because 0<a<4$，

$\therefore 0<a<2$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2-a$；

当 $a=2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$；当 $2<a<4$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $2-a<x<0$，

即当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,2-a)$；

当 $2<a<4$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(2-a,0)$．

21．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为c，依题意$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\\ a=\sqrt{3},\end{cases}$

$\therefore b=1$，$\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅱ）设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

（1）当$AB\perp x$轴时，$|AB|=\sqrt{3}$.

（2）当AB与x轴不垂直时，

设直线AB的方程为$y=kx+m$.

由已知$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$m^2=\dfrac{3}{4}(k^2+1)$.

把$y=kx+m$代入椭圆方程，整理得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$.

$$\therefore |AB|^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2=(1+k^2)\left[\frac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\frac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]$$

$$=\frac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}=\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}$$

$$=3+\frac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}=3+\frac{12}{9k^2+\dfrac{1}{k^2}+6}(k\neq 0)\leqslant 3+\frac{12}{2\times 3+6}=4.$$

当且仅当$9k^2=\dfrac{1}{k^2}$，即$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立．当$k=0$时，$|AB|=\sqrt{3}$，

综上所述$|AB|_{\max}=2$.

$\therefore$当$|AB|$最大时，$\triangle AOB$面积取最大值$S=\dfrac{1}{2}\times|AB|_{\max}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当$k=1$，由$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}a_1a_2$及$a_1=1$，得$a_2=2$.

当$k \geqslant 2$时，由$a_k = S_k - S_{k-1} = \frac{1}{2}a_k a_{k+1} - \frac{1}{2}a_{k-1}a_k$，得$a_k(a_{k+1} - a_{k-1}) = 2a_k$．

因为$a_k \neq 0$，所以$a_{k+1} - a_{k-1} = 2$．从而$a_{2m-1} = 1 + (m-1)\cdot 2 = 2m-1$．

$a_{2m} = 2 + (m-1)\cdot 2 = 2m$，$m \in \mathbf{N}^*$．故$a_k = k(k \in \mathbf{N}^*)$．

（Ⅱ）因为$a_k = k$，所以$\frac{b_{k+1}}{b_k} = -\frac{n-k}{a_{k+1}} = -\frac{n-k}{k+1}$．

所以$b_k = \frac{b_k}{b_{k-1}}\cdot\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1 = (-1)^{k-1}\cdot\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}\cdot 1$

$= (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}C_n^k(k = 1,2,\cdots,\ n)$．

故$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{1}{n}\left[C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n\right]$

$= \frac{1}{n}\left\{1 - \left[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n\cdot C_n^n\right]\right\} = \frac{1}{n}$．

B卷选择题答案：

1．D　2．C　3．A　4．B　5．B　6．C　7．D　8．A　9．B
10．D　11．A　12．C